FISICA RELATIVISTA

ENRIQUE LOEDEL

A Walter S. Hill, estimado
colega y generoso amigo,
con todo mi afecto
E. Loedel

Física relativista

★

Montevideo, 4/Enero/1956

Murió Loedel!
31 Julio 1962

1

Física relativista

Enrique Loedel

Profesor de la Universidad de La Plata



EDITORIAL KAPELUSZ • BUENOS AIRES

MORENO 372

Hecho el depósito que marca la ley 11.723
Impreso en la Argentina (Printed in Argentine).

Publicado en diciembre de 1955.

LIBRO DE EDICIÓN ARGENTINA

A mi gran amigo

Profesor Doctor FLORENCIO CHAROLA

ÍNDICE GENERAL

PÁG.

CAPÍTULO III

CINEMATICA RELATIVISTA

CAPÍTULO IV

DINAMICA RELATIVISTA

PÁG.

CAPÍTULO V

PRUEBAS EXPERIMENTALES DE LA TEORÍA RESTRINGIDA

SEGUNDA PARTE

Teoría general de la relatividad

CAPÍTULO VI

POSIBILIDAD DE GENERALIZAR LA TEORÍA RESTRINGIDA

CAPÍTULO VII

ELEMENTOS DE CALCULO TENSORIAL

Ejemplos y aplicaciones

Cálculo de geodésicas

PÁG.

Ejemplos de cálculo de geodésicas en casos sencillos

El tensor de Riemann-Christoffel

CAPÍTULO VIII

ECUACIONES DEL CAMPO GRAVITATORIO

CAPÍTULO IX

PRUEBAS EXPERIMENTALES DE LA TEORÍA DE LA GRAVITACIÓN DE EINSTEIN. LOS TRES EFECTOS CRUCIALES

A) CORRIMIENTO DEL PERIHELIO DE MERCURIO

B) DESVIACIÓN DE LA LUZ EN UN CAMPO GRAVITATORIO

C) CORRIMIENTO HACIA EL ROJO DE LAS LÍNEAS ESPECTRALES

D) OTRAS MANERAS DE EXPLICAR LOS TRES EFECTOS CRUCIALES

CAPÍTULO X

PRINCIPIO DE LA VELOCIDAD PARABÓLICA

Deducción directa de los tres efectos cruciales de la teoría de la gravitación de Einstein

PÁG.

CAPÍTULO XI

COSMOLOGÍA

PRÓLOGO

El 30 de junio de 1905, la revista Annalen der Physik *recibió un manuscrito firmado por un físico que era, por ese entonces, casi totalmente desconocido, pero que habría de alcanzar, poco tiempo después, y a raíz justamente de la publicación de aquel trabajo, una fama y una popularidad sin precedentes en todo el mundo. Los redactores de la revista habrán buscado en vano el nombre del firmante del artículo que tenían sobre su mesa, en todos los registros de las universidades e institutos de investigación, pues, en aquella época,* Albert Einstein *era tan sólo un modesto empleado de la oficina de patentes de Berna, encargado de asesorar a los inventores en la redacción de sus solicitudes de privilegio. Éstas debían estar escritas en lenguaje claro y conciso, y aquella memoria enviada a los* Anales, *era un ejemplo de claridad y concisión. Así apareció —hace ya cincuenta años— la teoría de la relatividad, que, al recimentar todo el edificio de la física, nos daría una nueva visión del Cosmos.*

No obstante, pocos fueron los que advirtieron desde el comienzo la transcendencia y el alcance revolucionario de aquella memoria científica cuyo primer párrafo estaba dedicado a definir la simultaneidad de dos acontecimientos distantes; pero, entre esos pocos, figuraba Max Planck, *el genial físico teórico de Berlín, que, al ser requerido por la Universidad Alemana de Praga, en 1910, sobre los candidatos a ocupar la cátedra de Física Teórica en aquella Universidad, se expidió diciendo: "Si la teoría de Einstein se comprueba, conforme espero, éste será considerado como el Copérnico del siglo veinte".*

Cuando Planck escribió lo que precede, la teoría restringida de la relatividad tenía sólo cinco años de vida y faltaban aún otros cinco para la aparición de la teoría generalizada, monumental síntesis teórica de nuestro siglo, al que habría que llamar, según Bertrand Russell, *el siglo de Einstein.*

Acaba de cumplirse, pues, el primer cincuentenario de la aparición de la teoría de la relatividad, y, cuando en enero del corriente año entregamos a la editorial Kapelusz *los originales de esta obra, deseábamos que su aparición coincidiera con la celebración de aquel acontecimiento. Pero esa conmemoración quedó relegada a un segundo plano ante el anuncio, que con-*

movió al mundo, de que el genio había muerto: 18 de abril de 1955.

Se recordó entonces, en todos los círculos, la obra del sabio bohemio y romántico creador de universos, su incesante llamado a la paz y a la fratenidad entre todos los hombres, y, sobre todas las cosas, su exaltada y permanente defensa de lo que debe ser considerado como principio básico y fundamental del mundo moral: el reconocimiento y el respeto de la libertad de la persona humana.

Pero si el gran público conoce hasta en los más mínimos detalles la límpida trayectoria de la vida del gran sabio, aún se ignoran casi en absoluto, en amplios sectores del mundo científico, los fundamentos y el contenido de la teoría que lo hizo famoso. Y esa ignorancia no proviene, ciertamente, de indiferencia o falta de interés. Por el contrario, son muchos los que quisieran enterarse, no sólo de las predicciones espectaculares de la teoría, sino también del encadenamiento lógico de la trama conceptual en que la misma se asienta. Y este libro —que no ha sido escrito para sabios ni para personas totalmente legas en matemáticas y física— busca satisfacer aquel deseo cultural, aquella apetencia que constituye una verdadera necesidad intelectual para todos los que no se resignan a vivir al margen de las ideas de su época. Pero a esa legítima aspiración se ha opuesto hasta ahora la creencia, desgraciadamente muy difundida, de que la teoría de la relatividad contiene, en sí, dificultades que son insuperables para el común de los mortales. Esta obra fué concebida, precisamente, para combatir aquella suposición tan errónea como injustificada, y es por ello que, a lo largo de todas sus páginas, procuramos guiar al lector para que vaya venciendo las dificultades una a una, y, para ayudarlo en su tarea, muchas veces dialogamos con él, buscando, de ese modo, adelantarnos a sus posibles preguntas.

Las abstracciones de la teoría y sus consecuencias un tanto en pugna con los hábitos mentales corrientes, exigen del lector, sin duda alguna, cierto esfuerzo, que, más que nada, debe ir dirigido a hacer conscientes primero, y a abatir luego, sus propios prejuicios. Para facilitar su tarea y proporcionarle un sostén intelectual a lo largo de la nueva senda, hemos recurrido a toda clase de ejemplos y comparaciones, intercalando además en el texto numerosas figuras que han sido ejecutadas, todas ellas, por nuestro joven amigo señor Esteban García, *a quien le agradecemos gustosos su entusiasta y desinteresada colaboración.*

En la primera parte tratamos de la teoría restringida de la relatividad, siendo la característica fundamental de nuestra exposición, el haber hecho resaltar la estrecha relación existente entre el fenómeno de la aberración de la luz y la relatividad de la simultaneidad. Ello nos condujo a una deducción simple

de las fórmulas de Lorentz y a una representación gráfica de las mismas que facilita la comprensión de la teoría, haciéndola, en cierto sentido, directamente intuible, ya que todas las consecuencias cinemáticas de la misma —composición de velocidades, efecto Doppler, aberración de la luz, etcétera—, hallan, de ese modo, una expresión visual directa. Además, la posibilidad de representar gráficamente el cuadrivector impulso, hace que la dinámica de la relatividad restringida pueda ser expuesta de una manera tan elemental, que, cuando la hallamos, nos asombró a nosotros mismos.

La segunda parte trata de la teoría general de la relatividad y, después del capítulo sexto, que puede ser considerado como introductorio de la misma, se choca contra las alambradas de púa *del capítulo siguiente, dedicado al cálculo diferencial absoluto o cálculo tensorial. Hemos seguido ese ordenamiento para que el mismo coincidiera con el del desarrollo histórico, pero estamos seguros de que muy pronto se habrá de reconocer que, no sólo más simple, sino también más natural y lógico, es proseguir por el camino iniciado por el propio Einstein, permaneciendo fieles al espíritu de su primer enunciado del principio de equivalencia, precisándolo en la forma en que lo hemos hecho al establecer lo que llamamos el principio de la velocidad parabólica. La necesidad de precisar aquel primer enunciado se pone de manifiesto con sólo observar los datos consignados en las tablas insertas en las páginas 300 y 415. Del principio formulado se obtienen, de inmediato, importantes consecuencias, que culminan, después de establecer la ecuación de la energía, con la deducción directa de las ecuaciones exactas de los tres efectos cruciales de la teoría de la gravitación de Einstein, sin hacer uso para nada del cálculo diferencial absoluto.*

Por tal motivo es aconsejable estudiar el capítulo décimo inmediatamente después del sexto.

En el último capítulo se trata del problema cosmológico y hemos incluído en él un breve bosquejo histórico con el objeto de valorar la extraordinaria aventura del hombre que, olvidándose de su pequeñez y de la brevedad de su vida, se pone a bucear osadamente en las profundidades del espacio y del tiempo.

Esta obra, que es fundamentalmente un libro de texto, está dedicada a los estudiantes de física, química, ingeniería, etcétera, y, sobre todo, a los profesores de enseñanza media, pues ya es tiempo de hacer que las nuevas generaciones se vayan enterando de la gran revolución conceptual que ha tenido lugar en los tiempos que corren y sin la cual no hubiera sido posible la iniciación de la era atómica. Por tal razón, paralelamente a los desarrollos matemáticos, se expresan las ideas básicas en lenguaje común, buscando así, no sólo ampliar el círculo de

aquellos que puedan sacar algún provecho de su lectura, sino también, precisar y puntualizar el alcance y contenido de los conceptos fundamentales. Un ejemplo de la necesidad de efectuar semejante puntualización se encontrará en el párrafo 123, donde se verá que dos especialistas sostienen puntos de vista diametralmente opuestos en un asunto tan importante como el de la ubicación de la rotación de la Tierra dentro del marco de la teoría general de la relatividad. Por ello, si el lector descubre una segunda intención en la leyenda de la figura inserta en la página 339, no estará del todo equivocado.

Einstein, defensor de la libertad en el mundo moral, construyó un imponente edificio teórico, basado también en la libertad para elegir, en la descripción de los hechos del mundo físico, cualquier sistema de coordenadas, aun aquellas que hemos denominado gelatinosas (pág. 287), pero sin olvidar de darnos, al mismo tiempo, la manera de normalizarlas. Y esa normalización no es otra que el postulado de la constancia de la velocidad de la luz, que debe cumplirse siempre, en lo infinitamente pequeño, para valores naturales. Sólo así es posible confrontar la teoría con la experimentación, y nuestra libertad en la elección de los sistemas de coordenadas no interfiere con el orden del mundo, cuya característica más extraña, al decir de Einstein, es que su comportamiento resulte comprensible a la razón humana. Si no se capta el doble juego consistente en la amplia libertad en la elección del sistema de coordenadas por un lado, y la necesidad de normalizarlas, por el otro, se corre el riesgo de que el mareo *sobrevenga en cualquier circunstancia.*

Einstein compara su teoría de la relatividad con un edificio de dos pisos, apoyándose la generalizada, paradógicamente, sobre la restringida, por lo cual resulta necesario estudiar primero detenidamente esta última si se quiere comprender cabalmente a la primera. Esperamos que el lector siga este consejo; de ese modo, su esfuerzo se verá compensado por una honda satisfacción, si es que no se precipita y pretende beber de un trago lo que ha sido destilado gota a gota.

ENRIQUE LOEDEL PALUMBO.

La Plata, octubre de 1955.

Primera parte

TEORÍA RESTRINGIDA DE LA RELATIVIDAD

CAPÍTULO I

LA RELATIVIDAD EN LA FÍSICA CLÁSICA

1. Principio de relatividad de Galileo. — Las ideas relativistas fundamentales aparecen, históricamente, al considerar como una realidad física posible el movimiento de la Tierra en torno de su eje y alrededor del Sol. En la segunda jornada de los *Diálogos* de *Galileo* (1632), acerca de los sistemas ptolomeico y copernicano, al refutarse allí los argumentos esgrimidos por los peripatéticos a favor de la inmovilidad de la Tierra, se establece, de un modo preciso, lo que después fué llamado el *principio de relatividad de la mecánica clásica.* Entre los numerosos ejemplos que allí se citan aparece el del barco que se desplaza con movimiento uniforme, respecto de la tierra firme, sobre las aguas tranquilas de un lago, y en cuyo interior *todo* sucede exactamente igual que en la ribera. En particular, si se tuviera una piedra suspendida del techo de una de las cabinas de ese barco, se observaría al hilo tenso y vertical y a la piedra en reposo con respecto al piso y a las paredes del navío. Si se quemara el hilo que sostiene la piedra se vería a ésta seguir una trayectoria rectilínea y caer justamente en el pie de la vertical que pasaba por el punto de suspensión. Esta *trayectoria rectilínea* respecto del barco *es un arco de parábola* con respecto a la orilla. No tiene sentido preguntar acerca de la forma de la *trayectoria en sí,* de la *trayectoria absoluta* o de la *troyectoria en el espacio* *. Claro está que los peripatéticos no se habrían convencido tan rápidamente, ni aun cuando se les hubiera mostrado los *films* que hoy se podrían tomar desde el barco y desde la orilla y que darían para la trayectoria de la misma piedra una recta en un caso y un arco de curva en otro.

Obsérvese que esta relatividad es *recíproca*: Una piedra que cayera verticalmente respecto de la ribera, siguiendo, por ejemplo, una trayectoria paralela a la arista formada por dos paredes de una casa situada allí, describiría *realmente* un arco de parábola si el movimiento es referido al barco, pues con respecto a él, es la casa y los árboles que la rodean los que se

* En realidad en la mecánica newtoniana se introduce un espacio absoluto y la razón de ello se verá en el capítulo VI.

desplazan plácidamente en el sentido que va de la proa hacia la popa.

Una trayectoria cerrada respecto de un sistema de referencia es, en general, abierta respecto de otro: Si al escribir tardo un décimo de segundo en dibujar la letra O, la trayectoria descripta por la punta del lápiz aparecería, vista desde el Sol, como una larguísima línea casi recta, curvada de un modo imperceptible y de unos tres kilómetros de longitud. Y no obstante aquí está, frente a mis ojos, la curva cerrada descripta por el lápiz, que pude haberla dibujado en el interior de un avión cuando marchaba, respecto del suelo, a mil kilómetros por hora.

Psicológicamente nos resulta difícil considerar del todo equivalentes al sistema emplazado en tierra firme y al sistema del barco, porque *nuestro* sistema es el de la corteza terrestre que pisamos.

Nuestras nociones de distancia y ubicación comenzaron a surgir, seguramente, en nuestra más remota infancia, cuando veíamos desplazarse la mancha que representaba al pájaro o al gato, en tanto que la torre de la iglesia y la montaña lejana se encontraban siempre en el mismo lugar. Y por eso aún hoy, cuando vemos al Sol ocultarse lentamente detrás de un cerro, nos cuesta bastante imaginar que es el disco brillante el que permanece fijo, en tanto que toda la Tierra, con sus inmensas montañas y sus dilatados bosques, sus mares y sus ríos, se mueve en sentido opuesto. Comprendemos entonces al amigo de Galileo cuando le preguntaba al maestro:

—Carísimo Galileo; entre nosotros, con toda confianza, ¿crees tú realmente que la Tierra se mueve?

2. **Sistemas inerciales.** — En el ejemplo del barco fué necesario suponer que aquél se desplazaba "plácidamente", o sea, con movimiento uniforme y sin balancearse. Sólo en ese caso lo que ocurre en el interior del barco será, desde el punto de vista físico, exactamente igual a lo que sucede en la ribera. Pero si el mar está agitado los pasajeros de la nave reconocen su bailoteo sin necesidad de asomarse a la ventanilla de su camarote. ¿De qué manera? Entre otras muchas cosas, en un día así sería absolutamente imposible jugar al billar: una bola en reposo, en un momento dado se mueve de repente por sí sola, accionada por una fuerza misteriosa, que actúa de pronto en una dirección y de pronto en otra. Las leyes de la dinámica de Newton y en particular el principio de inercia no se cumplen. La trayectoria de un cuerpo "abandonado a sí mismo" deja de ser rectilínea en ese sistema y el movimiento tampoco es uniforme. Un sistema así, en el cual no se cumple el principio de inercia de Galileo, es un sistema *no inercial.*

Tampoco es rigurosamente inercial un sistema de referencia vinculado a la tierra firme. Cierto es que sobre la superfi-

cie de la Tierra se puede jugar al billar y que si el plano de la mesa es horizontal, una bola abandonada a sí misma, en reposo con respecto a las barandas, continuará en ese mismo estado indefinidamente. Pero las trayectorias de las bolas, aun en un billar perfecto y desprovisto totalmente de roce, no son rigurosamente rectilíneas. Para comprender esto imaginemos que una persona situada exactamente en el polo norte de la Tierra se aleja del mismo con la velocidad constante de un kilómetro por hora, pero dirigiéndose siempre hacia determinada estrella que se encuentre próxima al horizonte. Tal estrella podría ser, por ejemplo, Procyon, que desde el polo norte se la ve, permanentemente, a la altura de 5°22′, pues tal es la declinación norte de la misma. ¿Cuál sería la forma de la huella que nuestro caminante dejaría impresa sobre las nieves polares? La forma de la trayectoria, referida a un sistema que contenga al plano vertical que pasa por la estrella, es una recta (prescindimos de la curvatura de la Tierra), pues, por lo dicho, nuestro caminante no se aparta de dicho plano en ningún momento y sigue justamente la intersección de ese plano con el del horizonte. De modo que, con referencia a las estrellas fijas, nuestro excursionista del Polo se mueve en línea recta y con movimiento uniforme. Con respecto a la Tierra firme, la estrella que sirve de guía a nuestro viajero da una vuelta completa en 24 horas (siderales), por lo cual la huella impresa por éste en el suelo sería una espiral. Al cabo de seis horas de marcha se habría alejado del polo seis kilómetros, pero puede calcularse que habría recorrido casi ocho kilómetros (exactamente 7 942 metros) y para cumplir con sus propósitos tendría que caminar cada vez más de prisa: a las seis horas de haber emprendido la marcha la velocidad del caminante sería, respecto del piso firme, de 1 862 m/hora *. Pues bien, si suponemos que instalamos en el Polo una inmensa mesa de billar, sobre la cual el roce fuera totalmente nulo, observaríamos que las trayectorias de las bolas serían enteramente semejantes a las de nuestro caminante: líneas rectas y movimiento uniforme respecto de las estrellas fijas y espirales y movimiento variado con respecto a la Tierra. ¿Cómo sabemos que es así? Claro está que el "experimento del billar" no puede llevarse a cabo, pero otros experimentos tales como el del péndulo de Foucault, la desviación respecto de la vertical en la caída libre, desviación de los proyectiles de las armas de fuego, el comportamiento de un giróscopo, etc., prue-

* Llamando r y φ a las coordenadas del punto móvil respecto de las estrellas fijas, se tendrá para el caso del ejemplo: $r = vt$; $\varphi = 0$; siendo v la velocidad con que el punto se aleja del origen. Para el sistema ligado a la Tierra las coordenadas son r' y φ' vinculadas a las anteriores por las relaciones: $r' = r$; $\varphi' = \omega t$; siendo ω la velocidad de rotación de la Tierra. Resulta así $r' = vt$, o sea $r' = \frac{v}{\omega}\varphi'$, que es la ecuación de la espiral de Arquímedes. Con esto pueden calcularse todos los valores dados en el texto.

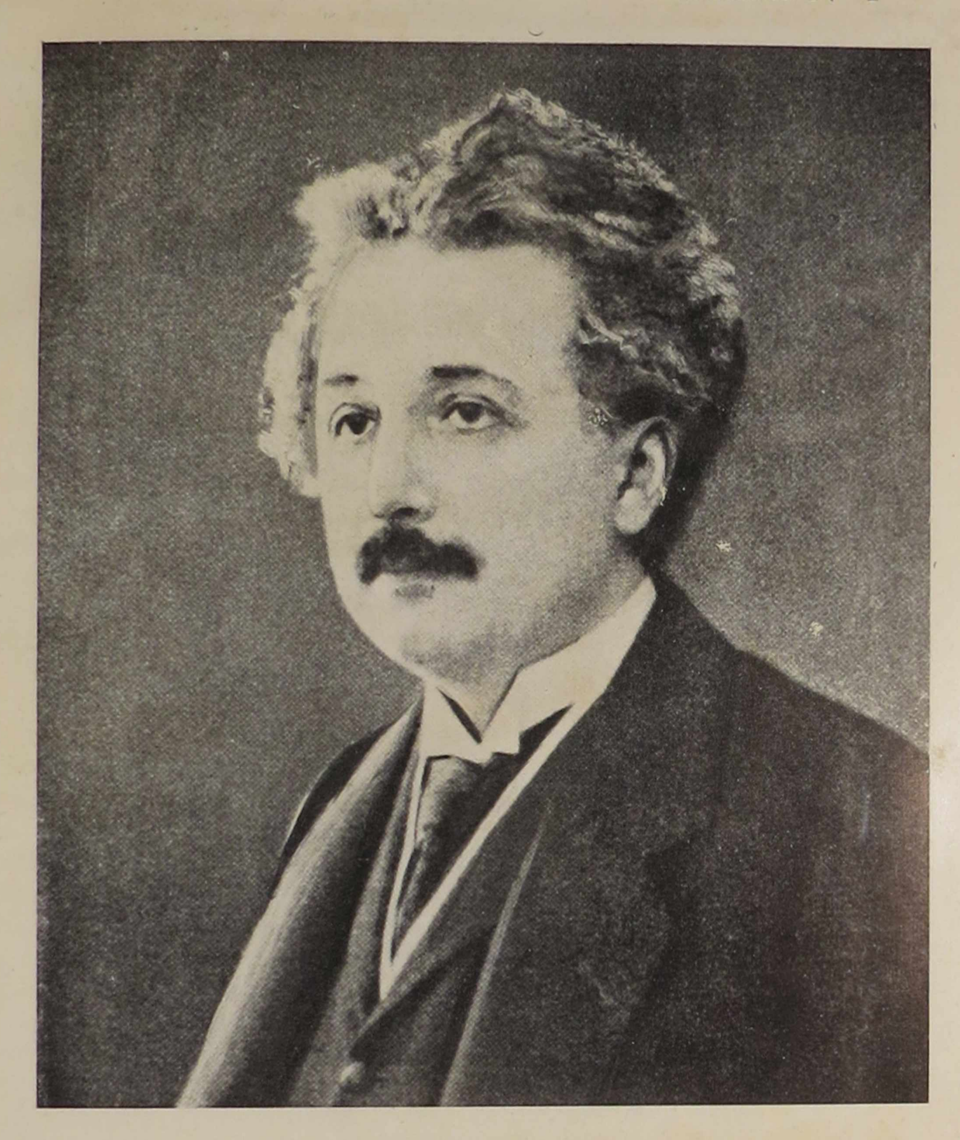
ban, de un modo concluyente, que un sistema de referencia vinculado a la Tierra no es un sistema inercial y que, en cambio, lo es un sistema vinculado a las estrellas fijas.

Destaquemos que las leyes de la dinámica de Newton son válidas únicamente cuando los movimientos se refieren a un sistema inercial; en concreto, al sistema de las estrellas fijas. Para sistemas vinculados a la superficie de la Tierra esas leyes son sólo aproximadas y si en la mayoría de las aplicaciones pueden las mismas ser utilizadas, aun refiriendo los movimientos a sistemas terrestres, ello se debe a que la velocidad angular de la Tierra, respecto de las estrellas, es muy pequeña.

De acuerdo con lo dicho, para convertir nuestra mesa de billar, situada en el Polo, en un sistema inercial, sería necesario hacer que la misma girara, respecto del suelo, con una velocidad angular igual a la de las estrellas y siguiendo a éstas en su movimiento. Sobre esa mesa rotatoria, que en el Polo debería dar una vuelta completa en 24 horas (siderales), las bolas abandonadas a sí mismas se moverían, respecto de las barandas, con un movimiento rigurosamente rectilíneo y uniforme, puesto que también suponemos que el rozamiento es nulo. Pero con todo esto, sobre nuestra mesa ideal y rotatoria, sólo podríamos verificar el principio de inercia en cuerpos que se mueven sobre la misma y, por lo tanto, horizontalmente. La mesa del ejemplo sirve para anular el peso de los cuerpos que se sitúen sobre ella. Si consideramos que un sistema inercial es aquel respecto del cual se cumple realmente el principio de inercia: trayectoria rectilínea y movimiento uniforme para todo cuerpo abandonado a sí mismo, será necesario suponer que en un sistema tal no actúa fuerza gravitatoria alguna. Por esta razón, nuestro "campo de experimentación" debería ser, preferiblemente, una región suficientemente alejada del Sol y de las demás estrellas hasta el punto de que se pueda suponer que la acción gravitatoria es en ella absolutamente despreciable. Una región así recibe el nombre de *región galileana.* A una distancia de un año-luz del Sol, por ejemplo, el campo gravitatorio solar sería tan pequeño, que un cuerpo, inicialmente en reposo respecto del Sol, se aproximaría al mismo sólo un centímetro durante las diez primeras horas de caída.

Si pensamos, pues, en algo así como una caja situada en una región galileana y en reposo respecto del conjunto de las estrellas (sobre todo sin girar respecto de las mismas), el sistema constituído por dicha caja sería un sistema inercial.

Cuando se dice que un sistema de referencia vinculado a la Tierra no es un sistema inercial, y que, por lo tanto, con respecto a la misma, deja de ser válida la mecánica de Newton, se piensa que las diferencias deberán ser siempre muy pequeñas. Pero no es así. Si se colocara un cuerpo en el plano del ecuador y a una distancia del centro de la Tierra igual a 6,6 radios



A. Einstein (14/3/1879 - 18/4/1955).

terrestres, y *en reposo con respecto a la Tierra*, sobre ese cuerpo (que se vería como un satélite y que no se apartaría ni un ápice del meridiano de determinado lugar) la acción de la gravedad parecería ser totalmente nula. Para explicar esto con la mecánica newtoniana *es necesario* recurrir al sistema de las estrellas fijas, respecto del cual el cuerpo giraría alrededor de la Tierra y en sentido directo en 24 horas siderales, anulándose la atracción terrestre por la acción de la fuerza centrífuga. Pero con respecto a la Tierra el cuerpo estaría en reposo y su peso, en forma inexplicable, sería nulo *.

3. **Ecuaciones de transformación de Galileo.** — Si la caja de la región galileana mencionada en el párrafo precedente fuera la representada en la fig. 1, para indicar la posición de un punto respecto de la misma, podríamos utilizar un sistema de coordenadas cartesianas cuyos ejes podrían ser, por ejemplo, las tres aristas que parten de un mismo vértice.

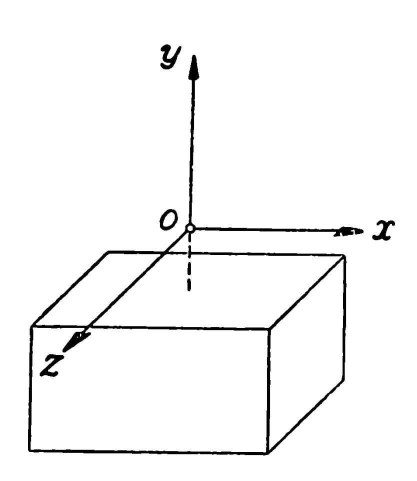


Fig. 1. — Sistema de coordenadas.

Pero también podremos elegir como ejes un sistema tal como el O $x\ y\ z$, cuyo origen O esté situado fuera de la caja, con tal de suponer que dicho origen y los ejes $x\ y\ z$ se mantienen inmóviles con respecto a la caja misma. También es evidente que podremos orientar nuestro sistema de coordenadas en la forma que nos parezca más conveniente. Al sistema inercial de referencia O $x\ y\ z$ lo llamaremos sistema S.

Sea ahora otro sistema S′ (si se quiere otra caja) que se traslada respecto de S con movimiento rectilíneo y uniforme. Tomaremos el eje x del sistema S en coincidencia con la recta según la cual se traslada el sistema S′ y supondremos que en el instante cero los orígenes O y O′ de ambos sistemas coinciden. Además, haremos que el eje x' del sistema S′ coincida con el eje x del sistema S y los ejes y' y z' de S′ los tomaremos paralelos a los ejes $y\ z$ de S. De este modo, si las coordenadas del punto P en el sistema S son, en el instante, t, $x\ y\ z$, sus

* Para calcular los datos del ejemplo basta igualar la atracción newtoniana a la fuerza centrífuga y si se hace el período de revolución igual a 24 horas siderales (86 164 segundos) y se toma para la aceleración de la gravedad el valor 9,80 m/seg² y para el radio de la Tierra 6 370 kilómetros, resulta que el radio de la órbita circular del satélite sería igual a 6,614 radios terrestres.

coordenadas referidas al sistema S′ serán, en el mismo instante (fig. 2):

[1] $$x' = x - vt \quad ; \quad y' = y \quad ; \quad z' = z$$

si v es la velocidad de traslación de S′ con respecto a S. Al establecer las fórmulas precedentes se ha supuesto que los observadores de ambos sistemas emplean la misma unidad de medida y que utilizan también relojes idénticos y perfectamente sincronizados. Por lo tanto, el tiempo t' del sistema S′ es igual al tiempo t del sistema S:

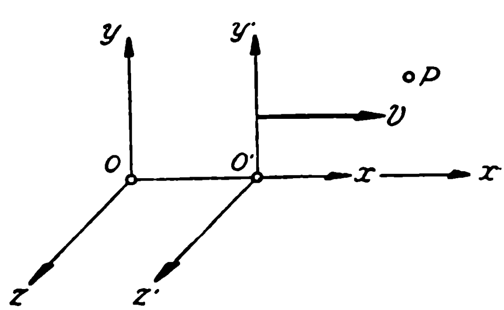


Fig. 2. — Traslación de un sistema respecto de otro.

[1′] $$t' = t.$$

Las ecuaciones [1] y [1′] reciben el nombre de ecuaciones de transformación de Galileo porque traducen en fórmulas sus ideas, aunque el propio Galileo no las reconocería como suyas, ya que sólo poco tiempo antes de morir tuvo noticias de que "un matemático francés llamado DESCARTES había inventado una geometría algebraica".

Hemos dicho que el sistema S es un sistema inercial, lo que significa que, con respecto al mismo, valen las fórmulas de la dinámica newtoniana:

[2] $$X = m\frac{d^2x}{dt^2} \quad ; \quad Y = m\frac{d^2y}{dt^2} \quad ; \quad Z = m\frac{d^2z}{dt^2} \quad ;$$

si m es la masa de una partícula y X, Y, Z las componentes de la fuerza que actúa sobre la misma. De acuerdo con las ecuaciones de transformación [1] y [1′], se ve de inmediato que la aceleración de la partícula es exactamente la misma, tanto medida desde S como desde S′:

[3] $$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt'^2} \quad ; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y'}{dt'^2} \quad ; \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z'}{dt'^2} \quad ;$$

o sea la aceleración *es invariante* respecto de la transformación de Galileo, y como se admite también que la fuerza y la masa son invariantes, o sea:

[4] $$X = X' \quad ; \quad Y = Y' \quad ; \quad Z = Z' \quad ; \quad m = m' \quad ;$$

resulta que, respecto de S′ valen las relaciones:

[5] $$X' = m'\frac{d^2x'}{dt'^2} \quad ; \quad Y' = m'\frac{d^2y'}{dt'^2} \quad ; \quad Z' = m'\frac{d^2z'}{dt'^2} \, .$$

En ambos sistemas vale, entonces, que la fuerza es igual a la masa por la aceleración, resultando así que *si S es un sistema inercial, también lo es cualquier otro sistema que se traslade, respecto de S, con movimiento rectilíneo y uniforme.* Éste es el enunciado del "principio de relatividad de la mecánica clásica" que, por poderse obtener deductivamente a partir del principio de masa y de consideraciones "por demás evidentes", como parecen ser las expresiones [1] y [1′] y las [4], no se le suele dar, en general, el carácter de principio o postulado básico fundamental.

Si en ambos sistemas S y S′ se cumplen exactamente las mismas leyes, no hay manera de discernir experimentalmente si es S′ que se traslada respecto de S ó S que se traslada respecto de S′. Los observadores del sistema S′ pueden suponerse en reposo con el mismo derecho que los observadores de S: Para S′ es S que se traslada sobre el eje x' con la velocidad $-v$. Las ecuaciones que permiten pasar de las medidas efectuadas en S′ a las efectuadas en S, son:

[1″] $$x = x' + vt' \quad ; \quad y = y' \quad ; \quad z = z' \quad ; \quad t = t'.$$

Si en una región galileana se considera un conjunto de sistemas que se trasladan, sin girar, unos respecto de los otros, con movimiento rectilíneo y uniforme, en todos ellos se cumple la misma ley: $F = ma$ (fuerza igual masa por aceleración), por lo cual todos los sistemas son equivalentes para la expresión de las leyes de la mecánica. No existe, en consecuencia, ningún sistema privilegiado respecto del cual las leyes adopten una forma particularmente simple. Los sistemas inerciales, en cambio, son privilegiados respecto de otros sistemas en rotación o acelerados, pues, en estos últimos, las leyes mecánicas resultan más complicadas.

Justamente a causa de que en los sistemas acelerados las leyes son diferentes a las de los sistemas inerciales, es posible revelar esa aceleración mediante experimentos internos como el del péndulo de Foucault.

Pero si es cierto el principio de relatividad, resulta absurdo pretender revelar mediante experimentos mecánicos (péndulos, resortes, etc.) una traslación uniforme y rectilínea.

4. Composición de velocidades. — Si respecto de S′ un punto se mueve de tal modo que

[6] $$\begin{aligned} x' &= a + V'_x t' \quad ; \\ y' &= b + V'_y t' \quad ; \\ z' &= c + V'_z t' \quad ; \end{aligned}$$

donde a, b, c son constantes que representan las coordenadas iniciales del punto y V'_x, V'_y, V'_z las componentes constantes

de su velocidad según los tres ejes, en el sistema S se tendrá, de acuerdo con [1′] y [6]:

[7]
$$x = a + (V'_x + v)t \quad ; \qquad y = b + V'_y t \quad ; \qquad z = c + V'_z t \quad ;$$

por lo cual, las componentes de la velocidad V del punto, referidas al sistema S, son:

[8]
$$V_x = V'_x + v \quad ; \quad V_y = V'_y \quad ; \quad V_z = V'_z .$$

En particular, si $V'_y = V'_z = 0$; y $V'_x = V'$, resulta para la velocidad resultante V:

[9]
$$V = v + V'.$$

El cálculo de la ecuación de la trayectoria en un sistema, cuando se conoce su ecuación en el otro, es también inmediato. En el caso precedente se ve que si el punto recorre una recta en S′ con velocidad constante, también será rectilíneo y uniforme su movimiento respecto de S.

Si en S′ un punto se moviera sobre el eje y' con movimiento uniformemente acelerado:

$$y' = \tfrac{1}{2}gt'^2 \quad ; \quad x' = z' = 0 \quad ;$$

respecto de S describiría la parábola

$$x = vt \quad ; \quad y = \tfrac{1}{2}gt^2 .$$

Destaquemos, finalmente, que en la mecánica clásica sólo se *relativizan* los conceptos de velocidad y trayectoria, pues, con respecto a las fórmulas de transformación de Galileo, resultan invariantes, y gozan, por lo tanto, de un *carácter absoluto*, independiente del sistema de referencia, la *aceleración*, la *masa*, la *fuerza* y, lo que es más importante, *la distancia espacial entre dos puntos y el intervalo de tiempo que separa dos acontecimientos.*

5. **¿Satisfacen todas las leyes de la física al principio de relatividad?** — El principio de relatividad aparece en la física como un principio de mecánica y son precisamente las leyes de la mecánica las que conservan su forma en todos los sistemas que se trasladan, unos respecto de los otros, con movimiento rectilíneo y uniforme. Esto se expresa más brevemente diciendo que las leyes de la mecánica son *covariantes* respecto de las fórmulas de transformación de Galileo. (Compárense las [2] y las [5]). *A priori* no puede saberse si las leyes fundamentales del electromagnetismo o de la óptica gozarán o no de la misma propiedad.

A mediados del siglo pasado surgieron serias dudas acerca de la validez general del principio de relatividad y llegó a con-

siderarse que éste era válido únicamente en el dominio de la mecánica. Según esto, estaría totalmente descartada la posibilidad de revelar mecánicamente, utilizando, por ejemplo, péndulos y resortes, si es el barco del ejemplo de Galileo el que "realmente" se mueve o si es la ribera. En uno y otro sistema, los resultados de los experimentos mecánicos serían exactamente los mismos.

Pero se llegó a creer que si se efectuaran cuidadosos experimentos eléctricos u ópticos en el interior del barco, los resultados serían ligeramente diferentes a los que se obtendrían experimentando en un laboratorio fijo en la orilla. La razón de que se llegara a pensar tal cosa tiene su raíz en el hecho de que *se consideraba que la expresión fiel del principio de relatividad eran las ecuaciones de transformación de Galileo.*

En las leyes del electromagnetismo, y naturalmente, en las de la óptica, figura como una magnitud fundamental, la velocidad de la luz. Si se aceptan las ecuaciones de Galileo, deberá aceptarse que dicha velocidad es variable de sistema a sistema, y, en un sistema dado, la misma dependería todavía de la dirección. Se llegó así a pensar que tendría que haber un sistema de referencia respecto del cual las leyes ópticas y eléctricas serían particularmente simples. En ese sistema —y sólo en él— la luz se propagaría con igual velocidad en todas direcciones. Designemos con S_0 a ese hipotético sistema privilegiado, en el cual la velocidad de la luz en el vacío es c, cualquiera sea la dirección que se considere. En un sistema S, que se mueva respecto de S_0 con la velocidad v, se tendría que observar que en la dirección de v la luz se propaga, en un sentido, con la velocidad $c+v$ y en el sentido opuesto con $c-v$. En las demás direcciones se obtendrían, para la velocidad de la luz, valores comprendidos entre ambos extremos y que se calculan fácilmente aplicando la regla del paralelogramo de la composición de velocidades. Por lo tanto, parece ser posible la determinación de la velocidad de un sistema, con respecto al sistema S_0, con sólo medir cuidadosamente la velocidad de la luz en diferentes direcciones. Claro está que a ese sistema S_0 se le podría considerar en reposo absoluto, y al determinar la velocidad v de un sistema S respecto de S_0, se determinaría de ese modo la velocidad absoluta de S. El comportamiento óptico o eléctrico de los diferentes sistemas dependería de la velocidad absoluta de los mismos, o sea de su velocidad con respecto a S_0 y, claro está, que diversos sistemas S, en traslación rectilínea y uniforme, unos respecto de los otros, no serían equivalentes entre sí. El principio de relatividad se encontraba, pues, en plena crisis.

Sin embargo, un físico de la segunda mitad del siglo pasado podría haberse expresado en la forma siguiente: Si en un día de calma, en el cual no corre ni la más ligera brisa, se me vuela el sombrero al viajar en un vehículo descubierto, no por ello

pensaré que el principio de relatividad deja de ser válido. Nada más fácil que determinar mediante un molinete de viento la velocidad relativa del vehículo con respecto al aire atmosférico. Con ello no se determina la velocidad absoluta del sistema, sino tan sólo su velocidad con respecto al aire. Claro está que únicamente en un sistema que se encontrara en reposo respecto del aire atmosférico, la velocidad del sonido sería igual en todas direcciones. Ese sistema respecto del cual el aire permanece en reposo sería para la acústica, indudablemente, un sistema privilegiado, pero no por ello se tendría el derecho de afirmar que ese sistema se encuentra en "reposo absoluto". Y nuestro físico podría continuar de la siguiente manera: En el vacío más perfecto que podemos imaginar se propagan ondas electromagnéticas; una región del espacio totalmente desprovista de materia puede ser el asiento de un intenso campo eléctrico o magnético. ¿Qué diferencia hay entre una región donde el campo es intenso y otra donde el campo es nulo? Debe haber *algo* que pueda servir de asiento a los campos eléctricos y magnéticos. Quizá ese algo sea también el responsable de los campos gravitatorios. Pero parece indudable que si el campo de determinado lugar varía, no podrán atribuirse esas modificaciones a la nada. Así como las vibraciones elásticas se propagan en el aire en forma de ondas sonoras, las ondas electromagnéticas y, por lo tanto, la luz, deben tener su asiento en algún medio. Y a ese algo que llena totalmente los espacios intersiderales e interatómicos lo llamamos *éter*. Que este éter no es una sustancia de orden común es indudable: ni los planetas ni las moléculas de los gases encuentran resistencia alguna en su movimiento, pero, a pesar de ello —continúa nuestro físico—, no se trata de ningún ente metafísico desde el momento que, en principio, su presencia puede ser revelada experimentalmente. En efecto: las ecuaciones fundamentales del electromagnetismo, las ecuaciones de Maxwell, tienen una forma particularmente simple si se las refiere a un sistema que está en reposo respecto del éter, pero cambia la forma de aquéllas si, *aplicando las ecuaciones de transformación de Galileo,* se las refiere a otro sistema que se traslada en línea recta y con movimiento uniforme respecto del primero.

Esto permitirá determinar, mediante experimentos ópticos o electromagnéticos, la velocidad de cualquier sistema con respecto al éter.

Claro está que diversos sistemas en traslación rectilínea y uniforme, unos respecto de los otros, no son equivalentes entre sí, pero su diferencia de comportamiento se puede explicar en cada caso por el *viento de éter* que actúa sobre cada sistema.

Observemos ahora por nuestra cuenta que la analogía entre el "viento de éter" y el "viento de aire" es engañosa, porque el viento de éter no puede ser detenido mediante ninguna pan-

talla ni existen tampoco abanicos apropiados para producir corrientes de esa "substancia". En resumen, podremos sintetizar el pensamiento de los físicos de la segunda mitad del siglo pasado del modo siguiente:

1) Existe un sistema privilegiado S_0 (éter en reposo), respecto del cual las leyes del electromagnetismo y de la óptica son particularmente simples. En ese sistema y sólo en ése, la luz se propaga en el vacío con una velocidad que no depende de la dirección.

2) Diversos sistemas que se trasladen en línea recta y con movimiento uniforme respecto de S_0, se comportan todos ellos de un modo diferente, pues su comportamiento depende de su velocidad, por lo cual dichos sistemas no son, en general, equivalentes entre sí. El principio de relatividad clásico vale únicamente para la mecánica, pero no para toda la física.

3) Es posible determinar la velocidad de un sistema S, que se traslada con movimiento uniforme respecto de S_0, mediante experimentos ópticos o electromagnéticos llevados a cabo en el interior de S.

4) Si se conocen las leyes simples que rigen en S_0, se encuentra la forma correspondiente de las mismas —en general distinta— respecto de un sistema S que se traslade con movimiento uniforme respecto de S_0, aplicando las fórmulas de transformación de Galileo.

6. **El fenómeno astronómico de la aberración de la luz.** — El astrónomo inglés JAMES BRADLEY descubrió en 1725 el fenómeno de la aberración de la luz, a causa del cual se ve describir a todas las estrellas del cielo, en el término de un año, pequeñas elipses cuyo eje mayor tiene, para todas ellas, una amplitud angular de 41″.

La amplitud angular del eje menor es igual a $41'' \times \operatorname{sen} \theta$, siendo θ la latitud celeste de la estrella. Por esta razón, las estrellas situadas cerca del polo de la eclíptica ($\theta = 90°$) describen circunferencias y su declinación varía en unos 40″ por año. El eje mayor de todas las elipses es paralelo al plano de la eclíptica, y para las estrellas situadas en este plano, la elipse de aberración aparece completamente achatada, moviéndose la estrella como un péndulo sobre un pequeño arco de 41″, que recorre en ambos sentidos de extremo a extremo en el término de un año.

El mismo Bradley consiguió dar, en 1728, la explicación de este fenómeno, que resulta de componer vectorialmente la velocidad de la luz con la velocidad de la Tierra en su movimiento de traslación alrededor del Sol. Comenzaremos por suponer que

la estrella E (fig. 3) se encuentra en el plano de la eclíptica y que desde el Sol S se la vería constantemente en la dirección SE. Supondremos, además, que el Sol se halla en reposo respecto del éter, que es el medio en el cual viaja la luz. La Tierra T, en cambio, describe una órbita aproximadamente circular, de radio igual a 150 millones de kilómetros, en el término de un año. Su velocidad de traslación resulta ser así, aproximadamente, igual a 30 km/seg. Cuando la Tierra pasa por T_1 teniendo la velocidad v, para nosotros, observadores fijos en la Tierra, todo ocurre como si el otro sistema, el fijo en el Sol, el del éter, se moviera en sentido opuesto con la velocidad $-v$. Si representamos la velocidad de la luz, en el éter, por el vector c, la composición de ese vector con el $-v$ nos da el vector V y en esa dirección veremos a la estrella E. El ángulo α de aberración es tal que

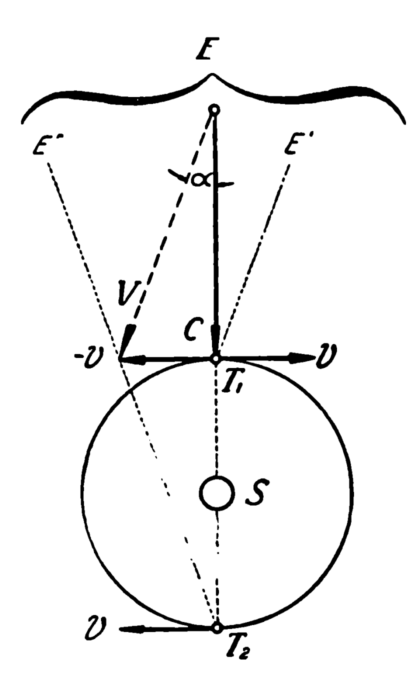


Fig. 3. — El fenómeno astronómico de la aberración de la luz.

[10] $$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{c} .$$

Reemplazando v y c por sus valores aproximados, resulta:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3 \times 10 \text{ km/seg}}{3 \times 10^5 \text{ km/seg}} = 10^{-4}$$

que corresponde a un ángulo de 20″40. El valor observado de la constante de aberración es $\alpha = 20''47$, cuyo doble es casi igual a 41″.

En esta explicación se supone que el rayo de luz no es arrastrado por el movimiento de la Tierra. Para comprender lo que esto significa, consideremos un tren (fig. 4) que se mueva con la velocidad v respecto de la tierra firme. Desde el costado de

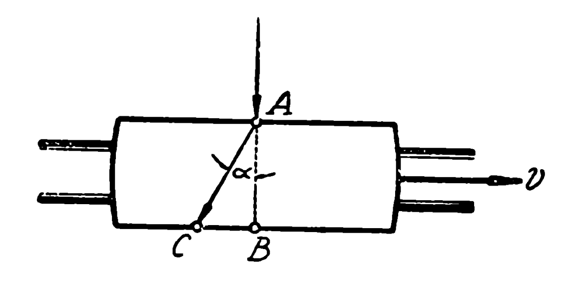


Fig. 4. — Sobre la aberración de la luz.

la vía supondremos que se lanza un proyectil perpendicularmente a la dirección v y, por lo tanto, perpendicular a la pared del vagón. El proyectil hace impacto en el punto A, perfora uno de los cristales del tren y atraviesa el vagón con la velocidad c, medida desde fuera, desde el costado de la vía. Tarda un tiempo t en atravesar el vagón, de tal modo que AB $= ct$. Si el tren estuviera en reposo, *o si el proyectil fuera arrastrado por el tren*, el punto de salida sería B, pero como en el tiempo t el tren avanza un camino CB igual a vt, el proyectil saldrá finalmente por el punto C. La trayectoria real del proyectil *respecto del tren* es AC: en A y en C se encuentran los dos agujeros dejados por la bala. La trayectoria real *respecto de la vía* es AB, y la tangente del ángulo α es v/c. Si quisiéramos que nuestro proyectil pasara por el interior de un tubo fijo en el tren, dicho tubo tendría que colocarse en la dirección AC, del mismo modo que el astrónomo coloca el anteojo en la dirección T_1E' de la fig. 3 para observar a la estrella E. Desde T_2 —suponiendo que desde allí pudiera observarse la estrella E—, el anteojo debería tomar la posición T_2E''.

7. Las fórmulas clásicas de la aberración de la luz. — Sea O el origen de un sistema S_0 de coordenadas x, y, z en reposo respecto del éter (fig. 5), y O′ el origen del sistema S′ que se traslada respecto de S_0 con la velocidad v en la dirección del eje x. Consideremos que en el instante cero los orígenes O y O′ coinciden. La figura representa la posición de ambos sistemas en el instante t, siendo, en consecuencia, OO′ $=$ $= vt$. Supondremos que un rayo de luz se propaga en el sistema S_0 siguiendo la recta OP y que el rayo partió del origen O en el instante $t = 0$, cuando O coincidía con O′. Siendo así, las coordenadas de la "punta" P del rayo en el sistema S_0, en un instante cualquiera t, serán:

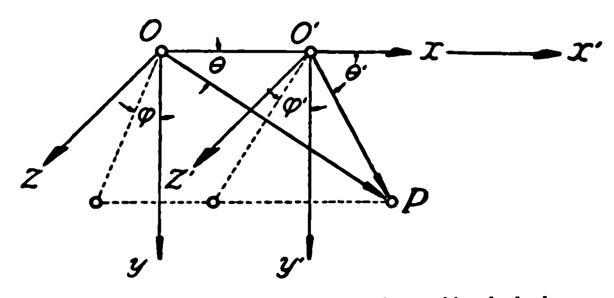


Fig. 5. — Caso general de la aberración de la luz.

$$x = c \cos\theta \, . \, t \quad ;$$
[11] $$y = c \operatorname{sen}\theta \, . \cos\varphi \, . \, t \quad ;$$
$$z = c \operatorname{sen}\theta \, . \operatorname{sen}\varphi \, . \, t \; .$$

En estas fórmulas, θ representa el ángulo formado por la dirección del rayo y el eje x, que coincide con la dirección de la velocidad v del sistema S′. θ es, pues, el ángulo formado por

los vectores c y v, siendo φ el ángulo diedro formado por el plano cv y el plano xOy. Respecto del sistema S', el rayo se propaga según la recta O'P, que forma con el eje X' el ángulo θ'. Para encontrar en todo momento las coordenadas $x'y'z'$ de la punta del rayo respecto del sistema S', aplicamos las ecuaciones de Galileo [1] y obtenemos:

$$[12] \quad \begin{aligned} x' &= c\cos\theta\,.\,t - vt \\ y' &= c\,\mathrm{sen}\,\theta\,.\,\cos\varphi\,.\,t \\ z' &= c\,\mathrm{sen}\,\theta\,.\,\mathrm{sen}\,\varphi\,.\,t \end{aligned}$$

y de aquí la velocidad V del rayo respecto de S' será tal que:

$$[13] \quad V^2 = \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{t^2} = c^2 + v^2 - 2cv\cos\theta \quad ,$$

valor que también puede obtenerse de inmediato considerando el triángulo OO'P. Las ecuaciones [12] muestran que, respecto de S', el rayo sigue también una línea recta que pasa por el origen, pues para $t = 0$ es $x' = y' = z' = 0$. Podremos, entonces, escribir las ecuaciones que dan en todo momento las coordenadas de la punta del rayo en el sistema S' del modo siguiente:

$$[14] \quad \begin{aligned} x' &= V\cos\theta'\,.\,t \\ y' &= V\,\mathrm{sen}\,\theta'\,.\,\cos\varphi'\,.\,t \\ z' &= V\,\mathrm{sen}\,\theta'\,.\,\mathrm{sen}\,\varphi'\,.\,t \end{aligned}$$

introduciendo los ángulos θ' y φ' que, respecto de S', representan lo mismo que los ángulos θ y φ respecto de S.

Dividiendo las dos últimas ecuaciones de [14] se obtiene, considerando también las [11] y teniendo en cuenta [1]:

$$[15] \quad \mathrm{tg}\,\varphi' = \frac{z'}{y'} = \frac{z}{y} = \mathrm{tg}\,\varphi \quad ,$$

de donde se deduce que el "azimut" φ es igual en los dos sistemas.

Para el ángulo θ' tenemos, por las primeras de [14] y [12]:

$$\cos\theta' = \frac{x'}{Vt} = \frac{c\cos\theta\,.\,t - vt}{Vt}$$

que teniendo en cuenta [13], puede escribirse:

$$[16] \quad \cos\theta' = \frac{c\cos\theta - v}{\sqrt{c^2 + v^2 - 2cv\cos\theta}} \,.$$

Para el seno del mismo ángulo resulta:

$$\mathrm{sen}\,\theta' = \frac{y'}{V\cos\varphi'\,.\,t} = \frac{y}{V\cos\varphi\,.\,t} = \frac{c\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi\,.\,t}{V\cos\varphi\,.\,t}$$

o sea

$$[17] \qquad \operatorname{sen}\theta' = \frac{c \operatorname{sen}\theta}{\sqrt{c^2 + v^2 - 2cv\cos\theta}}.$$

Si utilizando [16] y [17] se calcula la tangente de $\theta' - \theta$, se obtiene:

$$[18] \qquad \operatorname{tg}(\theta' - \theta) = \frac{\frac{v}{c}\operatorname{sen}\theta}{1 - \frac{v}{c}\cos\theta}.$$

Para el caso particular en que sea $\theta = \pi/2$, resulta:

$$[19] \quad \operatorname{tg}(\theta' - \theta) = \operatorname{tg}\alpha = \frac{v}{c}$$

que coincide con la [10].

La fórmula [18] puede obtenerse de inmediato considerando el triángulo OO'P (fig. 6). Siendo O'Q perpendicular a OP, se tiene:

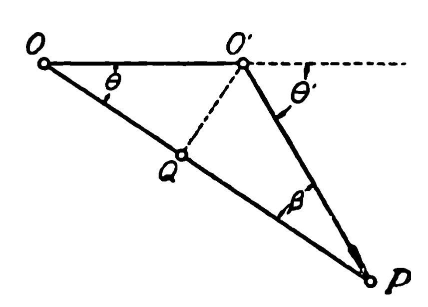


Fig. 6. — Determinación del ángulo de aberración.

$$[20] \qquad \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\theta' - \theta) = \frac{O'Q}{QP}$$

y como es

$$O'Q = OO' \operatorname{sen}\theta = vt \operatorname{sen}\theta$$
$$QP = OP - OQ = ct - vt\cos\theta$$

llevando estos valores a la [20], se obtiene efectivamente la [18].

Dada la pequeñez de v/c, en todos los casos prácticos puede sustituirse la tangente por el arco y despreciando los términos en que figuren potencias de v/c de grado superior al primero, la [18] puede escribirse:

$$[21] \qquad \beta = \frac{v}{c}\operatorname{sen}\theta = \alpha \,.\operatorname{sen}\theta$$

siendo α el ángulo que llamaremos de *aberración principal* y que corresponde al caso en que el rayo de luz se propaga, en el éter, perpendicularmente a la velocidad v del sistema S'.

En la demostración clásica que precede podría decirse que OP es la *trayectoria real* del rayo, en tanto que la O'P sería tan sólo su *trayectoria aparente*.

8. Las elipses de aberración. — Tomemos un sistema de coordenadas con origen en el Sol y hagamos coincidir el plano xy con el plano de la eclíptica, de tal modo, que el eje z coincida con el eje de la eclíptica. En la fig. 7 se ha supuesto al polo sur de la eclíptica en la dirección de las z positivas. Hagamos, además, que el plano xz pase por la estrella E que se considera, o sea el plano xz coincide con el círculo de longitud de la estrella E. Se supone, además, que el Sol está en reposo

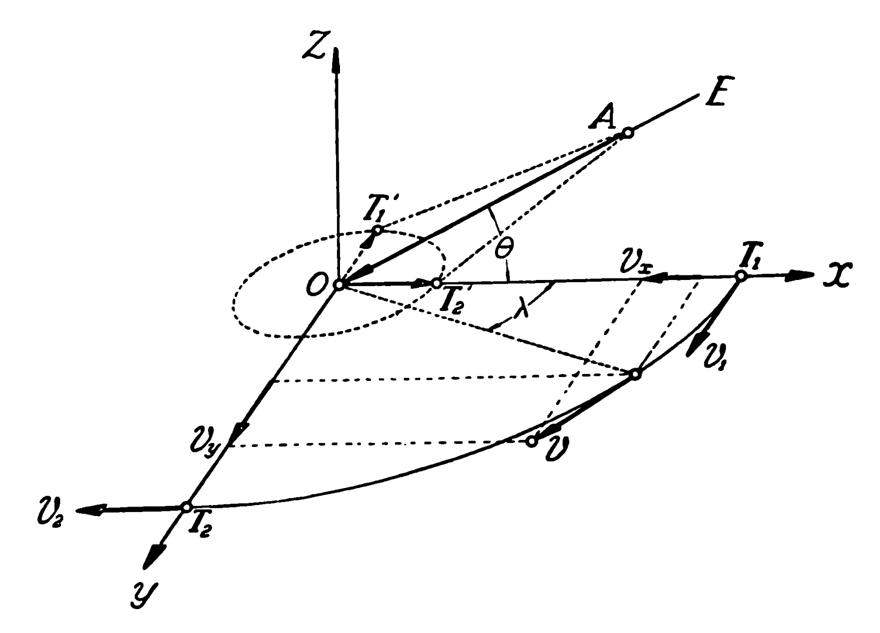


Fig. 7. — Las elipses de aberración.

con respecto al éter, de tal modo, que nuestro sistema se encontrará también en reposo respecto del mismo. Supondremos que la órbita de la Tierra es circular y el movimiento de la misma, que se efectúa de T_1 a T_2, uniforme. Desde el centro O de nuestro sistema se verá a la estrella E constantemente en la dirección OE, que forma con el plano de la eclíptica el ángulo θ. Este ángulo es, pues, la latitud celeste de la estrella. Si queremos averiguar en qué dirección se verá la estrella desde la Tierra cuando ésta pasa por T_1 con la velocidad v_1, tomamos, a partir de O, un vector igual y paralelo al v_1, pero de sentido opuesto: OT'_1. Si con el vector AO representamos a la velocidad c de la luz, la composición de los vectores AO y OT'_1 nos da el vector AT'_1 y en esa dirección se verá a la estrella E cuando la Tierra pase por T_1. Si procedemos del mismo modo para todos los puntos de la órbita, los vectores que a partir de O representan la velocidad de la Tierra en cada instante (pero de sentido opuesto), estarán todos contenidos en el plano de la

eclíptica y sus extremos se dispondrán sobre una circunferencia de radio v. Las generatrices del cono oblicuo, cuya base es esta circunferencia y cuyo vértice está en A ($AO = c$), dan las direcciones en que se verá la estrella E a medida que la Tierra recorre su órbita. En el trayecto de la Tierra de T_1 a T_2, se verá a la estrella en las direcciones individualizadas por el punto A y los puntos del arco de la circunferencia que va de T'_1 a T'_2. La sección del cono de vértice A con la esfera celeste, da la elipse de aberración que la estrella recorre en un año. Naturalmente que podríamos haber considerado al vector c con su origen en O; lo ubicamos en A para hacer más clara la figura.

Veamos ahora cuál es la posición en que se observará a la estrella cuando la Tierra pasa por un punto T cualquiera de su órbita. Si indicamos con λ la diferencia entre las longitudes heliocéntricas de la estrella y la Tierra, las componentes v_x y v_y de su velocidad serán:

$$[22] \qquad v_x = -v \operatorname{sen} \lambda \quad ; \quad v_y = v \cos \lambda .$$

El vector igual y paralelo a v, trazado desde O pero en sentido opuesto (no representado en la figura), tiene entonces por componentes

$$[23] \qquad v'_x = v \operatorname{sen} \lambda \quad ; \quad v'_y = -v \cos \lambda .$$

La componente v'_y es perpendicular al rayo AO y origina un desplazamiento angular ξ, sobre el paralelo celeste que pasa por la estrella, dado por la expresión:

$$[24] \qquad \xi = \frac{v'_y}{c} = -\frac{v}{c} \cos \lambda .$$

La componente v'_x, que forma con la dirección del rayo un ángulo θ, produce un desplazamiento angular η sobre el círculo de longitud que pasa por la estrella, dado, de acuerdo con [21], por:

$$[25] \qquad \eta = \frac{v'_x}{c} \operatorname{sen} \theta = \frac{v}{c} \operatorname{sen} \lambda \operatorname{sen} \theta .$$

Elevando al cuadrado la [24] y la [25] y sumando, obtenemos, después de designar por α al cociente v/c:

$$[26] \qquad \frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\alpha^2 \operatorname{sen}^2 \theta} = 1 \quad ,$$

que es una elipse cuyo eje mayor es α y su eje menor $\alpha \operatorname{sen} \theta$, siendo θ la latitud celeste de la estrella.

9. ¿Influye en la aberración astronómica una posible traslación del sistema solar? — En los razonamientos que preceden hemos tomado a nuestro sistema de referencia en reposo res-

pecto del Sol y hemos supuesto que un sistema así está también en reposo respecto del éter. Por eso podríamos considerar que la velocidad c de la luz era igual en todas direcciones. Si todo el sistema solar se traslada en cierta dirección fija con una velocidad constante u respecto del éter, la dirección de los rayos de luz se obtendría, en cada caso, componiendo tres vectores: c, u y v. La traslación u produciría en cada estrella un desplazamiento constante que sería máximo en el plano perpendicular a la dirección u y cero en los polos de ese plano. Estos desplazamientos constantes para cada estrella serían, en consecuencia, inobservables. Las elipses de aberración se producirían, como antes, a causa de la variación anual de la dirección del vector v. Pero el vector AO de la figura 7 ya no sería para todas las estrellas igual a c. Ese vector AO, que representa la velocidad de la luz de determinada estrella con respecto al sistema solar, tendría valores comprendidos entre $c+u$ y $c-u$. De aquí que la "constante de aberración" que da la amplitud del eje mayor de las elipses no sería rigurosamente constante. Para tener una idea acerca de la magnitud de este efecto —que tendría que producirse de acuerdo con la explicación clásica—, consideremos que todo el sistema solar se traslada con la velocidad u en la dirección del eje de la eclíptica y dirigiéndose hacia el polo sur de la misma. El semieje mayor de las elipses cercanas al polo sur de la eclíptica tendría una amplitud α_1 tal que:

$$\alpha_1 = \frac{v}{c+u} = \frac{v/c}{1+\frac{u}{c}} = \frac{\alpha}{1+\frac{u}{c}}$$

y para las del polo norte

$$\alpha_2 = \frac{\alpha}{1-\frac{u}{c}}.$$

La diferencia es, aproximadamente,

$$\alpha_2 - \alpha_1 = 2\alpha\frac{u}{c}.$$

Si se supone $u = 30$ km/seg como $\alpha = 20''5$, dicha diferencia alcanzaría el ínfimo valor de 4 milésimas de segundo. Sólo para velocidades de traslación superiores a los 300 km/seg este efecto podría ser observado. Adelantemos ya desde ahora que, de acuerdo con la teoría de la relatividad, el efecto en cuestión no puede producirse, por grande que sea u con respecto al conjunto de las estrellas fijas.

10. Superficies de onda y aberración de la luz. La simultaneidad absoluta de la física clásica. — El sistema S_0 del "éter en reposo" no sólo sería privilegiado por propagarse en él la luz con igual velocidad en todas direcciones, sino también por ser *el único sistema respecto del cual, en todos los casos, la superficie de onda es perpendicular a la dirección de propagación.* Supongamos (fig. 8) que del punto O fijo en el éter, parten en el instante $t = 0$ rayos de luz en todas direcciones. Al cabo de un tiempo t serán alcanzados por la luz todos los puntos de una superficie esférica de radio igual a ct. Esta superficie constituye el frente de onda y según la teoría ondulatoria, todos los puntos de la misma se encuentran en igualdad de fase.

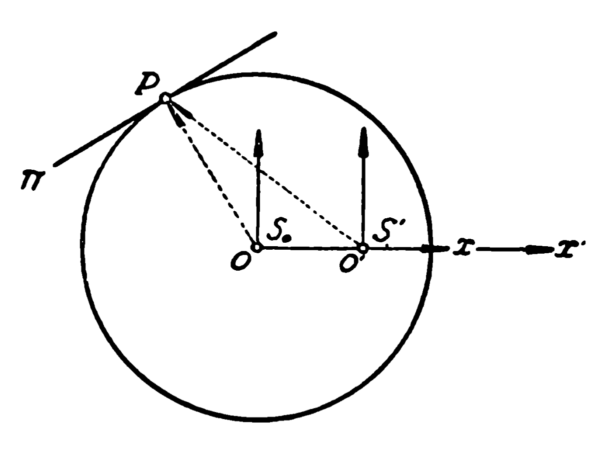


Fig. 8. — Sólo con respecto al éter la superficie de onda sería perpendicular al rayo.

La dirección de propagación del proceso luminoso está dada por los radios que parten de O, siendo entonces, en todas partes, la dirección de propagación de la luz OP, perpendicular a la superficie de onda π. Consideremos ahora que un sistema S′ se mueve en el sentido positivo del eje x con cierta velocidad v respecto de S_0, que es el sistema del éter en reposo, y admitamos que en el instante $t = 0$, en que comenzó a propagarse la luz, el origen O′ de S′ coincidía con el origen O de S. En la figura se ha supuesto que la velocidad v de S′ es igual a $3c/5$. La trayectoria de los rayos de luz respecto de S′ —trayectorias aparentes en lenguaje clásico— serán rectas que pasan por O′ (rectas porque S′ se mueve con movimiento uniforme y las ecuaciones de Galileo son lineales) y, en general, la superficie de onda π no será perpendicular a la dirección de propagación O′P.

Consideremos ahora el caso de una onda plana π que se propaga según la dirección R en el sistema S_0 (fig. 9), por lo cual estas rectas R serán perpendiculares al plano π. Sea ahora un sistema S′ (puede pensarse en un tren en movimiento) que se mueve respecto de S_0 con la velocidad v perpendicularmente a los rayos R. Con respecto a S′ la luz "parece" propagarse, debido justamente al fenómeno de la aberración, en la dirección R′. La superficie de onda, en un instante dado,

sigue siendo el mismo plano π. ¿Por qué? Pues simplemente porque el tiempo de S_0, t, es igual al tiempo de S′, t'. Si la superficie de onda es π, esto quiere decir que dos puntos tales como el A y el B serán alcanzados por la onda al mismo tiempo, *simultáneamente.*

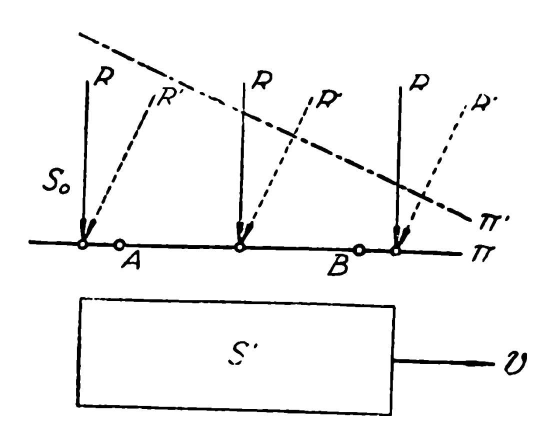


Fig. 9. — Simultaneidad absoluta versus principio de relatividad.

Si supusiéramos por un momento que en el sistema S′ la superficie de onda fuera perpendicular a la dirección R′ de los rayos, o sea que fueran planos paralelos a π′, llegaríamos a la *conclusión* absurda de que los dos acontecimientos de la llegada de la luz a los puntos A y B, simultáneos con respecto a S_0, no lo serían con respecto a S′. Para S′, el acontecimiento B se produciría antes que el A. Como de acuerdo con las ecuaciones de Galileo $t = t'$, si $t_1 - t_2 = 0$, será también $t'_1 - t'_2 = 0$, ó sea: dos acontecimientos simultáneos respecto de un sistema lo son también respecto de cualquier otro. *La simultaneidad es absoluta y esto obliga, necesariamente, a abandonar el principio de relatividad.* El principio de relatividad —equivalencia de todos los sistemas— exige que las leyes de la naturaleza sean idénticas en todos ellos y aquí estamos frente a una sencillísima ley: dirección de propagación de la luz en el vacío perpendicular a la superficie de onda, que se cumple sólo en el sistema privilegiado del éter en reposo y que no vale para los otros sistemas.

Esto que precede puede pensarse que ha sido escrito en el siglo pasado. Entonces podían haber agregado todavía: sólo a un loco podría ocurrírsele suponer que el principio de relatividad vale para la óptica, pues una suposición así implicaría relativizar el concepto de simultaneidad, así como Galileo relativizó los conceptos de velocidad y trayectoria. Pero velocidad y trayectoria son conceptos derivados de espacio y tiempo, en tanto que estos últimos son formas *a priori* de nuestro pensar, que dependen de nuestra constitución mental intrínseca; son, por así decirlo, el molde, el receptáculo, el marco necesario e inmutable dentro del cual debemos buscar un orden para los hechos del mundo exterior.

11. Efecto Doppler. — Consideremos en el sistema S_0 una onda plana π (fig. 10) que se propaga según la dirección OP, que forma un ángulo θ con el eje de las x. El sistema S′, como siempre, se mueve con la velocidad v en el sentido de las x positivas. Los orígenes O y O′ coinciden en el instante $t = 0$, cuando la onda plana ocupa la posición π. Al cabo de un tiempo t, el frente de la onda ocupará la posición representada por

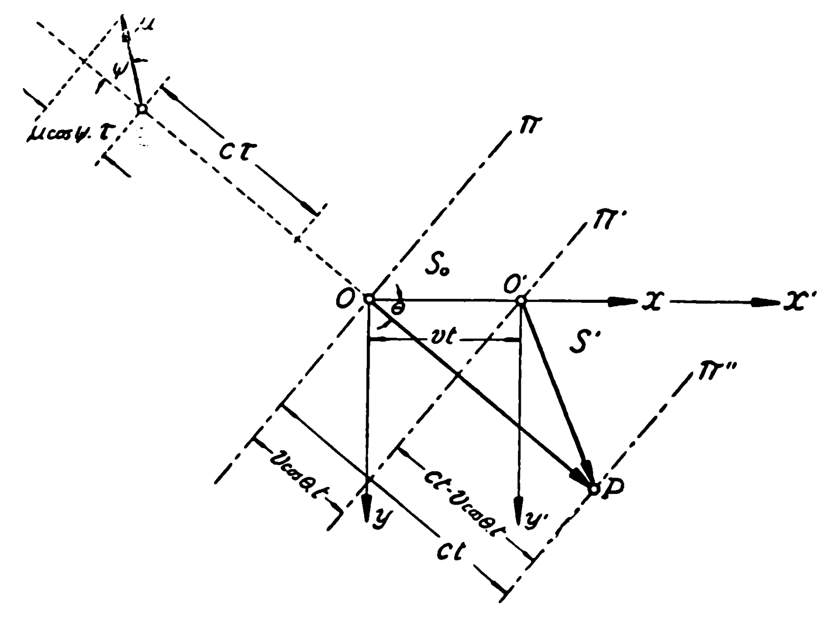


Fig. 10. — Efecto Doppler.

el plano π'' y, entre tanto, el origen O′ se habrá separado de O en una magnitud igual a vt. Tracemos por O′ el plano π' paralelo a π y a π''. En este tiempo t, han pasado por O todas las ondas contenidas entre π y π'' y por O′ sólo las que se encuentran entre π' y π''. Si llamamos ν a la frecuencia observada en el origen O de S_0, y ν' a la que se observa desde O′, origen de S′, se tendrá (obsérvese la figura):

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{ct - v\cos\theta \,.\, t}{ct}$$

o sea:

[27] $$\nu' = \nu\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right).$$

Consideremos ahora que la luz que se recibe en S_0 proviene de una estrella E muy alejada del origen O. Sea ν_0 la frecuencia de la luz emitida por la estrella, o sea: ν_0 es la frecuencia que se observaría desde S_0 si la estrella estuviera en reposo.

Por lo tanto, la longitud de onda λ_0 cuando E está en reposo, es igual a c/ν_0. Pero si la estrella se mueve con la velocidad u, que forma el ángulo ψ con la dirección del rayo, la longitud de onda de la luz emitida ya será otra. En un tiempo τ se efectúan $\nu_0\tau$ vibraciones, que estarán contenidas en una longitud $c\tau + u \cos\psi \,.\, \tau$, por lo cual

$$\lambda = \frac{c\tau + u\cos\psi \,.\, \tau}{\nu_0\tau} \,.$$

Esta longitud de onda es la que se observa desde S_0, por lo cual

$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

de donde

$$\frac{c}{\nu} = \frac{c + u\cos\psi}{\nu_0}$$

o sea

[28] $$\nu = \nu_0 \frac{1}{1 + \frac{u}{c}\cos\psi} \,.$$

Observemos que si ψ es igual a $\pi/2$, que corresponde al caso en que la fuente se mueve perpendicularmente al rayo de luz que recibe el observador fijo, $\nu = \nu_0$, o sea que el *efecto Doppler transversal es nulo.*

Reemplazando [28] en [27], se obtiene:

[29] $$\nu = \nu_0 \frac{1 - \frac{v}{c}\cos\theta}{1 + \frac{u}{c}\cos\psi} \,.$$

La velocidad V de alejamiento entre el observador O′ y la fuente E, es:

[30] $$V = v\cos\theta + u\cos\psi .$$

Si se desarrolla la [29] y se desprecian los términos de grado superior al primero en v/c y en u/c y, por lo tanto, los productos uv/c^2, resulta:

[31] $$\nu = \nu_0 \left(1 - \frac{V}{c}\right)$$

donde V debe tomarse positiva si el observador y la fuente se alejan.

La [31] indica que si la fuente se aleja del observador, las líneas del espectro se desplazan hacia el rojo, corriéndose en cambio hacia el violeta si la fuente se acerca. Esto permite,

como es conocido, determinar la velocidad radial de las estrellas. De la [31] se obtiene:

$$\frac{\nu}{\nu_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda} = 1 - \frac{V}{c}$$

o sea

$$1 - \frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{V}{c}\ ; \quad \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda} = \frac{V}{c}$$

o lo que es lo mismo

[32] $$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{V}{c}$$

La explicación clásica del efecto Doppler es, como se acaba de ver, exactamente igual en óptica que en acústica. Cuando es la fuente la que se mueve, respecto del aire en un caso y respecto del éter en el otro, la longitud de onda experimenta una variación real, en tanto que, si el que se mueve es el observador, la variación de la longitud de onda es sólo aparente. La no identidad de las fórmulas [27] y [28] muestra que el efecto es distinto cuando se mueve la fuente o cuando se mueve el observador. Solamente si nos limitamos a considerar términos de primer orden en u/c, las fórmulas coinciden, y por ello en la [31] (o la [32]) aparece solamente la velocidad relativa entre la fuente y el observador.

12. **Posibilidad de revelar el movimiento absoluto.** — La Tierra, en su movimiento de traslación, se mueve, respecto de las estrellas, con una velocidad aproximada de 30 km/seg. Si el Sol estuviera fijo respecto del éter, ésta sería la velocidad de la Tierra respecto de ese medio. Pero no sabemos si el conjunto del sistema solar se mueve o no en cierta dirección. Si tal cosa ocurriera, la velocidad de la Tierra respecto del éter estaría dada, en todo momento, por la resultante de dos vectores: uno, la velocidad v de traslación de la Tierra, de módulo aproximadamente constante y que gira en

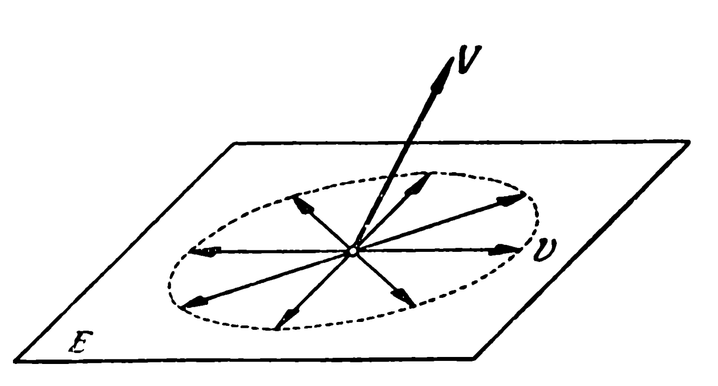


Fig. 11. — Movimiento de la Tierra respecto del éter.

el plano de la eclíptica E (fig. 11) en el término de un año; y el otro, V, cuya dirección y módulo nos es por el momento desconocido. Si ese vector V estuviera situado en el plano de la eclíptica y su módulo fuera también igual a 30 km/seg, en algún momento los vectores v y V serían iguales y opuestos y la Tierra se encontraría en ese instante en reposo respecto del éter. Pero en este caso, al cabo de seis meses debería constatarse que la velocidad de la Tierra respecto del éter alcanza el valor de 60 km/seg. Se trata, entonces, de inventar algún dispositivo que sea capaz de revelarnos ese viento de éter que debe soplar constantemente contra la Tierra con una velocidad que debe ser, por lo menos, del orden de 30 km/seg.

Supongamos (fig. 12) que R_1 y R_2 sean dos ruedas dentadas como las utilizadas por Fizeau en su célebre experimento e idénticas entre sí. Ambas ruedas están fijas al eje E, que puede hacer girar el motor M. Desde O se observa la luz de la

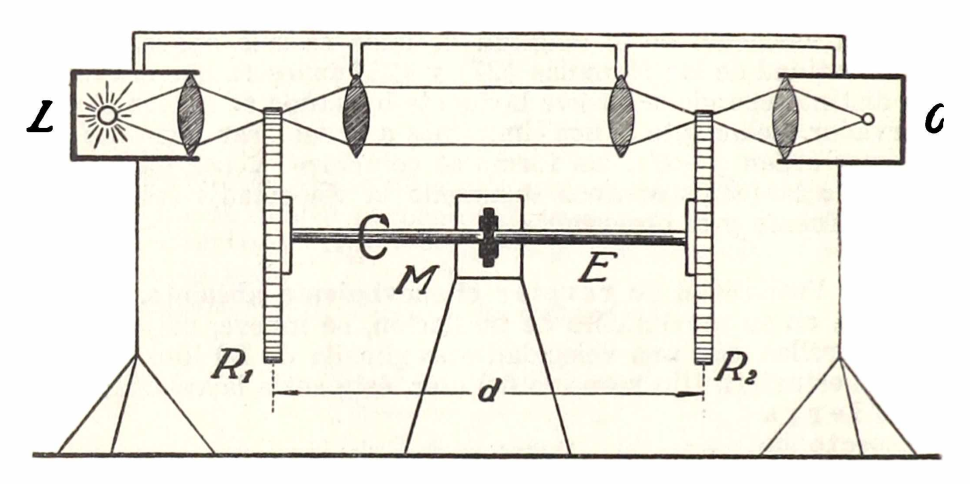


Fig. 12. — Dispositivo ideal para determinar la velocidad de la luz que se propaga en determinado sentido.

linterna L, que pasa a través de dos huecos correspondientes. Si se aumenta la velocidad de rotación de las ruedas, cuando la periferia de éstas alcance cierta velocidad V se producirá el primer eclipse de luz. Esto ocurrirá cuando el tiempo que emplee la luz en ir de R_1 a R_2 sea exactamente igual al tiempo que emplea un diente de la rueda R_2 en ocupar el lugar de un hueco. Si el ancho de los dientes es a, este tiempo t_1 será igual a a/V.

Si el aparato estuviera en reposo respecto del éter, la velocidad de la luz sería igual a c, y entonces se tendría

[33] $$\frac{d}{c} = \frac{a}{\mathrm{V}} \quad ; \quad \text{o sea:} \quad \frac{a}{d} = \frac{\mathrm{V}}{c} \,.$$

Observemos, de paso, que el cociente a/d *mide el ángulo de aberración de la luz* respecto de un sistema fijo a la rueda R_2. Por lo tanto, *en el clásico experimento de Fizeau, para determinar la velocidad de la luz, se realiza experimentalmente el fenómeno de la aberración descubierto por Bradley.*

Se tiene así, en principio, un método que permite determinar la velocidad de la luz cuando se propaga en cierta dirección y en determinado sentido.

Consideremos ahora que nuestro aparato se orienta de tal modo que la velocidad del mismo respecto del éter tenga la dirección y el sentido del vector v (fig. 13). La luz que parte de R_1 viaja en el éter con la velocidad c, pero viene a su encuentro la rueda R_2 con la velocidad v. En un tiempo t_1 la luz recorrerá el camino $d - x$ y la rueda R_2 el camino x, por lo cual se tendrá

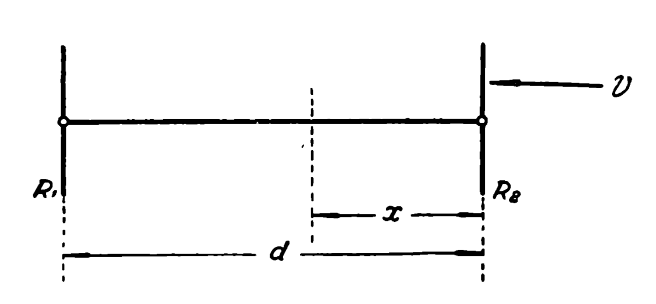


Fig. 13. — La rueda R_2 va al encuentro del rayo que se le acerca.

$$t_1 = \frac{d - x}{c} = \frac{x}{v}$$

de donde

$$x = \frac{vd}{c + v}$$

y por lo tanto:

[34] $$t_1 = \frac{d}{c + v}\,.$$

Este resultado lo podríamos haber obtenido de inmediato: la velocidad relativa de la luz respecto del aparato es, de acuerdo con [9], $c + v$. En este caso, el sentido de propagación de la luz coincide con el sentido del "viento de éter", pudiéndose decir que la luz viaja entonces con "viento a favor".

Si se invierte el aparato, haciendo que la luz avance con "viento en contra", el tiempo t_2 empleado en efectuar el recorrido d, será:

[35] $$t_2 = \frac{d}{c - v}\,.$$

De esta manera, midiendo exactamente los tiempos t_1 y t_2, para diversas orientaciones del aparato, se podría conocer la

velocidad v de nuestro laboratorio con respecto al éter. Pero medir con precisión el tiempo empleado por la luz en recorrer unos pocos metros, se presenta por el momento como algo irrealizable *. No obstante, calcularemos todavía el tiempo t_3 que emplearía la luz en ir de la rueda R_1 a la R_2, cuando el aparato se orienta de tal modo, que su eje sea perpendicular a la dirección de la velocidad con que el conjunto se desplaza respecto del éter (fig. 14). En este caso, un observador fijo en el éter vería que mientras la luz va de R_1 a R_2, la rueda R_2 se desplaza en cierto trayecto y. Por esta razón, el camino real seguido por el rayo en el éter sería la hipotenusa de un triángulo cuyos catetos son d é y.

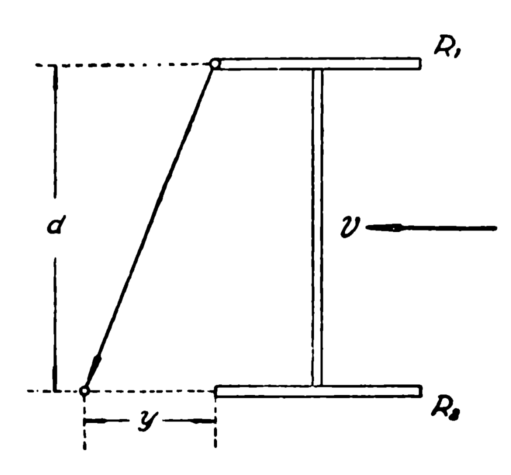


Fig. 14. — El rayo se propaga perpendicularmente al movimiento.

Por lo tanto, el tiempo t_3 será:

$$t_3 = \frac{\sqrt{d^2 + y^2}}{c} . \tag{36}$$

Como $y = vt_3$, llevando este valor a la [36] y despejando luego t_3, se obtiene:

$$t_3 = \frac{d}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \tag{37}$$

Si la luz marchara de R_2 a R_1 se obtendría, evidentemente, un tiempo t_4 igual a t_3.

En los métodos experimentales, para medir la velocidad de la luz se emplea siempre un dispositivo con el cual se mide el tiempo empleado por la luz en recorrer cierto trayecto en ambos sentidos, o sea el tiempo de *ida y vuelta* empleado en recorrer cierta distancia d. Por esta razón, veamos si la suma de los tiempos t_1 y t_2 resulta igual o diferente a la suma de los tiempos t_3 y t_4. Sumando [34] y [35], se obtiene:

$$t_1 + t_2 = \tau_1 = \frac{2d}{c} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} , \tag{38}$$

* Si se supone $d = 15$ m, la diferencia $t_2 - t_1$ para $v = 30$ km/seg sería del orden de 10^{-11} seg.

y como $t_3 + t_4 = 2t_3$, resulta por [37]:

$$[39] \qquad t_3 + t_4 = \tau_2 = \frac{2d}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} .$$

Como estos tiempos τ_1 y τ_2 son diferentes, puede abrigarse la esperanza de que, midiendo la velocidad de la luz en diferentes trayectos según distintos acimutes, se obtendrían valores diversos de aquella velocidad que permitirían, finalmente, conocer la velocidad absoluta v de nuestra Tierra con respecto al éter. El tiempo τ_1 empleado en efectuar el recorrido d, una vez a favor y otra vez en contra del viento de éter, es algo mayor que el tiempo τ_2 que se emplea en el recorrido "neutral", cuando la trayectoria es perpendicular a la corriente de éter. Despreciando los términos en que aparecen potencias superiores al cuadrado de v/c, la [38] y la [39] pueden escribirse:

$$\tau_1 = \frac{2d}{c} \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$\tau_2 = \frac{2d}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right)$$

y por lo tanto

$$[40] \qquad \tau_1 - \tau_2 = \Delta t = \frac{d}{c} \cdot \frac{v^2}{c^2} .$$

Para tener una idea acerca de este tiempo calculemos el recorrido L que durante el mismo efectuaría un rayo de luz en el vacío:

$$[41] \qquad L = c \,.\, \Delta t = d \,.\, \frac{v^2}{c^2} .$$

Si suponemos que $d = 10$ km $= 10^6$ cm y $v = 30$ km/seg, resulta, por ser $c = 300\,000$ km/seg:

$$L = 10^6 \text{ cm} \times 10^{-8} = 0{,}1 \text{ mm}.$$

Este resultado es desconsolador: un rayo de luz que viajara perpendicularmente a la corriente de éter 20 km (10 de ida y 10 de vuelta), le sacaría de ventaja a otro rayo, que viaja también 20 kilómetros, 10 en el sentido de la corriente y 10 en el sentido opuesto, sólo un décimo de milímetro. Por lo tanto, no hay ni que pensar en que, mediante determinaciones directas de la velocidad de la luz, en recorridos de ida y vuelta, pueda revelarse la más mínima diferencia si se eligen caminos con diferentes orientaciones. Esto lo debe haber pensado MICHELSON, el genial físico experimental que estaba empeñado en revelar, a toda costa, el movimiento absoluto de la Tierra. Pero para *Michelson*, acostumbrado a vérselas con medidas precisas

de longitudes de onda de la luz, un décimo de milímetro es una longitud extraordinariamente grande. En un décimo de milímetro caben, en efecto, 170 longitudes de onda de la luz amarilla del sodio. Y entonces Michelson, lleno de satisfacción, se habrá dicho: "no necesito emplear un trayecto de 10 kilómetros; me basta y me sobra con uno de 10 metros, en que la ventaja de un rayo sobre el otro sería del orden de 0,17 longitudes de onda, y a mí, un solo centésimo de longitud de onda, no se me puede escapar".

13. **Interferómetro de Michelson.** — La fig. 15 muestra este aparato esquemáticamente. La luz que parte de L incide con una inclinación de 45° sobre el espejo plano E, semiazogado y, por lo tanto, semitransparente. Aquí, en E, el haz luminoso se

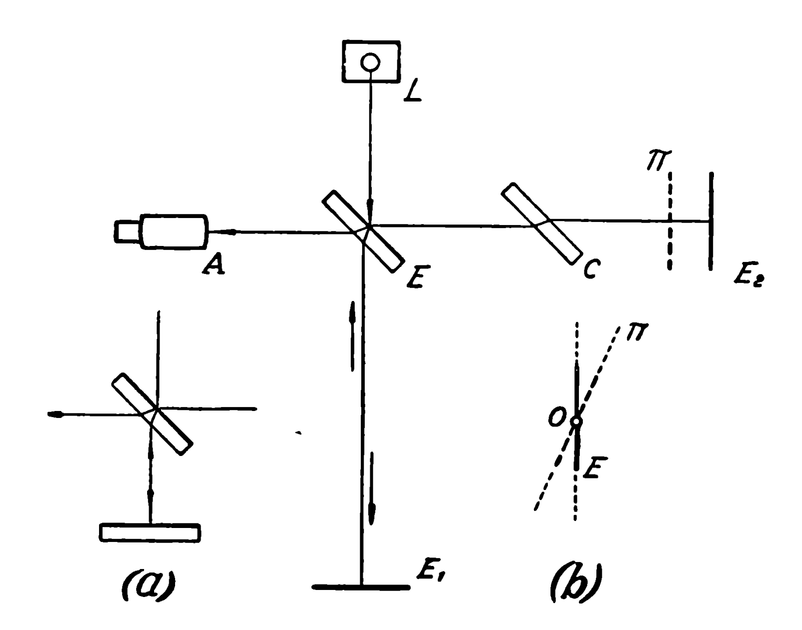


Fig. 15. — Interferómetro de Michelson.

bifurca: uno de los rayos atraviesa la lámina E, se refleja normalmente en el espejo E_1 y luego de reflejarse en E penetra en el anteojo A, en tanto que el otro rayo se refleja en E, luego en E_2 y, después de atravesar la lámina E, penetra también en el anteojo A. Si la cara de la lámina E sobre la que se refleja la luz es la dibujada con trazo más grueso, el rayo que sigue el trayecto EE_1EA debe atravesar tres veces el espesor de la lámina E, mientras que el otro rayo, cuyo trayecto es EE_2EA, atraviesa la lámina E sólo una vez. Para que el camino óptico de los dos rayos sea idéntico, se intercala en el

trayecto del rayo que incide sobre E_2 una lámina de vidrio de espesor exactamente igual que E.

Supongamos que la imagen del espejo E_1 dada por el espejo E estuviera contenida en el plano π. Si este plano π es paralelo al plano E_2, con el anteojo A enfocado al infinito se ven, si la fuente luminosa es extensa y monocromática, una serie de anillos concéntricos alternativamente brillantes y obscuros, de aspecto exactamente igual al de los anillos de Newton. Estos anillos, llamados "de igual inclinación", se producen al interferir la luz reflejada en E_2 según cierto ángulo φ, con la luz reflejada en E_1 bajo el mismo ángulo y que se comporta como si se reflejara en el plano π (fig. 16). Un rayo R que forma con la normal a los planos E_2 y π el ángulo φ, da origen a dos rayos paralelos 1 y 2 cuya diferencia de marcha Δ es:

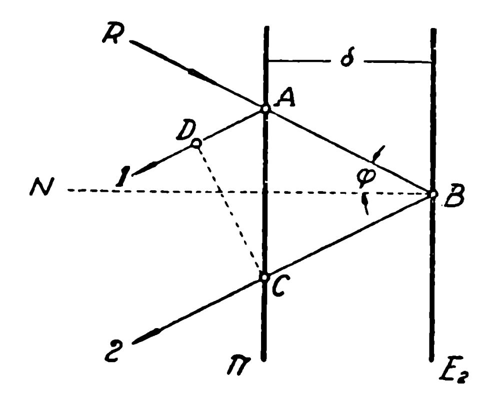


Fig. 16. — Anillos de interferencia de igual inclinación.

$$\Delta = AB + BC - AD.$$

Si llamamos δ a la distancia que separa los planos E_2 y π, se obtiene sin dificultad

[42] $$\Delta = 2\,\delta \cos \varphi.$$

Como la fuente luminosa es extensa, se tienen para φ todos los valores posibles. Cuanto mayor es el ángulo que se considera, menor es la diferencia de camino. Supongamos, a título de ejemplo, que en la distancia δ quepan exactamente 20 longitudes de onda λ de la luz utilizada. En este caso, para los rayos que se reflejan normalmente ($\varphi = 0$), habrá una diferencia Δ de camino igual a 40 λ. Como el anteojo está enfocado al infinito, todos estos rayos normales a los planos E_2 y π se cortarán en el foco del objetivo del anteojo y allí, el efecto luminoso resultante, proveniente de la superposición de todas las ondas reflejadas en π y en E_2, parecería que debiera ser, en el caso considerado, en que Δ es igual a un número entero de ondas, una mancha luminosa. Sin embargo, aparece en este caso en la parte central un disco obscuro con el centro absolutamente negro. Ello se debe a que el rayo LEE_2EA experimenta dos reflexiones en E y E_2 contra el vidrio, en tanto que el rayo LEE_1EA experimenta una sola reflexión contra el vidrio del espejo E_1, pues en E se refleja contra el aire. Cuando el primer medio (aire) es menos refringente que el segundo (vidrio),

la onda reflejada experimenta un atraso en su fase que equivale a la pérdida de media longitud de onda. Pero no ocurre pérdida ninguna al reflejarse la luz si el primer medio (vidrio) es más refringente que el segundo (aire).

Consideremos ahora la luz que se refleja según cierto ángulo φ en todas las direcciones del espacio. Imagine el lector que hace girar la fig. 16 alrededor de la normal BN. Los haces de luz que se reflejan según el ángulo φ se cortarán en el plano focal del objetivo sobre una circunferencia de cierto radio ϱ que se vería, desde el centro óptico del objetivo del anteojo, con una abertura angular igual a φ. Como el ángulo φ es siempre pequeño, designando por f a la distancia focal del objetivo del anteojo, se tendrá:

[43] $$\varrho = f\varphi.$$

Si, volviendo a nuestro ejemplo numérico, consideramos diversos valores de φ para los cuales Δ valga 39λ, 38λ, etc., los valores correspondientes de ϱ nos darían los radios sucesivos de los anillos obscuros que se forman en el plano focal del objetivo. Si, por la pequeñez de φ, hacemos

[44] $$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}$$

la [42] podrá escribirse:

$$\Delta = 2\delta\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right)$$

y si dividimos por la longitud de onda λ y llamamos N al número de ondas que caben en Δ y N_0 a las que entran en el espesor 2δ, se tendrá:

$$N = N_0\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right).$$

Despejando de aquí el valor de φ y llevándolo a la [43], resulta:

[45] $$\varrho = f\sqrt{2\,\frac{N_0 - N}{N_0}}.$$

Si N_0 es entero para $N_0 - N = 1, 2, 3, \ldots$, se obtienen los radios de los sucesivos anillos obscuros. Si N_0 es igual a un número entero más 1/2, el centro aparecerá brillante y para valores enteros de $N_0 - N$ se obtendrán los radios de los anillos iluminados. Como los radios de los anillos sucesivos resultan proporcionales a la raíz cuadrada de los números enteros, la figura de interferencia tiene exactamente el mismo aspecto que la de los anillos de Newton.

Si mediante un tornillo micrométrico se desplaza el espejo E_1 paralelamente a sí mismo, la distancia δ varía. Si δ

va disminuyendo, se observa que los anillos se desplazan del centro a la periferia, pues ϱ aumenta (para el mismo valor de $N_0 - N$) cuando δ decrece, puesto que N_0 se va haciendo más pequeño. De este modo, por el lugar ocupado inicialmente por el décimo anillo, digamos, irán pasando los anillos noveno, octavo, séptimo, etc. De esta manera, contando los anillos que van pasando por determinado lugar del campo del anteojo, se puede conocer en cuánto se aproximan (o se separan) los planos π y E_2. A un pasaje de n anillos por un punto corresponde una variación igual a $n\lambda$ en la diferencia de marcha, lo que nos dice que δ habrá variado en $n\lambda/2$. Digamos de paso que, basándose en esto y empleando un ingenioso método que no corresponde explicar aquí, pudo Michelson, en 1893, hallar que el metro-patrón de la Oficina internacional de pesas y medidas tiene una longitud en la cual caben exactamente

$$1\,553\,164{,}13 \pm 0{,}15$$

longitudes de onda de la luz roja del cadmio, en el aire seco, a 15° C y a presión de 760 mm de mercurio.

Volviendo al interferómetro, si continuamos desplazando el espejo E_1 hasta lograr que el plano π coincida con el plano del espejo E_2, al realizarse ese *contacto óptico* los anillos desaparecen y el campo del anteojo se presenta totalmente obscuro. Si entonces se inclina ligeramente mediante otro tornillo, no representado en la figura, el espejo E_1, su imagen π cortará al plano E_2 de modo tal que ambos planos formarán una cuña de ángulo diedro sumamente pequeño (parte b de la figura 15), cuya arista O supondremos que sea vertical. Si entonces se enfoca el anteojo de modo que se vea nítidamente la superficie del espejo E_2, se observarán franjas de interferencia paralelas a la arista de la cuña. En la parte central que coincide con O la diferencia de marcha es nula, pero por la pérdida de media longitud de onda que experimenta de más uno de los rayos, tendremos allí una franja obscura. Si iluminamos con luz blanca, aparecen a uno y otro lado de esta franja central obscura, franjas brillantes coloreadas y separadas por intervalos más o menos obscuros. La primera franja brillante situada junto a la franja central, se ve en aquellas partes de la cuña que tienen un espesor igual a $\lambda/4$, pues de ese modo, entre la ida y la vuelta, la diferencia de marcha es $\lambda/2$, que con la $\lambda/2$ perdida en la reflexión de uno de los rayos, hacen que las ondas provenientes de E_2 y de π de este lugar, estén en concordancia de fase. A un espesor de la cuña igual a $\lambda/2$ corresponde una franja obscura y a $3\lambda/4$ una brillante, etc. Si el ángulo de la cuña es muy pequeño, las franjas aparecen muy separadas y colocando en el plano focal del anteojo una escala apropiada (micrómetro ocular), puede apreciarse sin dificultad hasta la centésima parte del intervalo que separa dos franjas

consecutivas. También es posible fotografiar las franjas de interferencia colocando en el plano focal del objetivo una placa sensible.

Una vez dispuesto el aparato de este modo, si se inclina ligeramente la lámina C, llamada compensador, el camino óptico del rayo que la atraviesa varía también y esto origina un desplazamiento de las franjas en uno u otro sentido. De este modo, es posible hacer coincidir la franja central con el hilo vertical del retículo del anteojo.

14. **Experimento de Michelson.** — Imaginemos al interferómetro que acabamos de describir dispuesto horizontalmente y de modo que pueda girarse todo él alrededor de un eje vertical que pasa por E. Supongamos que orientamos el aparato de tal modo que el brazo EE_2 coincida con la dirección del "viento de éter" en ese momento o, si se quiere, con la proyección horizontal v de la velocidad que en ese instante tiene el laboratorio con respecto al éter. En este caso, ya sabemos que el rayo que corre transversalmente a la corriente se adelanta sobre el otro en el valor dado por [41]. Si el aparato se gira 90°, los dos rayos que interfieren permutan sus lugares con respecto a la corriente de éter y el que se adelantaba en L se atrasa ahora, también en el valor L respecto del otro. El desplazamiento relativo llega a ser, así, igual a 2L, o sea de acuerdo con [41]

[46] $$2L = 2d \frac{v^2}{c^2}.$$

Si este valor fuera igual, por ejemplo, a $\lambda/2$, al ir girando el aparato, se observaría un desplazamiento continuo de las franjas, por el cual, al final, las brillantes ocuparían el lugar que antes ocupaban las obscuras. El corrimiento σ en fracciones de franja se obtiene dividiendo la [46] por la longitud de onda λ, con lo que

[47] $$\sigma = \frac{2d}{\lambda} \frac{v^2}{c^2}.$$

Los primeros experimentos de esta clase fueron efectuados por MICHELSON entre 1880 y 1881, operando a diferentes horas del día y en distintas épocas del año y, con gran asombro, se encontró que, al girar el aparato, las franjas permanecían siempre fijas. Todo pasaba como si el laboratorio estuviera siempre en reposo con respecto al éter. Ante un resultado tan imprevisto, el experimento fué repetido en 1887 con la colaboración de MORLEY, aumentando, mediante reflexiones múltiples, la distancia efectiva d, que llegó a ser igual a 11 m. Todo el aparato flotaba en un baño de mercurio y, teniendo en cuenta solamente la velocidad de traslación de la Tierra, cabía esperar

un desplazamiento de las franjas, con la luz empleada, igual a 0,4. El corrimiento máximo que se llegó a observar fué sólo de un centésimo de franja, lo que se podía atribuir a errores de observación.

En 1905 el experimento fué repetido por MORLEY y MILLER, que montaron el interferómetro en una gran cruz de acero, flotante también sobre mercurio (figs. 17 y 18) y cuyos brazos tenían unos cuatro metros de longitud, llegando a ser la distancia efectiva *d* igual a 32,24 metros, con lo cual el corrimiento a esperarse debía ser de 1,1 franjas. Los corrimientos observados en algunos de estos experimentos fueron, a lo más, de unos pocos centésimos de franja y podían, por lo tanto, ser atribuídos a pequeñísimas variaciones de la temperatura que se producían al girar el aparato, o sea a errores de observación.

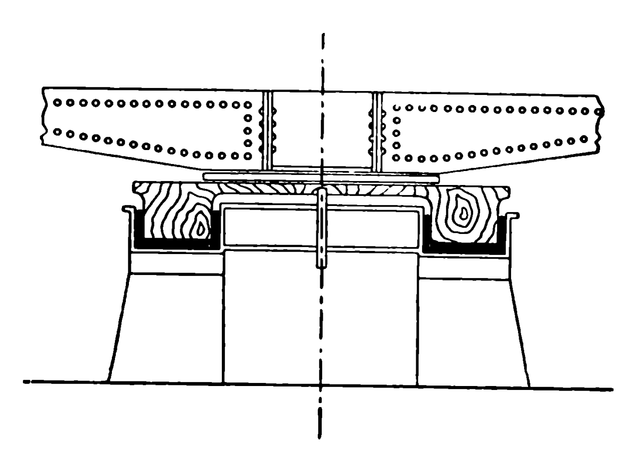


Fig. 17. — Soporte flotante del interferómetro de Michelson.

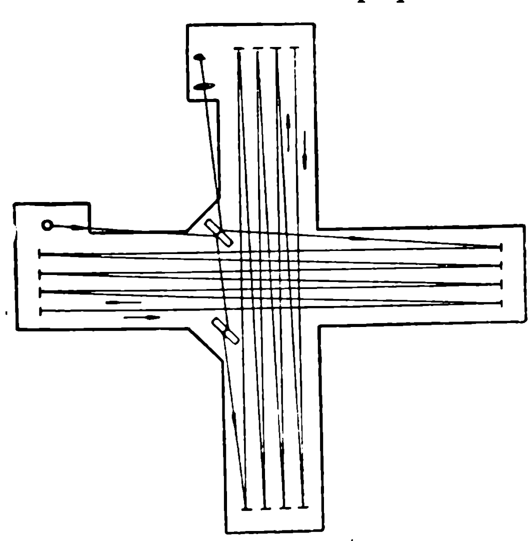


Fig. 18. — Manera de aumentar la distancia efectiva *d*.

Digamos, finalmente, que el experimento, realizado repetidas veces hasta época reciente por varios observadores, ha dado siempre el mismo resultado negativo. En alguna oportunidad se anunció (Miller) que el experimento habría dado en ciertas circunstancias un corrimiento efectivo de las franjas, pero, repitiéndolo después de tomar las debidas precauciones, se comprobó que aquéllas permanecían en realidad inmóviles.

15. Intentos de explicación. — Al establecer la fórmula [34] y las análogas [35] y [37], se ha supuesto que la velocidad de la luz respecto del éter no depende de la velocidad de la fuente. Si en el interior de un tren en movimiento se dispara un arma en diferentes direcciones y se mide la velocidad de la bala dentro del tren, se observará que esa velocidad no depende de la dirección. Desde el exterior del tren se encontraría que las balas lanzadas en el sentido del movimiento tienen una velocidad $c+v$ y en sentido opuesto $c-v$. Si con la luz sucediera algo análogo, la velocidad de la luz, respecto de la Tierra, *emitida por una fuente terrestre*, sería igual en todas direcciones, y de ahí el resultado negativo del experimento de Michelson. Pero de acuerdo con esta suposición de RITZ, la velocidad de la luz respecto del éter dependería de la velocidad de la fuente y esto es totalmente inadmisible pues, si así fuera, como lo hizo notar DE SITTER, tendrían que ocurrir extraños fenómenos astronómicos que en realidad no se producen. Pensemos, por ejemplo, en una estrella doble y consideremos, para mayor simplicidad, que el plano de la órbita de las dos componentes pasa por el Sol. Cuando una de las estrellas se acerca a nosotros con la velocidad v, la luz haría *todo su recorrido* con una velocidad igual a $c+v$ y esta señal podría llegar a nosotros *antes* que la emitida por la misma estrella cuando se encontraba en el punto opuesto de su órbita, en que se alejaba con la velocidad $-v$, propagándose la señal desde allí con la velocidad $c-v$.

Tampoco cabe la suposición de que el éter sea totalmente arrastrado por el movimiento de la Tierra, pues en tal caso no podría producirse el fenómeno de la aberración.

Según las fórmulas [38] y [39], los tiempos τ_1 y τ_2 son diferentes, pero el experimento prueba que esos tiempos son iguales. Esta igualdad puede "explicarse" admitiendo que si un cuerpo se mueve respecto del éter con velocidad v, experimenta cierta contracción en el sentido del movimiento, en tanto que sus dimensiones transversales a la corriente de éter permanecen invariables. Calculemos en cuánto debe acortarse la d que figura en la [38] para que τ_1 sea igual a τ_2. Llamemos a la longitud acortada d' y tendremos:

$$\frac{2d'}{c}\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{2d}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

de donde

[48] $$d' = d\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,.$$

Esta extraña hipótesis, propuesta con el exclusivo propósito de dar cuenta del resultado negativo del experimento de Mi-

chelson, fué hecha en forma independiente por FITZ-GERALD y H. A. LORENTZ. Lo desconcertante de la misma es que la contracción no depende para nada de la naturaleza del cuerpo que se mueve: los brazos del interferómetro pueden ser de hierro, cobre o madera, pero en todos los casos experimentarán idéntica contracción, cuyo valor es justamente aquel que hace imposible que podamos revelar nuestro movimiento con respecto al éter. Si tomáramos en serio esta hipótesis, que Lorentz pudo justificar, hasta cierto punto, con su teoría electrónica, habría que pensar que la naturaleza no juega en este caso del todo limpio, pues la tal contracción se presenta como una simple treta hecha para engañarnos, ocultando de cualquier manera al movimiento absoluto que, no obstante..., existiría realmente.

Digamos, finalmente, que el experimento de Michelson fué realizado por TOMASCHEK utilizando la luz de una estrella en lugar de una fuente terrestre, tal como había sido sugerido por LENARD, pero el resultado siguió siendo, como siempre, absolutamente negativo y negativos resultaron también otros experimentos, como el de TROUTON y NOBLE (§ 67), ideados y realizados en vano, para revelar el movimiento de la Tierra con respecto al misterioso éter.

CAPÍTULO II

RELATIVIZACIÓN DEL TIEMPO Y DEL ESPACIO

16. **La madeja enredada.** — Acabamos de ver los vanos intentos hechos por los físicos para poner de manifiesto el movimiento de la Tierra con respecto al éter. Nadie era capaz de dar una razón plausible del porqué de aquellos fracasos. Pero en el mes de junio de 1905 un joven físico llamado ALBERT EINSTEIN, que acababa de cumplir 26 años el 14 de marzo de ese mismo año, conmovió al mundo científico con una memoria aparecida en *Annalen der Physik*, titulada "Zur Elektrodynamik bewegter Körper" ("Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento"), en la que se desenredaba, con asombrosa naturalidad, la madeja del complicado proceso del "medio" en el que se asientan los fenómenos electromagnéticos y ópticos.

La punta del hilo pudo ser asida después de una reflexión honda y libre de prejuicios acerca del significado de las coordenadas de espacio y tiempo que intervienen en la descripción de cualquier proceso físico. El detective Einstein encontró, como veremos, que el culpable de todo el enredo era un personaje de inocente apariencia llamado *tiempo absoluto* y al que ejecutó de inmediato con toda razón y justicia.

17. **Posibilidad de relativizar la simultaneidad.** — En el párrafo 10 hicimos notar que el fenómeno de la aberración de la luz obliga a suponer que el principio de relatividad no vale en el dominio de la óptica, pues si se aceptara tal principio, se llegaría a la conclusión —que entonces calificamos de absurda— de que dos acontecimientos simultáneos respecto de un sistema podrían no serlo respecto de otro. Ha llegado el momento de revisar lo que entonces dijimos. Como al tratar de la aberración de la luz se piensa siempre en el fenómeno astronómico, comenzaremos por describir aquí un dispositivo mecánico con el cual se podría —en principio— poner de manifiesto el fenómeno de la aberración de la luz entre dos sistemas. Nuestro dispositivo será una especie de estilización del método de la rueda dentada de Fizeau, pues, como ya vimos (§ 12), al medir la velocidad de la luz por ese procedimiento, se realiza experimentalmente el fenómeno de la aberración. Nuestros dos sistemas S y S′ (fig. 19) están constituídos por dos soportes

que pueden separarse con movimiento uniforme, deslizándose las láminas rígidas de la parte superior, provistas de senuas ranuras O y O′, una sobre la otra. Supondremos, además, que las placas P y P′, pertenecientes a ambos sistemas, son sensibles a la luz. Si el aparato se ilumina por la parte superior (fig. 20), penetrará al interior del mismo un destello de luz en el instante (parte *b* de la figura) en que las ranuras O y O′ coinciden. En el tiempo que la luz tarda en llegar a la parte inferior del aparato, éste continúa abriéndose, y en la parte *c* de la figura se ha representado el instante en que la luz llega a las placas P y P′, produciendo en ellas las manchas M y M′ entonces coincidentes. La luz ha seguido con respecto a S el trayecto OM y respecto de S′ el O′M′. Cuando se da la explicación clásica del fenómeno de la aberración, uno de los trayectos, el recorrido en el éter, es el real, el verdadero, y el otro es aparente. Aquí no tenemos porqué preferir el uno al otro: respecto de S, el camino real es OM; respecto de S′, el O′M′. No se trata, naturalmente, de dos caminos distintos, sino del mismo camino referido a dos sistemas diferentes. Si se admite que vale el principio de relatividad y se considera que es una onda plana la

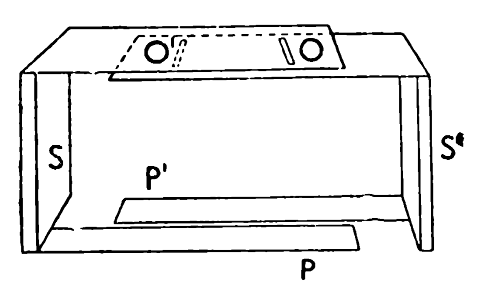


Fig. 19. — "Aparato para revelar experimentalmente el fenómeno de la aberración de la luz.

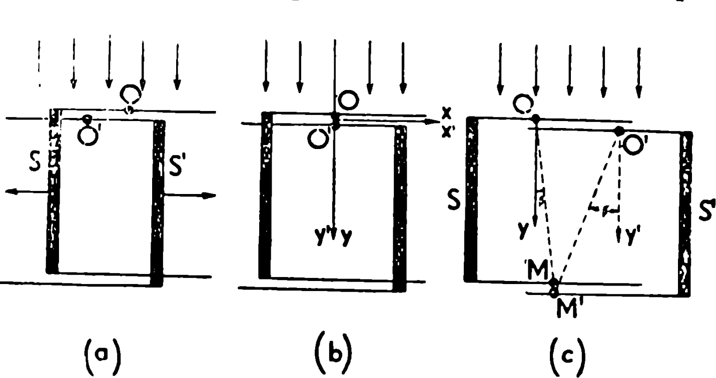


Fig. 20. — Aberración de la luz.

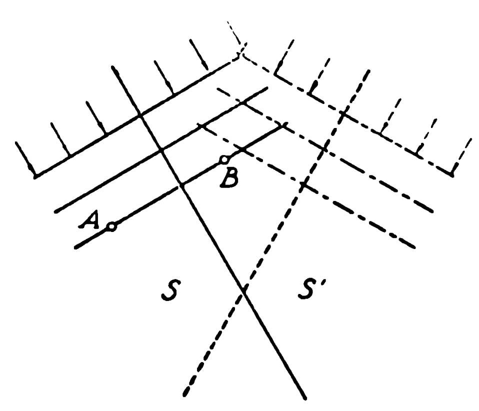


Fig. 21. — La simultaneidad es relativa.

que incide sobre el aparato, tendrá que admitirse que, respecto de S, las superficies de onda son planos como los representados por las líneas llenas (fig. 21), en tanto que, respecto de S′, dichas superficies de onda estarían representadas por las líneas punteadas.

Pero si es así, los dos acontecimientos de la llegada de la luz a los puntos A y B serían simultáneos respecto de S, en tanto que, para S′, la luz llegaría a B antes que a A.

Si usted, estimado lector, se resiste a admitir una cosa semejante, será porque cree tener una idea muy clara acerca de lo que son dos acontecimientos simultáneos que ocurren en lugares diferentes. Si es así, intente dar una definición de la simultaneidad. Concedo que pueda considerarse como idea primitiva la simultaneidad de dos acontecimientos que ocurren *muy próximos el uno del otro*. En ese caso, usted dirá que son simultáneos aquellos sucesos que son percibidos como tales. Cuando los muchachos se entretienen en romper las lámparas del alumbrado público a pedradas, el acontecimiento de la rotura de la lámpara coincide con la extinción de su luz y en ese caso todos los observadores estarían de acuerdo en juzgar a esos acontecimientos como simultáneos, aun cuando alguno de ellos viajara en un avión a impresionante velocidad. La simultaneidad resulta absoluta si los dos acontecimientos ocurren en lugares vecinos; en rigor, infinitamente próximos entre sí. Pero si usted un día visita un observatorio astronómico y tiene la suerte de que en ese momento se produzca un eclipse del primer satélite de Júpiter y, al observar el fenómeno, dice emocionado: "El satélite entró en el cono de sombra exactamente en el instante en que yo lo observaba", el astrónomo que está a su lado le diría: "De ningún modo; hace lo menos 40 minutos que se produjo el eclipse, pues en la posición actual de la Tierra y Júpiter, la luz tarda en llegar a nosotros más o menos ese tiempo. Cuando se produjo el eclipse —agrega el astrónomo— yo subía al tren para venir aquí". Y usted no podrá menos de decir para sí mismo: Es realmente notable; el satélite se metió en el cono de sombra cuando yo salía de mi casa; tuve tiempo de ir al garaje, sacar el auto, ir a buscar a mi amigo y llegar al observatorio mientras el rayito de luz viajaba sin descanso para introducirse finalmente en mi ojo.

Después de estas reflexiones usted admitirá, por lo menos, que no es nada fácil decir cuándo dos acontecimientos que se producen en lugares distintos *son* simultáneos. Ese *son* subrayado induce a pensar que los acontecimientos serán necesariamente simultáneos o no, pero podría ser que, después de definir el concepto de simultaneidad, hubiera que agregar: *simultáneos respecto de.* Piense usted en los dos acontecimientos que al parecer se produjeron simultáneamente: la entrada del satélite de Júpiter en el cono de sombra y el astrónomo subiendo

al tren. Observados esos fenómenos desde Marte o desde Sirio o desde un avión intersideral, y descontando en cada caso el tiempo empleado por la luz, ¿serán también simultáneos? Si el avión sideral se acercaba o alejaba de Júpiter al recibir las señales luminosas, ¿no podría influir ello en la conclusión del observador acerca de la simultaneidad o no de esos dos acontecimientos? Esta pregunta sólo podrá responderse después de haber definido la simultaneidad de dos acontecimientos distantes.

18. **La luz como reloj-patrón. El postulado de la constancia de la velocidad de la luz.** — Para hacer una afirmación como la que hizo el astrónomo del ejemplo del párrafo anterior, según la cual el eclipse había ocurrido 40 minutos antes de ser percibido, es necesario disponer de un reloj y conocer, además de la distancia que nos separa de determinado suceso, la velocidad con que se propaga la luz. Por lo tanto, para saber si dos acontecimientos distantes son o no simultáneos, será necesario disponer de un *buen reloj* que indique, de un modo preciso, los instantes en que dichos acontecimientos son percibidos desde determinado lugar de determinado sistema de coordenadas.

En apariencia, todo el mundo sabe lo que es un reloj y todo el mundo sabe la diferencia que existe entre un reloj malo y otro bueno. Aparte de que este último es generalmente más caro, la diferencia esencial consiste en que la hora indicada por el reloj bueno coincide mejor con la hora oficial que se transmite por radio. Pero, ¿de dónde sacan los astrónomos su "hora oficial"? No creerá usted, seguramente, que están en comunicación secreta y permanente con el viejo Cronos, encargado de hacer que la corriente del tiempo marche siempre en el mismo sentido con la debida regularidad y que impide, al decir de Heráclito, que nos podamos bañar dos veces en el mismo río.

Los astrónomos obtienen su hora oficial de la observación del movimiento de las estrellas, de lo cual parece resultar que nuestro reloj-patrón está constituído por la Tierra y su movimiento de rotación. Aunque en la práctica resulte ser así, la Tierra no es el reloj-patrón de la física. Es frecuente, en efecto, oír que un astrónomo se expresa de la manera siguiente: "Debido al roce que producen las mareas, la Tierra se va frenando y al cabo de unos miles de siglos los días serán bastante más largos que en el presente". ¿En qué tiempo piensa el astrónomo cuando habla de esa manera? Seguramente piensa en el tiempo que implícitamente está definido por las leyes más seguras de la física. Piensa que si la velocidad angular de la Tierra se redujera a la mitad y continuáramos regulando nuestros relojes por el movimiento diurno de las estrellas, se observaría que un rayo de luz recorre en el vacío, en un segundo, 600 000 km; que la velocidad del sonido también se duplicaría

y que un cuerpo al caer recorrería, en el primer segundo de caída, casi 20 m en lugar de los 5 m que recorre actualmente. Pero no todas las leyes de la física tienen el mismo grado de seguridad. Es necesario elegir a una ley determinada para que pueda servirnos de reloj-patrón. Por lo pronto, será necesario descartar los procesos que ocurren en el seno de la materia —por su complicación— y referirnos al vacío. Einstein consideró que la ley más sencilla de todas es precisamente la ley de propagación de la luz en el vacío y sentó como postulado fundamental el siguiente: *Respecto de un sistema inercial la velocidad de la luz en el vacío es constante, o sea independiente de la dirección y de la velocidad de la fuente luminosa.*

Con esto tenemos ya un reloj-patrón, pues un "reloj bueno" será aquél que dé indicaciones proporcionales al camino que recorre la luz. Deberá avanzar un segundo por cada 300 000 km recorridos por un rayo luminoso.

Podremos también sincronizar dos relojes distantes que se encuentren en reposo uno respecto del otro. Para ello, desde el punto O, que puede ser el origen de coordenadas de nuestro sistema, se envía una señal luminosa a la hora cero indicada por el reloj situado en O. Si en el punto A, distante 300 000 km de O, se encuentra un reloj, este reloj estará sincronizado con el de O si indica un segundo al llegar allí la señal luminosa. En general, un reloj situado a la distancia d del origen, tendrá que indicar un tiempo igual a d/c en el momento de recibir la señal luminosa, para estar sincronizado con el reloj situado en O y de donde partió la señal en el instante cero.

Consideremos ahora un suceso cualquiera que, respecto del sistema de coordenadas S, ocurre en un lugar determinado por los tres números $x\,y\,z$. El instante *del sistema* S en que el suceso se produjo queda determinado por un cuarto número t, que será lo que indica un reloj fijo del sistema S, situado en la inmediata vecindad del punto $x\,y\,z$, y sincronizado con los demás relojes de S en la forma que ya se ha explicado.

Ese mismo suceso ocurrirá, para los observadores del sistema S′, en un lugar cuyas coordenadas son $x'y'z'$ y en el instante t' de ese sistema.

Dos acontecimientos serán simultáneos *respecto del sistema S* si a los dos les corresponde el mismo número t, pero puede ocurrir que a esos mismos acontecimientos les corresponda en el sistema S′ dos números diferentes, t'_1 y t'_2. Todos los relojes del sistema S están sincronizados entre sí; todos los de S′ marchan también sincrónicamente. Puede hablarse entonces de un tiempo del sistema S y de otro tiempo del sistema S′, pero es absolutamente imposible sincronizar los relojes de ambos sistemas. Ya veremos esto detenidamente más adelante. Ahora nos limitaremos a dar un ejemplo: Sea AB (fig. 22) la superficie de la Tierra, HH el horizonte de A y H′H′ el de B. Los pun-

tos P y Q están a la misma altura respecto del horizonte HH, en tanto que, respecto de H'H', Q está arriba y P debajo. Sustitúyanse las coordenadas z y z' por t y t' y se tendrá una imagen aproximada de lo que pasa con los tiempos de dos sistemas: "Igual altura respecto de" deberá sustituirse por "simultáneos respecto de"; "por debajo o por arriba del horizonte tal" se sustituirá por "antes o después del instante cero del sistema tal".

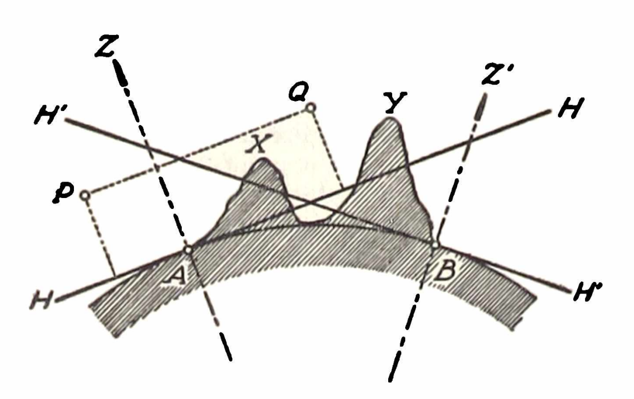


Fig. 22. — El abajo y el arriba, y el "antes" y "después".

Cuando los hombres creían vivir en una Tierra plana y tenían un concepto absoluto del abajo y del arriba, si alguien les hubiera explicado lo que precede, es posible que hubieran respondido así: "Entiendo que a los habitantes de la aldea A les parezca que está más alta la cumbre del cerro X que la del cerro Y, mientras los habitantes de B opinan lo contrario pero, aunque no lo podamos conocer, debe haber cierto orden en la altura de los diferentes puntos, un orden absoluto, independiente del lugar que se considere".

Sabemos bien que en el caso de la altura de un punto no tiene sentido hablar de la altura absoluta, pues la altura *es* un concepto relativo. No se trata aquí de que renunciemos, por impotencia, a buscar la *altura en sí* y que nos refugiemos por eso en *lo relativo*. Se trata de que la única altura de la cual podemos hablar con pleno sentido es la que definimos *con respecto* a tal plano horizontal. Y del mismo modo, el único tiempo del cual se puede hablar con pleno sentido es el tiempo que ha sido previamente definido y *en esa definición está implicado el sistema de referencia.*

Es al concepto vago y no definido de "tiempo absoluto" al que se debe sentenciar a muerte y ejecutar cuanto antes.

19. **Medida de longitudes.** — Para medir un segmento MN se va colocando la regla de medida unitaria sobre el mismo hasta ver cuántas veces cabe en aquél. Claro está que esta regla debe ser *rígida.* Dos señales efectuadas en un cuerpo sólido, como en el caso del metro-patrón, o las dos puntas de un compás, pueden servir para realizar esa operación. En particular, un segmento MN será igual a otro AB si llevados uno al lado del otro, la marca M coincide con A y la marca N con B. Pero

si tengo (fig. 23) la regla MN y en una primera operación le mostrara a usted que A coincide con M y luego, corriendo la regla de medida, le muestro que N coincide con B y pretendiera con ello hacerle creer que MN es igual a AB, usted me diría, con toda razón, que yo he hecho trampa. Es necesario, entonces, que los extremos *coincidan simultáneamente*. Esto es tan

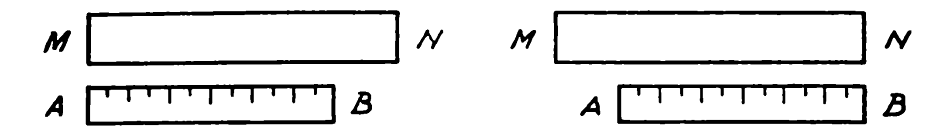


Fig. 23. — Al medir una longitud interviene el concepto de simultaneidad.

evidente que generalmente se omite especificar esta condición, pues, por lo común, cuando realizamos una operación de medida, la regla se encuentra en reposo con respecto al cuerpo que se mide. Pero el caso cambia si desde un sistema S se quiere medir la longitud de una varilla que se mueve, respecto de S, con cierta velocidad. Supongamos que queremos medir la longitud de un tren en movimiento, desde fuera, desde el sistema de la vía. Si corremos junto al tren y aplicamos nuestra regla de medida, eso equivale a medir el tren desde dentro. La longitud que así obtendríamos se llama *longitud propia*: la regla de medida y el cuerpo medido se encuentran en reposo uno respecto del otro. Pero lo que estamos buscando no es eso. Lo que pretendemos es medir la longitud del tren con reglas que se encuentren en reposo con respecto a la vía.

Quizá piense usted que plantearse semejante problema inútil es propio de personas totalmente desocupadas. Pero el siguiente ejemplo le probará que es indispensable, en muchos casos, medir —o saber cómo podría medirse— un cuerpo en movimiento. Supongamos que el tren marcha con la velocidad v y por el interior del tren y en el mismo sentido un ciclista avanza con la velocidad q respecto del tren. ¿Cuál es la velocidad que tiene el ciclista respecto de la vía? De acuerdo con las ecuaciones de transformación de Galileo, la velocidad resultante sería $v + q$. ¿Cómo se llega a este resultado? Razonando de la manera siguiente: En el instante cero, indicado por el reloj de la estación, el ciclista pasa frente a la misma. Al cabo de un tiempo t, indicado por el mismo reloj, la parte del tren donde estaba el ciclista en el instante cero, se alejó de nosotros en vt. Además, el ciclista se alejó de esa misma parte del tren cierto camino l' y los observadores del interior del tren, usando sus propios relojes, encuentran que $l' = qt'$. Este recorrido l' es, digamos, un trozo de tren que ha sido medido con reglas de medida situadas en su interior y en reposo respecto del mismo. La lon-

gitud l' es entonces la *longitud propia* de ese trozo de tren. Lo que el ciclista se alejó de la estación en el tiempo t, es:

$$x = vt + l$$

y si *se supone* que esta l es igual a l' y que $t = t'$, entonces sí se llega a la conclusión de que la velocidad resultante es $v + q$. Respecto de la suposición de que t sea igual a t', tenemos ya nuestras serias dudas y en cuanto al otro supuesto: $l = l'$, ¿qué significa? La longitud l es la longitud del trozo de tren recorrido por el ciclista y *medido desde la vía*, y su significado es que *en el instante final del intervalo t, los extremos de ese trozo coincidían con dos puntos de la vía que al medirlos dan la distancia l.* Luego, para medir la longitud A′B′ del trozo de tren, medimos la longitud AB de un trozo de vía, siempre que la coincidencia de A′ con A fuera *simultánea* (respecto de la vía) con la de B′ y B.

Vamos a representarnos que realizamos efectivamente esta

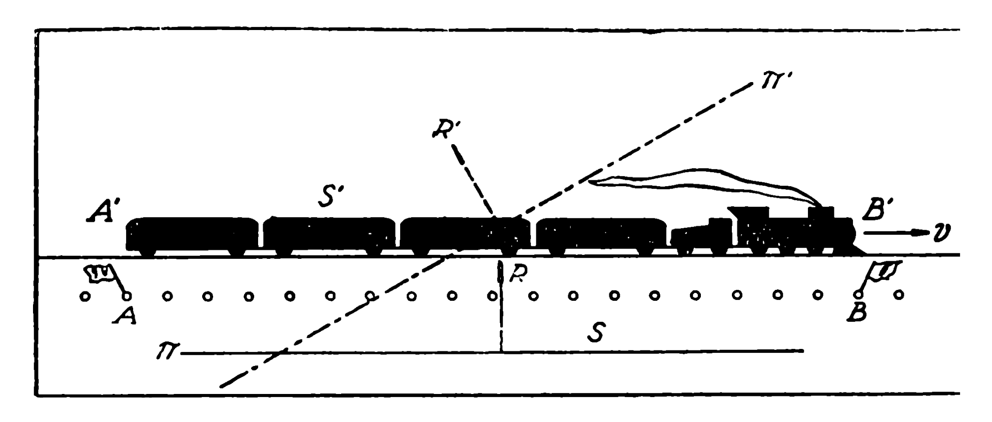


Fig. 24. — Medida de la longitud de un tren en movimiento.

operación. Para ello situamos a lo largo de la vía una serie de observadores (fig. 24), que hemos representado por puntos. Cada observador se halla provisto de un reloj y todos los relojes están perfectamente sincronizados. Los observadores reciben esta consigna: Los que vean pasar frente a ellos a la parte B′ o a la parte A′ del tren cuando los relojes indiquen una hora determinada (por ej., 30 seg), levantarán una bandera y se quedarán quietos en el lugar donde estaban. Los demás observadores, o sea aquellos que vieron pasar frente a ellos a las partes A′ ó B′ antes o después que su reloj indicara 30 segundos, están francos y pueden irse a descansar. A y B deben quedar firmes en sus puestos para darnos tiempo de poder medir con toda calma la distancia que los separa. Y esta distancia l, igual a la longitud del segmento AB, será, por definición, la

longitud del segmento móvil A'B' medida desde el sistema S. ¿Coincide l con la longitud propia l' del mismo segmento? Es fácil ver que no puede haber coincidencia. Para los observadores del tren, la medida llevada a cabo desde la vía ha sido mal hecha. Los acontecimientos correspondientes al izado de las banderas A y B no fueron, según ellos, simultáneos. Para darnos cuenta de esto pensemos que los acontecimientos A y B coincidan con la llegada de la luz de la onda plana π a esos puntos. Respecto de S', al rayo R perpendicular a π corresponde el R' perpendicular a π' y la luz llegará antes a B que a A. Los observadores del tren comprenden, entonces, porqué l resulta diferente de l'. La relatividad de la simultaneidad origina una relatividad en las medidas de longitudes de segmentos colocados en la dirección de la velocidad relativa.

20. **Las ecuaciones de Galileo y el principio de relatividad.** — De lo que precede se desprende claramente que las ecuaciones de transformación de Galileo deben ser abandonadas si se acepta que el principio de relatividad vale para toda la física. Dichas ecuaciones sólo podrán ser, a lo más, aproximadas.

Se trata ahora de encontrar las nuevas ecuaciones de transformación que satisfagan los dos postulados fundamentales de la teoría de la relatividad: el principio de relatividad y el postulado de la constancia de la velocidad de la luz que, como lo hicimos notar, es una definición indirecta del tiempo.

21. **Definiciones fundamentales.** — Tanto en el enunciado del principio de relatividad, como en el del postulado de la constancia de la velocidad de la luz, aparece la expresión: *sistemas inerciales*. Ya hemos visto (§ 2) que un sistema inercial de la mecánica clásica es aquel en que valen las leyes de la dinámica de Newton. Pero si deseamos fundamentar una mecánica nueva en la que se alteran, respecto de la antigua, los conceptos básicos de espacio y tiempo, ¿cómo podremos comenzar por una definición en la que aparecen las ecuaciones de la dinámica newtoniana? Estas ecuaciones también están en tela de juicio y por tal razón preferimos dar las definiciones siguientes:

Sistema inercial es aquel respecto del cual la luz se propaga en el vacío en línea recta en cualquier dirección. Se trata de las líneas rectas de la geometría de Euclides.

Postulado de la constancia de la velocidad de la luz:

En un sistema inercial la velocidad de la luz, en el vacío, es constante.

Esto significa que un reloj cualquiera del sistema, fijo en el punto A y que indica un tiempo t_1 cuando se envía una señal

luminosa que va de A a B y se refleja volviendo a A, debe indicar, al regreso de la luz, un tiempo t_2 tal que:

$$t_2 - t_1 = \frac{2 \, . \, AB}{c}$$

siendo c la velocidad de la luz en el vacío.

Principio de relatividad:

Cualquier sistema S′ que se traslada respecto de un sistema inercial S con movimiento rectilíneo y uniforme es equivalente a S.

La equivalencia entre S′ y S significa que todas las leyes de la naturaleza se cumplen de la misma manera, tanto referidas a S como a S′. En consecuencia, si la luz se propaga en línea recta en S (S es inercial), también se propagará rectilíneamente en S′ y de acuerdo con la definición dada, S′ será también inercial y valdrá para él el postulado de la constancia de la velocidad de la luz.

Hagamos notar que si un sistema K gira o se mueve con movimiento variado respecto de un sistema inercial S, respecto de K la luz no se propagará en línea recta en todas direcciones. Así, por ejemplo, el rayo que respecto de S (fig. 25) recorre la recta AB, recorrería una hélice AC con respecto a un sistema que girara alrededor del eje OO′, y el rayo que sigue la recta r, respecto de S, recorre un arco de curva PQ respecto del sistema K, que se mueve respecto de S con la aceleración constante a. (En la figura se ha supuesto que K inicia su movimiento acelerado en el instante en que la luz llega a P).

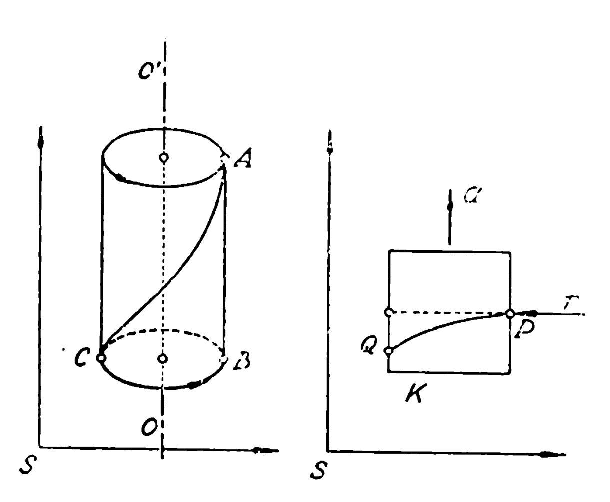


Fig. 25. — En los sistemas inerciales la luz se propaga en línea recta.

22. **Las ecuaciones de transformación de Lorentz.** — Sea S un sistema inercial en el cual tenemos un sistema de coordenadas $x\,y\,z$ que se podrá pensar constituído por tres varillas rígidas y rectilíneas que se cortan en el punto O, formando un triedro trirrectángulo. En este sistema, las coordenadas $x\,y\,z$

de un punto cualquiera podrán determinarse utilizando una regla de medida unitaria. Se supone, además, que estas medidas satisfacen a la geometría de Euclides. En el sistema S se tienen también relojes sincronizados por el procedimiento ya explicado y cuya marcha satisface al postulado de la constancia de la velocidad de la luz. De este modo, se podrá indicar el tiempo t en que se produce determinado suceso en el lugar $x\ y\ z$. El tiempo t del suceso será simplemente lo que indica un reloj colocado en la inmediata vecindad del lugar donde aquél ocurre.

Sea ahora un sistema S′ que se traslada en línea recta y con movimiento uniforme respecto de S y en el sentido positivo del eje x de este sistema. También en S′ tenemos un sistema de coordenadas $x'y'z'$ de origen O′, una regla de medida igual a la de S, así como relojes idénticos a los de aquel sistema. Los relojes fijos en el sistema S′ también han sido sincronizados entre sí y su marcha satisface, naturalmente, al postulado de la constancia de la velocidad de la luz.

Supondremos que el eje x' del sistema S′ coincide con el eje x del sistema S y los ejes y é y', así como los z y z', se mantienen paralelos durante el movimiento. Esto es posible porque se trata de un movimiento de traslación que puede definirse así: S′ se traslada respecto de S si un segmento rectilíneo cualquiera, fijo en S′, tiene, en cualquier instante del sistema S, una dirección invariable, o sea que se mantiene siempre paralelo a una dirección fija de S. Consideraremos, además, que al coincidir los orígenes O y O′ de ambos sistemas, un reloj de S situado junto a O indica tiempo cero, y otro reloj de S′ situado junto a O′ indica también tiempo cero.

Si ocurre un acontecimiento que los observadores del sistema S registran que ha ocurrido en el lugar determinado por las coordenadas $x\ y\ z$ de su sistema y en el instante t, y los observadores de S′ ubican al mismo suceso en el punto $x'y'z'$ de su sistema y en el instante t', indicado por sus relojes, se trata de encontrar las funciones que permitan pasar de un sistema a otro, o sea que se pueda calcular $x'y'z't'$, si se conocen $xyzt$, o viceversa.

Por lo pronto, es fácil darse cuenta que, con la disposición adoptada para los ejes, deberá tenerse:

[1] $$y' = y \quad ; \quad z' = z .$$

Esto significa que una varilla situada en uno de los sistemas perpendicularmente a la velocidad relativa, tiene una longitud que no depende del sistema desde el cual se la mide. La longitud de uno de los ejes de hierro de un tren medida desde el tren, la longitud propia, es igual a la longitud del mismo eje medida desde la vía y que coincide con la distancia que separa ambos rieles. Como el eje x coincide con el x', si consideramos

un rayo de luz que se propaga respecto de S siguiendo el eje de las x, respecto de S′ ese rayo seguirá el eje x'. Por lo tanto, en la dirección de la velocidad no se produce el fenómeno de la aberración de la luz, y si consideramos un plano perpendicular a aquella velocidad, dicho plano podría coincidir con la superficie de onda de la luz proveniente de un punto muy lejano situado sobre el eje de las x. Si sobre este plano se producen dos acontecimientos P y Q simultáneos respecto de S, los mismos serán también simultáneos con respecto a S′, pues la superficie de onda que hacemos pasar por PQ es común a ambos sistemas. Por esta razón, las medidas de S y S′ coinciden cuando se efectúan sobre segmentos colocados en un plano perpendicular a la velocidad relativa y fijo a cualquiera de los dos sistemas.

Puede demostrarse esto mismo del modo siguiente. En lugar de suponer que sea $y' = y$ supongamos que se cumpla

[2] $$y' = \varphi(v)y$$

siendo $\varphi(v)$ cierta función de la velocidad. Claro está que para z' y z tendrá que valer una relación idéntica a la anterior $(z' = \varphi(v) . z)$.

Consideremos otro sistema S″ que se mueva respecto de S′ con la velocidad q. Los ejes del sistema S″ están dispuestos de modo que sea y'' paralelo a y' y z'' paralelo a z'. Deberá tenerse

[3] $$y'' = \varphi(q) . y'.$$

Reemplazando en [3] el valor de y' dado en [2] relacionaremos las medidas de S″ con las de S, y así tendremos

[4] $$y'' = \varphi(q) . \varphi(v) y.$$

Supongamos ahora que q sea igual a $-v$. En este caso, S″ estará en reposo respecto de S y deberá ser $y'' = y$, por lo cual

[5] $$\varphi(-v) . \varphi(v) = 1.$$

Además, se comprende que si desde un sistema S se mide un segmento móvil colocado transversalmente al movimiento, el resultado de la medida no puede depender de la dirección en que la varilla se mueva. Cuando mucho, sólo podrá depender del módulo de la velocidad y, en consecuencia, tendrá que ser

[6] $$\varphi(-v) = \varphi(v).$$

De la [5] y la [6] resulta que necesariamente debe ser

[7] $$\varphi(v) = 1.$$

El caso $\varphi(v)$ igual a menos uno, correspondería a tomar los ejes en sentidos opuestos.

En la figura 26 se ha representado la posición de los ejes de los dos sistemas S y S′ *en el instante t del sistema* S. Como en el instante cero de S, O coincidía con O′, en el instante t de S, $OO' = vt$, pues v es la velocidad de S′ respecto de S. Supondremos que en el instante cero de S un rayo de luz parte desde O, entonces coincidente con O′, siguiendo una trayectoria que, respecto de S′, coincide con el eje y' de dicho sistema. Respecto de S seguirá una dirección tal como OP, que forma el ángulo α con el eje y. De modo, pues, que la luz partió de O en el instante cero y llegó a P en el instante t. La distancia OP debe ser igual a ct.

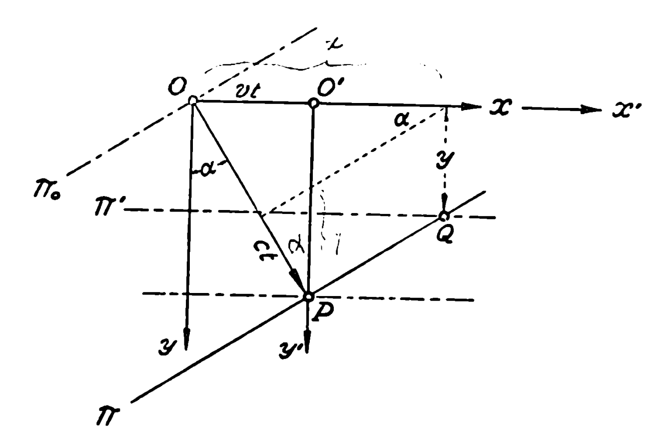


Fig. 26. — Sobre las fórmulas de Lorentz.

El ángulo α medido por los observadores de S es, entonces,

$$[8] \qquad \operatorname{sen} \alpha = \frac{v}{c} \; ; \; \left(\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right).$$

A este ángulo α lo llamaremos *ángulo de aberración principal de los dos sistemas*. Para el rayo OP que estamos considerando, es $z = 0$ en todo momento, por lo cual será también, de acuerdo con [1], $z' = 0$. El rayo se propaga en el plano xy de S y respecto de S′ en el plano $x'y'$.

Consideremos ahora la onda plana correspondiente al rayo OP. En el instante cero será un plano tal como π_0 y en el instante t la luz habrá llegado a todos los puntos del plano π. Los acontecimientos de la llegada de la luz al plano π son simultáneos respecto de S, *pero no respecto de* S′.

Para el sistema S′, cuando la luz llega al punto Q, la superficie de onda es el plano π' y cuando llega a P, el plano paralelo a π' que pasa por ese punto, etc. El acontecimiento de la llegada de la luz a Q es registrado por los observadores de S como ocurrido en el lugar de coordenadas $x\,y\,z$ y en el instante t. Para S′, eso ocurre en un punto $x'y'z'$ de su sistema y en el instante t' indicado por sus relojes.

Se ve en la figura, *hecha para el sistema* S, *en el instante t de ese sistema,* que

$$ct = x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha$$

de donde

[9] $$y = \frac{ct - x \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} .$$

En el sistema S′ la luz se propaga paralelamente al eje y' y los relojes de S′ marchan de acuerdo con el postulado de la constancia de la velocidad de la luz. Por esta razón, cuando el punto Q es alcanzado por la luz, los observadores de S′ encontrarán que

[10] $$y' = ct' ,$$

pues la onda π' pasa por Q, t' segundos después que por O′. Como debe ser de acuerdo con [1] $y = y'$, se tendrá:

[11] $$ct' = \frac{ct - x \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$$

o sea, teniendo en cuenta la [8]:

[12] $$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} .$$

Consideremos ahora que cuando O y O′ coincidían, hubiera partido desde allí un rayo luminoso en el sentido positivo de las x. Para el sistema S, el rayo recorre en un tiempo t un segmento de origen O y cuyo extremo se encuentra en

[13] $$x = ct$$

y para S′ el rayo recorrerá sobre el eje x', en el tiempo t', el segmento de origen O′ y de extremo

[14] $$x' = ct' .$$

De aquí, multiplicando la [12] por c y reemplazando en el segundo miembro x/c por t (de acuerdo con [13]), se tiene:

[15] $$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} .$$

Las ecuaciones de transformación buscadas, llamadas ecuaciones de LORENTZ, son, entonces:

[16] $$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad ; \quad y' = y \quad ; \quad z' = z \quad ;$$

[16] $$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

En esta deducción aplicamos el principio de relatividad al suponer que en ambos sistemas la superficie de onda es perpendicular a la dirección de propagación de la luz. Además, las [16] valdrán solamente para sistemas inerciales, pues de acuerdo con la definición dada, sólo en ellos la luz se propaga en línea recta en cualquier dirección.

23. **Advertencia importante respecto de las figuras.** — Cuando en una figura representamos algo en movimiento, la tal figura pretende ser como una fotografía instantánea; en ella se representa la posición simultánea, en un determinado instante, de los puntos que se mueven. Si se tienen dos sistemas S y S′ de referencia, en movimiento relativo, se podrá hacer *una* figura para el instante t de S y *otra* figura para el instante t' de S′. Pero la figura hecha respecto de S no es apta para representar las cosas de S′, precisamente por la relatividad del tiempo. Si usted, observando la fig. 26, preguntara: *¿Dónde se encuentra la superficie de onda* π' *del sistema* S′ *cuando la superficie de onda del sistema* S *alcanza el plano* π*?*, demostraría con ello que aún no ha logrado arrancar de su cabeza el concepto de tiempo absoluto. No se aflija por ello, se trata de algo difícil, tan difícil como sería explicar las relaciones de altura de la fig. 22 dibujando un solo horizonte. La pregunta que usted formula no puede responderse por esta razón: suponga que el instante t de S son 10 segundos. Respecto de S, la luz llega al plano π cuando todos los relojes de S marcan 10 segundos. Esto significa que la distancia OP, medida desde S, es igual a 300 000 × 10 kilómetros. Pero cuando los relojes de S indican 10 segundos, los de S′ pueden indicar cualquier cosa: t' depende de t y de x. Para S′, el acontecimiento de la llegada de la luz a Q (véase la fig. 26) se produce cuando los relojes de S′ indican 5 seg (si fuera y' para Q igual a 300 000 × 5 km), y a P cuando indican por ejemplo 8 segundos si para ese punto fuera $y' = 300\,000 \times 8$ km. La pregunta formulada equivale a la siguiente: Cuando los relojes de S marcan 10 seg, ¿cuánto indican los relojes de S′? Respuesta: los relojes de S′ indican tiempos diferentes según sea su posición. Y recíprocamente: Cuando los relojes de S′ indican 10 seg los de S pueden marcar cualquier cosa. El *cuándo* de la pregunta formulada significa: en el instante tal del sistema tal, y tiene pleno sentido preguntar qué es lo que ocurre en tal sistema cuando sus relo-

jes marcan todos tal hora. Pero preguntar: ¿qué ocurre en el sistema S′ cuando los relojes de S marcan tal hora?, no tiene sentido, pues para S′ no hay un instante único que corresponda al *cuándo* de la pregunta. Aclaremos esto con un ejemplo numérico. Sea un larguísimo tren (sistema S′) (fig. 27) que se desplaza respecto de la vía (sistema S) con una velocidad v tal que

$$\frac{v}{c} = \frac{3}{5}.$$

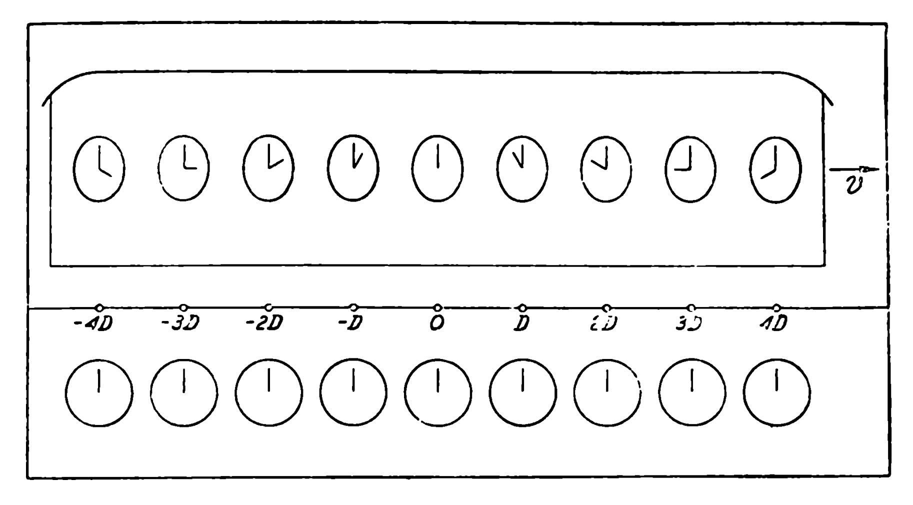


Fig. 27. — Para los observadores de la vía, los relojes del tren no marchan sincrónicamente.

En la figura se ha supuesto que la distancia OD es:

$$OD = 300\,000 \times 80 \times 60 \text{ km} = D \quad ;$$

o sea igual a 80 minutos-luz.

Si en la fórmula [12] que da t' en función de t hacemos $t = 0$, para un valor $x = D$, resulta:

$$t' = -\frac{5}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{D}{c} = -3\,600 \text{ seg} = -1 \text{ hora}.$$

Para $x = 2D$ será $t' = -2$ horas, etc. La figura está hecha para el valor $t = 0$ del sistema S. Todos los relojes de S indican, en consecuencia, la hora cero, que podemos identificar con las 12 del día. En la figura se ve lo que indican los relojes del tren que se enfrentan a los observadores del sistema S y puede considerarse a la tal figura como una fotografía instantánea tomada desde S a las 12 del día. Si preguntáramos: ¿Qué hacen los pasajeros del tren a mediodía, *cuando* nosotros estamos

almorzando? La respuesta la obtendríamos de lo que nos comunicarían los diferentes observadores del sistema S apostados a lo largo de la vía, y por las cartas recibidas, documentadas con fotografías, sabríamos que a las 12 del día, de nuestros relojes, los pasajeros situados en la parte delantera del tren duermen todavía, pues sus relojes indican las 7 de la mañana; que los situados algo más atrás se están desayunando y que sólo los de la parte central del tren almuerzan al mismo tiempo que nos-

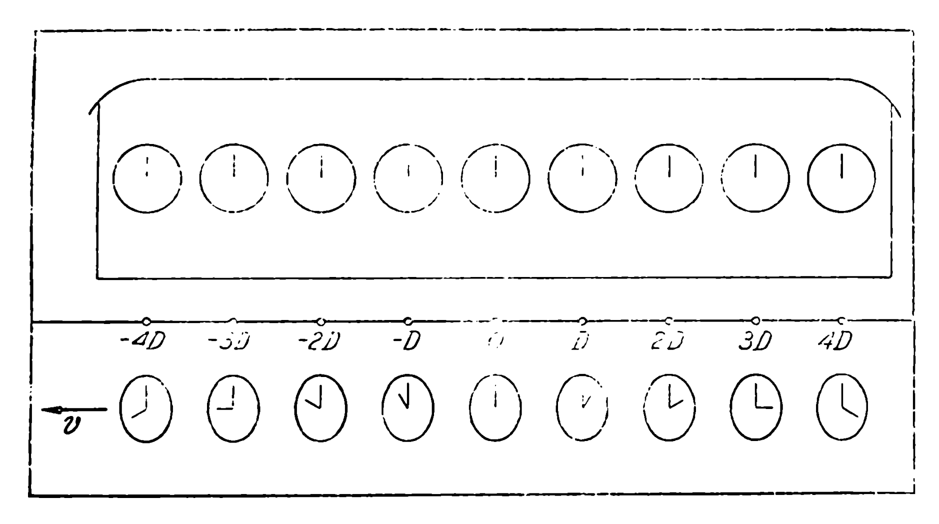


Fig. 28. — **Para los observadores del tren, son los relojes de la vía los que no marchan al unísono.**

otros, pues los situados algo más atrás están durmiendo la siesta y los de la cola se preparan ya para cenar. ¡Qué bochinche, qué desorden! Indignados, dirigimos un telegrama al jefe del tren, le adjuntamos las fotografías tomadas por nuestros ayudantes y le pedimos que arregle sus relojes una vez por todas. El jefe del tren nos contesta: "Aquí reina un orden perfecto, todo el mundo se levanta a las 8 de la mañana y todo el mundo se sienta a la mesa exactamente a mediodía. Le adjunto una fotografía formada con instantáneas tomadas por mis ayudantes cuando nuestros relojes indicaban las 0 hora (fig. 28), y dicha fotografía prueba en forma concluyente que los que deben arreglar los relojes y llevar una vida más ordenada son ustedes".

24. Inversión de las fórmulas de Lorentz. — Si de las [16] calculamos $x\,y\,z\,t$ en función de $x'y'z't'$, obtenemos

[17] $$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\;;$$

[17] $$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad ; \quad y = y' \quad ; \quad z = z'.$$

Como era de esperar, estas fórmulas difieren de las [16] sólo en el signo de v.

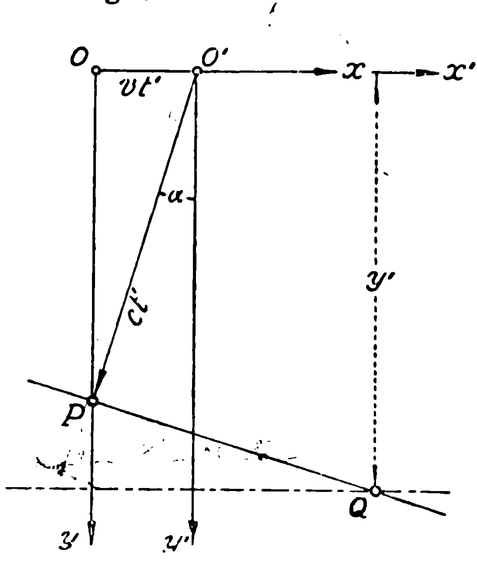


Fig. 29. — Inversión de las fórmulas de Lorentz.

Pueden ser obtenidas directamente, suponiendo ahora que un rayo de luz se propaga sobre el eje y a partir del instante en que O y O′ estaban en coincidencia. Para el sistema S′ —la figura 29 está hecha para el instante t' de S′— el trayecto real de la luz es O′P y en el instante t' de S′ la luz (suponiendo una onda plana) llega al plano PQ. El acontecimiento de la llegada de la luz al punto Q$(x'y'z't')$ es registrado en el lugar $x\,y\,z$ del sistema S y en el instante t de dicho sistema. Se ve en la figura que

$$ct' = y' \cos \alpha - x' \operatorname{sen} \alpha$$

y de aquí

$$y' = y = ct = \frac{ct' + x' \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha},$$

de donde, prosiguiendo como antes, se obtienen las [17].

25. **Seno versus tangente.** — Si suponemos que el sistema S de la fig. 30 (a) fuera el sistema S_0 de la física clásica, o sea el sistema del éter en reposo, y consideramos un rayo que se propague según el eje y, diríamos que OA es la trayectoria *real* y O′A la trayectoria *aparente*. Por esta razón, consideraríamos que OA $= ct$; OO′ $= vt$; y de aquí

[18] $$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{c}.$$

Si, en cambio (parte (b) de la figura), el rayo se propaga sobre el eje y', la "trayectoria real" sería ahora OB, siendo O′B

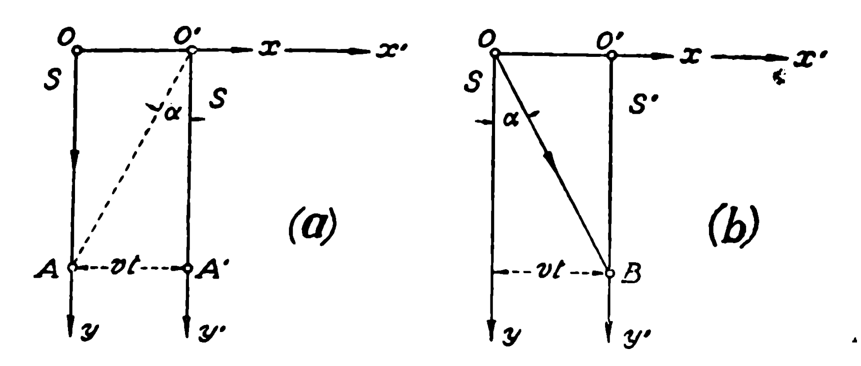


Fig. 30. — Seno versus tangente.

sólo la "trayectoria aparente" y tendríamos así, para el ángulo α, la expresión:

[19] $$\operatorname{sen} \alpha = \frac{vt}{ct} = \frac{v}{c} .$$

De modo, pues, que, en la teoría clásica, hay que tomar para el ángulo de aberración la tangente cuando el rayo se propaga en el éter perpendicularmente a la velocidad v, y el seno cuando el trayecto normal a la velocidad se efectúa en el sistema móvil. La no igualdad de ambos casos revela la no equivalencia de los sistemas S y S′ y, por lo tanto, la no validez del principio de relatividad. En la teoría de la relatividad se tiene para ambos casos, pues los dos sistemas son equivalentes, y los "dos" casos son, en el fondo, uno solo que

[20] $$\operatorname{sen} \alpha = \frac{v}{c} ,$$

pues en el caso (a) el trayecto real para S′ es O′A igual a ct', siendo $AA' = vt'$.

Por lo tanto:

Si en uno de los sistemas la luz se propaga perpendicularmente a la velocidad relativa, en el otro la luz se propaga formando un ángulo α con un plano normal a la velocidad tal que su seno es igual al cociente v/c.

Ya hemos dicho que a este ángulo lo llamamos ángulo de aberración principal entre los dos sistemas.

26. Deducción analítica de las fórmulas de Lorentz. — Si S es un sistema inercial, la luz se propaga en él en línea recta de acuerdo con la definición (§ 22), y si S′ se traslada con movimiento rectilíneo y uniforme respecto de S, los sistemas S y

S′ serán equivalentes de acuerdo con el principio de relatividad, por lo cual S′ será también inercial y la luz se propagará también, respecto de S′, en línea recta. Además de la trayectoria rectilínea, la propagación de la luz será uniforme debido a la constancia de c, por lo cual las fórmulas de transformación que vinculen $x'y'z't'$ de S′ con $x\ y\ z\ t$ de S, deberán ser necesariamente lineales. Los coeficientes podrán depender de la velocidad relativa de ambos sistemas, que se supone (traslación uniforme y rectilínea) que es constante. Las fórmulas de pasaje serán, entonces, del tipo

[21]
$$\begin{aligned} x' &= A_1x + A_2y + A_3z + A_4t \quad ; \\ y' &= B_1x + B_2y + B_3z + B_4t \quad ; \\ z' &= C_1x + C_2y + C_3z + C_4t \quad ; \\ t' &= D_1x + D_2y + D_3z + D_4t \quad . \end{aligned}$$

En estas relaciones faltan los términos independientes, porque se ha supuesto que si $x = y = z = t = 0$, será también $x' = y' = z' = t' = 0$, lo que significa que los orígenes de coordenadas coinciden cuando los relojes de ambos sistemas, colocados junto a dichos orígenes, marcan el tiempo cero.

Cuando se trata de un movimiento de traslación, podemos elegir los ejes x y x' coincidiendo con la velocidad relativa y los ejes y é y', así como z y z' paralelos entre sí, con lo cual resultará x' independiente de y y de z, o sea

[22] $$A_2 = A_3 = 0.$$

También debe ser, por la disposición adoptada para los ejes, y' independiente de x, y, t, y z' independiente de x, y, t, por lo cual

[23] $$B_1 = B_3 = B_4 = C_1 = C_2 = C_4 = 0.$$

Las [21], con [22] y [23], se convierten en

[24]
$$\begin{aligned} x' &= A_1x + A_4t \quad ; \\ y' &= B_2y \quad ; \\ z' &= C_3z \quad ; \\ t' &= D_1x + D_2y + D_3z + D_4t \quad . \end{aligned}$$

Según esto, x' es sólo función de x y t, por lo cual deberá ser x sólo función de x' y t', y, por tanto,

[25] $$D_2 = D_3 = 0.$$

De las expresiones que dan y' y z', obtenemos

[26] $$y = \frac{1}{B_2}\,y' \quad ; \quad z = \frac{1}{C_3}\,z'.$$

Los coeficientes B_2 y C_3 podrán ser funciones de la velocidad,

pero serán necesariamente funciones pares: $f(v) = f(-v)$ y al pasar de S′ a S o de S a S′, lo único que cambia es el signo de la velocidad, por lo cual deberá tenerse, de acuerdo con [24]:

[27] $$y = B_2 y' \quad ; \quad z = C_3 z'.$$

De [26] y [27] resulta:

[28] $$B_2 = \frac{1}{B_2} \quad ; \quad C_3 = \frac{1}{C_3}$$

de donde

[29] $$B_2 = \pm 1 \quad ; \quad C_3 = \pm 1.$$

Los valores —1. significarían tomar los ejes paralelos pero orientados en sentido opuesto. Por esta razón tomaremos:

[30] $$B_2 = C_3 = +1.$$

Con [25] y [30], las [24] se escriben

[31] $$\begin{aligned} x' &= A_1 x + A_4 t \\ t' &= D_1 x + D_4 t \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

y sólo faltan determinar los cuatro coeficientes $A_1\ A_4\ D_1\ D_4$.

Si S′ se traslada respecto de S con la velocidad v, para $x' = 0$ deberá ser $x = vt$, o sea

$$A_1 vt + A_4 t = 0$$

de donde

[32] $$A_4 = -A_1 v$$

con lo que

[33] $$x' = A_1 (x - vt).$$

Si calculamos x en función de x' y t', utilizando la [33] y la segunda de [31], se obtiene:

[34] $$x = \frac{D_4}{A_1 (D_4 + D_1 v)} x' + \frac{v}{D_4 + D_1 v} t'.$$

Por otra parte, la expresión de x en función de x' y t' debe ser exactamente igual a la expresión que da x' en función de x y t, con la única diferencia de que aparecerá aquí la velocidad v con signo opuesto. Se tendrá, entonces, que (véase la [33]):

[35] $$x = A_1 (x' + vt').$$

Al escribir esta expresión se ha supuesto que A_1 es una función par de la velocidad, tal que si ella es una $\varphi(v)$ deberá ocurrir que $\varphi(v) = \varphi(-v)$.

Esto debe ser así, porque el principio de relatividad implica —al hacer equivalentes a los sistemas que se trasladan en cualquier dirección— lo que podría llamarse una isotropía del espacio, por lo cual A_1 puede depender del módulo de la velocidad, pero no de la dirección que tenga ese vector.

Si igualamos ahora los coeficientes correspondientes de [34] y [35], resulta:

$$A_1 = \frac{D_4}{A_1(D_4 + D_1 v)} \quad ; \quad A_1 = \frac{1}{D_4 + D_1 v} \quad ;$$

de donde

[36] $$D_4 = A_1 \quad ; \quad D_1 = \frac{1 - A_1^2}{A_1 v} .$$

Haciendo ahora $A_1 = A$ para simplificar la escritura, la [33] y la segunda de [31], con los valores [36] pueden escribirse:

[37] $$x' = A(x - vt) \quad ; \quad t' = A\left(t - \frac{A^2 - 1}{A^2 v}\, x\right) \quad ;$$

con lo cual, el único coeficiente que queda por determinar es A. Observemos que hasta ahora sólo hemos hecho uso del principio de relatividad. Las ecuaciones de Galileo se obtienen si se postula $A = 1$, que saldría de admitir $t' = t$.

Las ecuaciones de Lorentz se obtienen ahora de inmediato con el postulado de la constancia de la velocidad de la luz. Basta suponer, en efecto, que un rayo de luz se propaga sobre el eje de las x pasando por el origen O en el instante $t = 0$, cuando O coincidía con O′ y era también para ese punto $t' = 0$, con lo cual será:

[38] $$\frac{x'}{t'} = c \quad ; \quad \frac{x}{t} = c \quad ;$$

y de aquí, dividiendo las [37], resulta:

$$c = \frac{x - vt}{t - \dfrac{A^2 - 1}{A^2 v}\, x} = \frac{c - v}{1 - \dfrac{A^2 - 1}{A^2 v}\, c}$$

de donde

[39] $$\frac{A^2 - 1}{A^2 v} = \frac{v}{c^2}$$

y

[40] $$A = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} .$$

Con este valor de A, que como se ve es una función par de v, las [37] se convierten en las fórmulas de Lorentz [16].

27. Representación gráfica de las fórmulas de Lorentz. — Cuando el autor de este libro, que es un intuitivo incorregible, encontró la representación gráfica que se explicará a continuación, experimentó una gran alegría, pues ello le permitió *ver* y entender así, de un solo golpe, el *lío* de los relojes. Espera, naturalmente, lograr que el lector experimente la misma satisfacción. Sobre el *lío* de los relojes habría mucho que decir. El autor conoce a matemáticos de primer orden, especialistas en la teoría de la relatividad, que manejan los tensores como usted la tabla de multiplicar, y que confiesan sin ningún escrúpulo: "Yo nunca entendí ese espantoso lío de los relojes". La representación de *Minkowski*, que estudiaremos más adelante, no ayuda gran cosa para *ver* el asunto, pues si opera con tiempo real utiliza para cada sistema una unidad diferente de medida y al operar con tiempo imaginario, como ya veremos, el cambio de un sistema a otro equivale a una rotación de ejes en un ángulo también imaginario, y, claro está, con ello no puede *verse* nada, aunque la elegancia de la exposición del conjunto de la teoría, por este procedimiento, resulta realmente insuperable.

Que es necesario dar una representación clara del asunto y que dicha representación ha de ser útil para los simples mortales que no disponemos de un cerebro como el de Einstein, es evidente. Tratadistas prestigiosos suelen decir cosas absurdas al tratar de la cuestión. Así, por ejemplo, en el tratado de O. D. CHWOLSON (tomo XII de la edición castellana) se puede leer:

"El autor (CHWOLSON) está plenamente convencido que la introducción de relojes en la exposición del principio de la relatividad no puede tener utilidad alguna, no explica nada y sólo puede estorbar a la inteligencia y conducir a errores; la noción de la hora nada tiene que ver con el principio de la relatividad, es por completo ajena al mismo". Y líneas más abajo y subrayado: "*Comparando las argumentaciones de los distintos autores sobre este punto se encuentran las contradicciones más evidentes*".

Poco antes, el mismo autor decía: "Un reloj es un instrumento *físico*; hay relojes de resorte y de péndulo; pero cualquier cuerpo que repite periódicamente un mismo movimiento puede servir de reloj; por ejemplo, una rueda dentada montada sobre un eje animado de un movimiento de rotación uniforme, un electrón cuyas vibraciones produzcan ondas electromagnéticas de longitud de onda determinada, etc. Parece del todo imposible decir cómo se comportará un instrumento físico semejante en las circunstancias estudiadas por la teoría de la relatividad. No se puede determinar *a priori* la acción que ejercerá sobre dicho instrumento la velocidad relativa".

Es como si dijéramos: La noción de la "altura" (en lugar

de la hora o el tiempo) nada tiene que ver con los planos de referencia (horizontes de los diferentes lugares de la Tierra); puede determinarse la altura de un punto utilizando reglas de madera o de hierro o cualquier otro instrumento y no se puede determinar *a priori* la influencia que podría ejercer sobre las varillas empleadas para medir la altura la distancia existente entre ese lugar y otro (en lugar de velocidad relativa). ¡Influencia de la velocidad relativa sobre los relojes! Según esto, la marcha del reloj que tengo frente a mí sería influída por el hecho de que algún señor de este planeta o de cualquier otro resolviera salir a pasear en auto o en avión con su familia. Claro está que el culpable de que se pueda llegar a decir esto es el *tiempo absoluto*, que guió sin duda la mano de Chwolson cuando escribió lo que se acaba de leer. ¿Qué significa esa rueda que se mueve con "movimiento uniforme"? ¿Cómo definiría Chwolson al movimiento uniforme sin disponer de un reloj? ¿Qué es un reloj? ¿Cómo se lo puede definir sin caer en un círculo vicioso?

Se toma por conocimiento lo que es una simple convención. El postulado de la constancia de la velocidad de la luz permite distinguir entre un reloj bueno y otro malo. La rueda se moverá con movimiento uniforme si el ángulo que recorre uno de sus radios resulta proporcional al camino recorrido por la luz en el intervalo de tiempo en que aquél, el radio, pasa de una

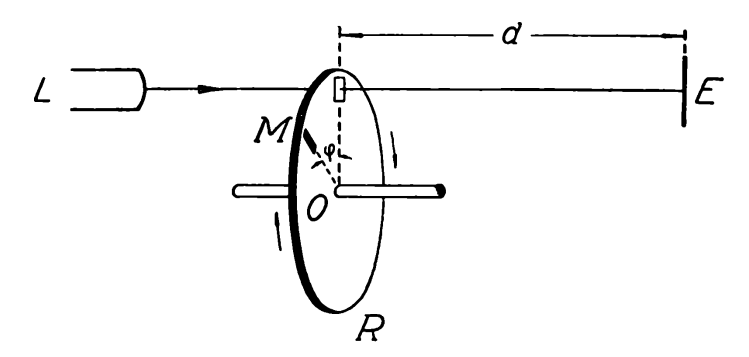


Fig. 31. — Un reloj mecánico contrastado con un "reloj de luz".

posición a otra, con el agregado de que debemos encontrarnos en un sistema inercial. El esquema de la fig. 31 muestra cómo, en principio, podría determinarse si la rueda R marcha con movimiento uniforme. La luz sale de la linterna L, pasa a través de una ranura practicada en la rueda y, después de reflejarse en el espejo E, incide en M. Si variando la distancia *d*, resulta φ proporcional a *d*, el movimiento de rotación será uniforme y la rueda será un buen reloj, al cual se le podrán aplicar todas las consecuencias de la teoría de la relatividad.

Después de esta introducción pasemos a explicar la representación prometida. Con las coordenadas yy'; zz'; no hay problema alguno. El problema se presenta al querer interpretar el verdadero significado de las otras dos fórmulas dadas en [16]. Si se introduce el ángulo de aberración principal α entre los dos sistemas, dado en [8], las fórmulas correspondientes a x' y t' dadas en [16], podrán escribirse:

[41] $$x' = \frac{x - ct \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \quad ; \quad ct' = \frac{ct - x \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} .$$

Hagamos ahora

[42] $$ct = u \quad ; \quad ct' = u' .$$

Las nuevas variables u y u' miden los tiempos de los dos sistemas en unidades de longitud, correspondiendo a cada segundo una longitud de 300 000 km.

De este modo, las [41] adquieren la forma:

[43] $$x' = \frac{x - u \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \quad ; \quad u' = \frac{u - x \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} .$$

Se ve que la segunda es idéntica a la primera, pues se pasa de una a otra sólo con permutar las letras:

$$x' \text{ con } u' ,$$
$$x \text{ con } u .$$

Comenzaremos por representar los acontecimientos del sistema S en un sistema de coordenadas oblicuo, en el cual los ejes xu forman entre sí un ángulo igual a $\pi/2 + \alpha$ (fig. 32).

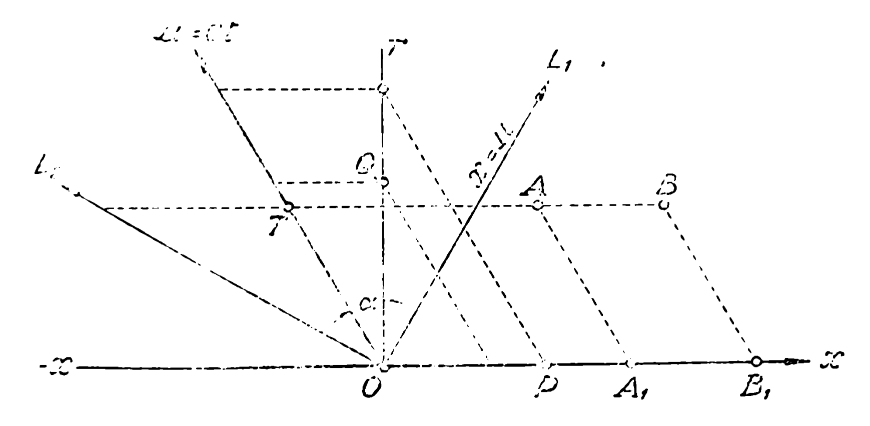


Fig. 32. — Sistemas de ejes oblicuos para representar los sucesos.

Un punto en reposo P sobre el eje x estará representado por una recta paralela al eje u del tiempo, pues $x = \mathrm{OP} =$ constante. Las rectas $u =$ constante son paralelas al eje x y si con-

sideramos dos puntos cualesquiera A y B, situados sobre una de estas rectas, dichos puntos representarán dos acontecimientos simultáneos, respecto del sistema S, ocurridos en el instante determinado por la longitud del segmento OT y que tienen lugar en los puntos A_1 y B_1 del eje de las x.

Un rayo de luz que se propaga en el sentido positivo del eje de las x y que parte del origen en el instante cero, tiene por ecuación:

$$x = ct \quad ; \quad \text{o sea:} \quad x = u \quad ;$$

y estará representado por la recta OL_1, bisectriz del ángulo que forman los ejes xu. En cambio, un rayo que parte de O en el instante cero, hacia el lado negativo del eje x, tendrá por ecuación

$$x = -ct \quad ; \quad \text{o sea:} \quad x = -u \quad ;$$

cuya representación es la recta OL_2, bisectriz del ángulo $-xOu$.

Veamos ahora qué ecuación tendrá una recta tal como la r que pasa por el origen O y es perpendicular al eje x formando, en consecuencia, con el eje u el ángulo α. Para un punto Q cualquiera de esta recta se ve, con sólo observar la figura, que se cumple

$$x = u \operatorname{sen} \alpha$$

y como $\operatorname{sen} \alpha$ se ha tomado igual a v/c, resulta:

$$x = ct \cdot \frac{v}{c} = vt.$$

La recta r representa, entonces, un punto que partió del origen O en el instante cero y que se desplaza en el sentido positivo del eje x con la velocidad v. Consideremos ahora al sistema S′, cuyo origen O′ se desplaza en el sentido positivo de las x con velocidad v, habiendo partido del origen O en el instante cero. La representación del movimiento del origen O′ respecto del sistema S será justamente la recta r. Pero O′ está en reposo respecto de S′, por lo cual deberemos tomar a la recta r de la fig. 32 como eje del tiempo u' del sistema S′ (fig. 33). Falta ubicar ahora al eje x' de S′. Respecto de

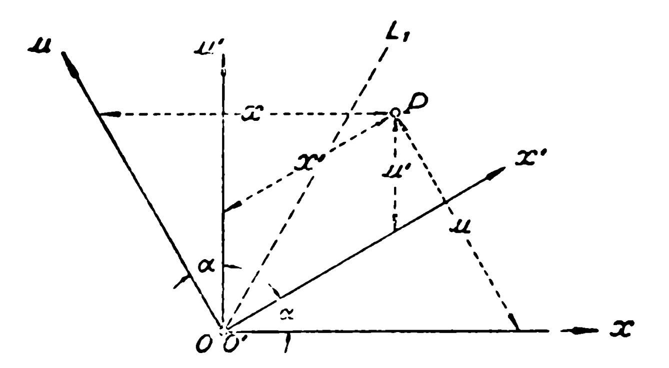


Fig. 33. — Representación gráfica de las fórmulas de transformación de Lorentz.

S′, un rayo de luz que se propaga sobre el eje x' y en sentido positivo, tiene por ecuación

$$x' = ct' \quad ; \quad x' = u'$$

si partió del origen O′ en el instante $t' = 0$. Por esta razón, la recta OL_1 deberá ser bisectriz del ángulo $u'O'x'$. Por lo tanto, tomaremos al eje x' perpendicular al eje u del sistema S.

Tratemos ahora el problema puramente geométrico de hallar las coordenadas $x'u'$ de un punto P, si se conocen sus coordenadas x y u. Se ve en la figura que

$$x = x' \cos \alpha + u \operatorname{sen} \alpha$$
$$u = u' \cos \alpha + x \operatorname{sen} \alpha$$

o sea

[44] $$x' = \frac{x - u \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \quad ; \quad u' = \frac{u - x \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \quad ;$$

y las inversas

[45] $$x = \frac{x' + u' \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \quad ; \quad u = \frac{u' + x' \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \quad ;$$

que con $y = y'$; $z = z'$; constituyen las ecuaciones de Lorentz.

Todas las consecuencias de las mismas podrán así representarse gráficamente y podremos *ver* qué es lo que pasa con los relojes, con las medidas de longitudes, etc. En cuanto a los otros ejes, si consideramos una recta perpendicular al plano del dibujo en el punto OO′, dicha recta podrá representar, por ejemplo, a los ejes y é y'. Para el tercer eje z no tenemos lugar en nuestro espacio de tres dimensiones: que cada cual se lo represente como pueda. Pero todo lo que pase en el plano xy ó $x'y'$ podrá representarse gráficamente, como veremos más adelante.

28. **La marcha de los relojes.** — En la fig. 34 se ha tomado $\operatorname{sen} \alpha = 3/5$ y cada unidad de los ejes x ó x' representa una longitud de 300 000 km al igual que para los ejes u y u', con lo cual estas unidades de los ejes del tiempo representan, cada una de ellas, un segundo.

Se ve en la figura que los acontecimientos A, B y C, por ejemplo, son simultáneos para S′: todos ellos ocurren cuando los relojes de S′ indican 4 seg. En cambio, para S, A ocurre en el instante cero, B a los 5 seg y C a los 10 seg. El acontecimiento D es simultáneo con B respecto de S: ambos ocurren a los 5 seg del sistema S, pero respecto de S′, D acontece 3 seg antes que B. El acontecimiento E es anterior a B respec-

to de S′: E ocurre al marcar los relojes de S′ 1 seg y B cuando ellos marcan 4 seg.

Respecto del sistema S, *el orden de sucesión se invierte*: B ocurre a los 5 seg. de S y E a los 7 seg. de ese sistema.

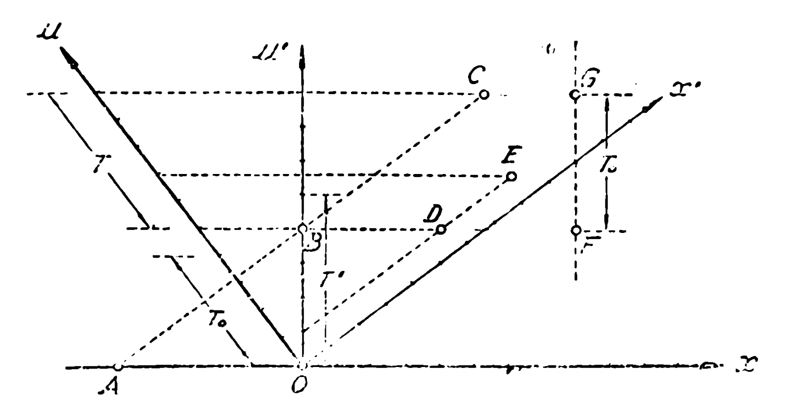


Fig. 34. — Para comprender de inmediato el "lío de los relojes".

Cuando se oye por primera vez que el orden de sucesión de dos acontecimientos puede invertirse, a uno se le ponen los pelos de punta y, aguijoneado sin duda por el fantasma del tiempo absoluto, proyecta pedir que se encierre en el manicomio a Einstein y a todos los que enseñan sus disparates. Para tranquilizar al lector, adelantaremos aquí algo de lo que será tratado más adelante con todo detenimiento. El orden de sucesión de dos acontecimientos puede alterarse sólo en el caso en que su distancia espacial sea mayor que su "distancia temporal". Ejemplo: Respecto de cierto sistema, dos sucesos se producen en lugares separados por una distancia de 600 000 km y el intervalo de tiempo que los separa es de sólo 1 seg = 300 000 km. En este caso la distancia temporal es igual a la mitad de la distancia espacial. Los dos sucesos considerados no pueden estar ligados por ninguna relación causal, pues para que el uno fuera causa del otro, sería necesario admitir que la acción de causa a efecto puede propagarse con una velocidad superior a la de la luz, lo que no es posible de acuerdo con la teoría de la relatividad en la que, como se verá dentro de poco, no puede existir ninguna velocidad mayor que la de la luz. Esto se advierte, por otra parte, si se examinan las ecuaciones de Lorentz, que dejan de tener sentido si v es mayor que c.

Acontecimientos de esa clase, independientes entre sí, pueden aparecer, juzgados desde diferentes sistemas, con el orden de sucesión invertido. Pero si la distancia espacial es menor que la temporal, el orden de sucesión, como demostraremos más

tarde, no puede invertirse y la cadena causal no sufre así ninguna alteración.

Volviendo a la fig. 34, puede el lector, como ejercicio, ver lo que indican los relojes de S′ cuando los de S señalan la hora cero o viceversa, y tendrá así la representación de los ejemplos de las figuras 27 y 28.

Veamos ahora cómo se presenta la marcha de un reloj fijo en un sistema, cuando se la considera desde el otro. Los relojes fijos al sistema S′ estarán representados por líneas paralelas al eje u'. La recta FG, por ejemplo, puede representar un reloj en reposo en el punto $x' = +10$; en F "está" cuando marca —2 seg, sobre el eje x' cuando marca cero seg, y en G cuando marca +2 seg. El segmento FG representa, pues, un intervalo de tiempo de 4 segundos del sistema S′. Para el sistema S, el acontecimiento F ocurre cuando los relojes de S marcan 5 seg y el G cuando los mismos indican 10 seg. En consecuencia, al intervalo de tiempo de 4 segundos de S′ corresponde un intervalo de 5 segundos del sistema S. En general, si llamamos T_0 a un intervalo de tiempo del sistema S′, indicado por relojes fijos a ese sistema, a dicho intervalo le corresponde otro intervalo T del sistema S, que, como se ve en la figura, debe ser:

$$[46] \qquad T_0 = T \cos \alpha \quad ; \quad T = \frac{T_0}{\cos \alpha} .$$

Si el reloj fijo está en el sistema S, su marcha se representa por rectas paralelas al eje u y a un intervalo de tiempo propio T_0 de S corresponderá un intervalo T′ de S′, tal que

$$[47] \qquad T_0 = T' \cos \alpha \quad ; \quad T' = \frac{T_0}{\cos \alpha} .$$

A este respecto, entre el jefe de la estación y el jefe de nuestro ya conocido tren (§ 24), se cambiaron las cartas siguientes:

"Señor jefe del tren: Debo decirle a usted que, de acuerdo con las minuciosas observaciones de mis ayudantes, todo el mundo del tren a su cargo actúa muy despacio y con demasiada pereza. Usted sabe que por disposición reglamentaria el almuerzo debe durar exactamente 40 minutos y, de acuerdo con la opinión unánime y documentada de mis colaboradores, los señores pasajeros permanecen sentados a la mesa 50 minutos exactos. Por otra parte, los relojes que lleva el tren y cuya marcha seguimos cuidadosamente desde la vía, atrasan también nada menos que una hora cada cinco. Si no arregla pronto este asunto le advierto que será destituído". Y se agregaba todavía: "Otra cosa intolerable es el cambio de color de las luces que lleva el tren. ¿Por qué ha hecho cambiar todas las lámparas de luz blanca con que iba provisto el tren por lámparas rojas?".

El jefe del tren contestó:

"Estoy a punto de volverme loco, pues de acuerdo con nuestras exactas y también minuciosas observaciones, los que andan despacio y perezosamente son todos sus empleados apostados a lo largo de la vía, y son los relojes colocados allí los que atrasan una hora por cada cinco. Respecto de las lámparas le diré que no se cambiaron y que siguen dando una vivísima luz blanca que contrasta con la luz roja con que aparecen iluminadas todas las estaciones del camino. Le adjunto a ésta las placas de los espectros de la luz emitida por las lámparas suyas y que hice tomar a mis ayudantes cuando recibí su carta. El informe de los técnicos encargados de esa operación dice así: "Los espectros han sido tomados con las debidas precauciones para evitar un corrimiento de las líneas debido al efecto Doppler. Al tomar el espectro de una lámpara determinada, dicha lámpara no se alejaba ni se acercaba al espectrógrafo, sino que pasaba normalmente a la dirección en que aquél apuntaba. Comparados los espectros así tomados con los de nuestras propias lámparas, se observa un desplazamiento hacia el rojo de todas las líneas espectrales que indica claramente que la frecuencia de la luz de los focos situados a lo largo de la vía, así como la de la luz de las ciudades y villas que atravesamos en nuestro recorrido, se ha hecho más pequeña que la frecuencia de nuestras propias fuentes luminosas, estando la relación de frecuencias en la proporción de 4 a 5.

" Según este informe, señor jefe, y de acuerdo con lo que me explicaron los técnicos, hasta los átomos de su dominio andan más despacio que los átomos nuestros, pero, como según usted, sucede al revés y son los átomos de nuestras lámparas los perezosos, no pudiendo entender lo que pasa renuncio a mi cargo, no sin antes decirle:

" *Lo que yo pienso de usted es exactamente igual a lo que usted piensa de mí*, y como esto lo entiendo yo, también lo entenderá usted."

29. **Medida de longitudes.** — Sea una varilla A'B' en reposo en el sistema S' (fig. 35) y colocada sobre el eje x'. En el instante cero de S', los extremos de la varilla están representados en la gráfica por los puntos A'_0 y B'_0. Cuando los relojes de S' indiquen 1 seg la varilla quedará representada por el segmento $A'_1B'_1$; en el instante 2 seg de S', por $A'_2B'_2$, etc. Se ve así que la representación gráfica de esa varilla, en reposo respecto de S' y en movimiento con respecto a S, está dada por una faja paralela al eje u'. La longitud propia de la varilla, la medida con reglas en reposo con respecto a ella, o sea la medida que efectúan sobre la misma los observadores de S', será el segmento $A'_0B'_0 = A'_1B'_1 = A'_2B'_2 = \ldots = L_0$. $A'_0B'_0$ representa la medida de la varilla en el instante cero de los relojes

de S′: en el instante cero de S′ ambos extremos de la varilla coincidían, el uno con la marca cero y el otro con la marca L_0 de la regla rígida y graduada empleada para medir. ¿Cuál es la longitud de esa misma varilla medida desde el sistema S?

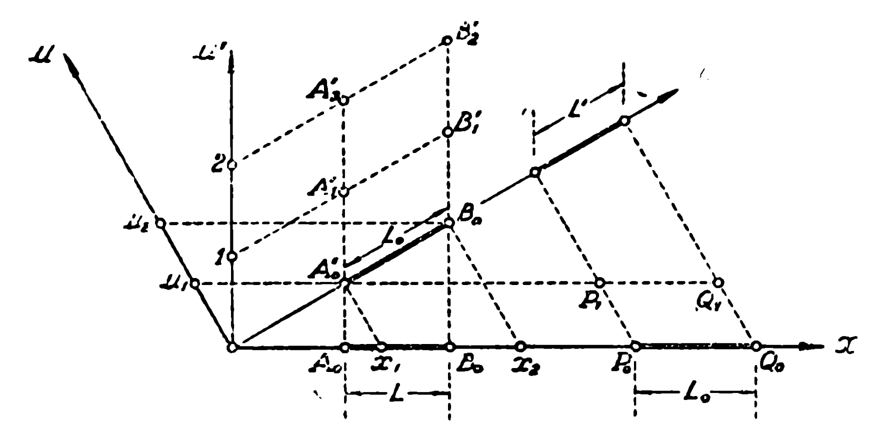


Fig. 35. — La contracción relativa y recíproca en la medida de una longitud.

Respecto de este sistema, en el instante cero de S′ los extremos de la varilla tienen las coordenadas:

$$A'_0 \text{ ———— } x_1 u_1$$
$$B'_0 \text{ ———— } x_2 u_2$$

y, como u_1 es diferente de u_2, la diferencia $x_2 - x_1$ no puede ser la longitud de la varilla medida desde S. Al medir una longitud, *deben coincidir simultáneamente* los extremos del segmento que se va a medir con determinadas divisiones de la regla empleada en la medida. Por lo tanto, la longitud L de la misma varilla, pero medida desde S, será el segmento A_0B_0 (o el A_1B_1 o el A_2B_2 no representados en la figura), que se obtienen seccionando la faja que la representa por una recta t = constante (o sea u = constante). Para A_0B_0, la tal recta es $t = 0 (u = 0)$, o sea el propio eje de las x del sistema S. Se tiene, entonces:

[48] $$L = L_0 \cos \alpha .$$

Si de la longitud L, medida desde S, queremos saber cuál es la longitud propia L_0 de la varilla, medida en S′, obtenemos dicha longitud, como es natural, de la fórmula anterior:

[49] $$L_0 = \frac{L}{\cos \alpha} .$$

En el ejemplo de nuestro tren (fig. 27), aquél aparecía desde S con una longitud igual a 10 D, pues los extremos del mismo coincidían en el instante cero de S con las marcas —5 D y

$+5$ D efectuadas sobre la vía. La longitud L' en nuestro ejemplo era igual a 80 minutos-luz y, por lo tanto, la longitud del tren, medida desde la vía, igual a 800 minutos-luz. Como cos α es, en este caso, igual a 4/5, la longitud propia del tren, según [49], es de 1000 minutos-luz. Dado que el diámetro de la órbita terrestre es de 1000 segundos-luz, la longitud del tal tren resulta ser tan sólo igual a 60 veces el diámetro de la órbita terrestre, por lo cual no se justifica la fama que le hacen a uno de poner ejemplos exagerados.

Naturalmente que, si desde S' miden la longitud L' de una varilla en reposo en el sistema S, donde su longitud propia es $L_0 = P_0Q_0 = P_1Q_1$, etc., obtienen:

[50] $$L' = L_0 \cos \alpha \quad ; \quad L_0 = \frac{L'}{\cos \alpha}\,.$$

Observemos que esta contracción de las longitudes coincide con la contracción de FITZ-GERALD y LORENTZ (§ 15), pero el significado es, por cierto, bien diferente. En un caso v es la velocidad del cuerpo respecto del éter y en el otro es la velocidad relativa de dos sistemas cualesquiera.

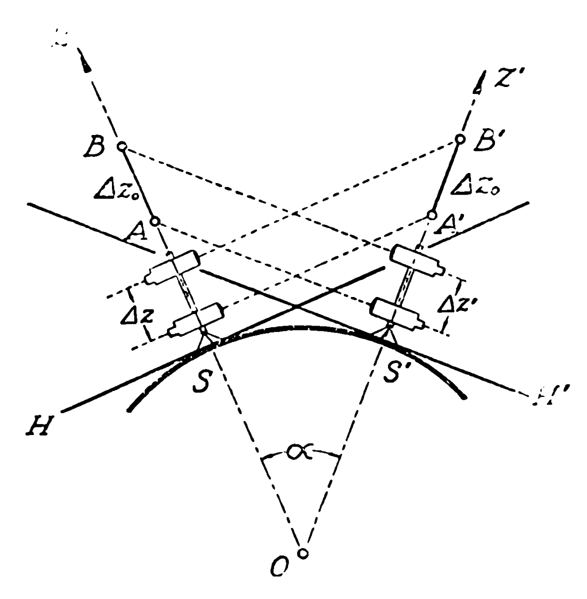


Fig. 36. — La "contracción de la altura" al medirla desde lejos con un catetómetro.

La contracción relativista y, por lo tanto, recíproca, de las longitudes, se presenta exactamente igual a lo que podría llamarse *contracción de la altura*. En la fig. 36 se han representado dos catetómetros situados en dos lugares de la superficie de la Tierra cuyas verticales forman el ángulo α.

Si desde S miden la diferencia de altura entre los puntos A'B', separados por la "distancia vertical propia" Δz_0, obtienen

[51] $$\Delta z = \Delta z_0 \,.\, \cos \alpha\,,$$

y desde S' para los puntos A y B:

[52] $$\Delta z' = \Delta z_0 \,.\, \cos \alpha\,.$$

Estas expresiones son formalmente idénticas a las [48] y [50]. En un caso, α es el ángulo de aberración principal entre dos sistemas y en el otro, el ángulo formado por dos verticales.

A causa de la contracción que experimentan los cuerpos en la dirección de su movimiento, la forma de un cuerpo sólido depende del sistema de referencia. Si en el sistema S′ se tiene una esfera en reposo en dicho sistema, la tal esfera aparece, de acuerdo con las medidas efectuadas desde S, para los observadores de este sistema, como un elipsoide de revolución achatado. Si el centro de la esfera se encuentra fijo en el origen O′ de S′, la ecuación de su superficie, referida a S′, será:

[53] $$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \mathrm{R}^2$$

en tanto que, respecto de S, se tendrá

[54] $$\frac{(x - vt)^2}{\cos^2 \alpha} + y^2 + z^2 = \mathrm{R}^2$$

que representa un elipsoide de revolución, alrededor del eje x (que coincide con la velocidad relativa de S y S′) y cuyo centro se encuentra, en el instante t, en el punto:

$$x = vt \quad ; \quad y = z = 0.$$

Los semiejes del elipsoide son: $\mathrm{R} \cos \alpha$; R; R. A causa de esto, en las figuras 27 y 28 los relojes del tren o de la vía, de forma propia circular, aparecen elípticos al ser juzgados (medidos, fotografiados) por los observadores de la vía y el tren, respectivamente.

30. **Un reloj de luz.** — Hemos hecho notar repetidas veces que el postulado de la constancia de la velocidad de la luz es simplemente una definición del tiempo. De acuerdo con él, un reloj marchará bien si da indicaciones proporcionales al camino recorrido en el vacío por un rayo de luz. De acuerdo con esto, un reloj-patrón podría consistir en dos espejos E_1 y E_2 (fig. 37), colocados frente a frente y a la distancia fija D_0 uno del otro, de tal modo que un rayo de luz pudiera hacer repetidamente el camino E_1E_2, E_2E_1, etc. Puede pensarse que se trata de un único fotón o de un corto tren de ondas que va y viene entre ambos espejos y suponerse que, mediante un mecanismo especial, el contador o reloj propiamente dicho, R, avanza una unidad cada vez que el espejo E_1 es golpeado por la luz. La unidad de tiempo de este reloj sería $2D_0/c$, de tal modo que si suponemos $D_0 = 150$ m, dicha unidad sería igual a un microsegundo.

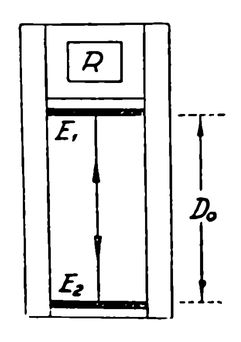


Fig. 37. — Reloj de luz.

Con el auxilio de este reloj podremos entender de verdad eso de "la dilatación relativista del tiempo".

Comencemos por suponer que un reloj de esta clase se mueve respecto de nosotros (nosotros estamos fijos en el sistema S) con cierta velocidad v y consideraremos, primero, que las columnas que mantienen fijos a los espejos E_1 y E_2 están colocadas perpendicularmente a la dirección de v.

Nosotros medimos el tiempo con otro reloj idéntico al reloj móvil. La fig. 38 representa la marcha de las cosas respecto del sistema S. Vemos a la luz del reloj móvil seguir una línea

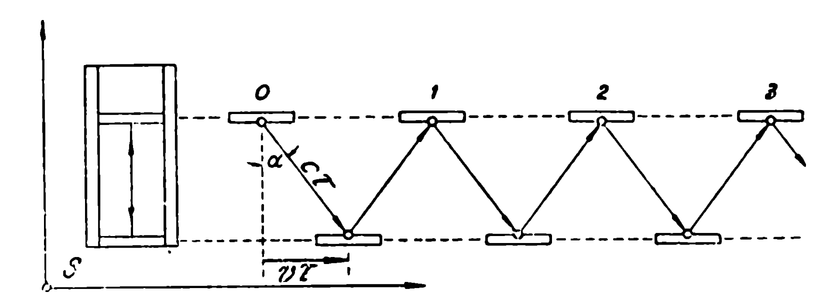


Fig. 38. — El trayecto alargado de la luz en un reloj explica su marcha lenta.

quebrada y hacer un recorrido mayor que $2D_0$ entre dos impactos consecutivos con el mismo espejo. Si llamamos τ al tiempo que emplea la luz en ir de un espejo al otro, dicho camino es igual a $c\tau$ y en ese tiempo el otro espejo se desplazará $v\tau$, por lo cual $\operatorname{sen} \alpha = v/c$. Si el reloj móvil indica que el espejo superior ha sido golpeado n' veces, $n' = t'$ será el tiempo indicado por dicho reloj. Para el sistema S, el recorrido efectuado por la luz es

$$[55] \qquad L = \frac{2D_0}{\cos \alpha} n' \quad ,$$

al transcurrir n' unidades de tiempo de S′, o sea al efectuarse $n' + 1$ golpes. Entretanto, ¿cuánto habrá avanzado el reloj fijo en S? El número n de períodos de S, será:

$$[56] \qquad n = \frac{L}{2D_0}$$

y por lo tanto, de acuerdo con [55], será:

$$[57] \qquad n = \frac{n'}{\cos \alpha} \quad ; \quad t = \frac{t'}{\cos \alpha} \, .$$

En concreto: si $v/c = 3/5$; $\cos \alpha = 4/5$; y si $n' = 100$ períodos, $n = 125$.

Conclusión: los relojes fijos al sistema S′ marchan más des-

pacio que los del sistema S, si se observa su marcha desde este último sistema. Naturalmente que para S′ (fig. 39) es la luz del reloj S la que sigue un camino quebrado y, por lo tanto, se

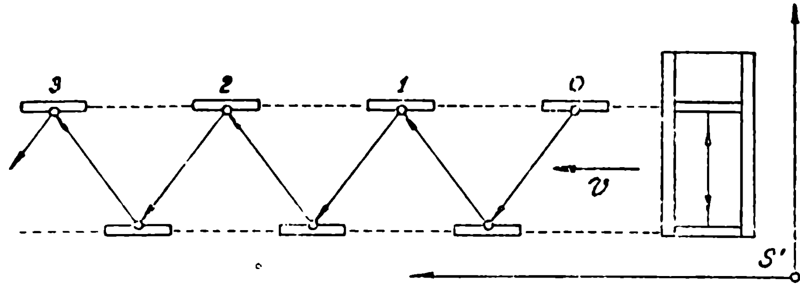


Fig. 39. — El atraso de los relojes es recíproco.

cumple también: los relojes fijos al sistema S marchan más despacio que los del sistema S′, si se observa la marcha desde S′.

En lo que precede dimos a nuestro reloj una posición particular: perpendicular a la velocidad relativa. ¿Podrá depender la relación de los tiempos de la posición del reloj? Por supuesto que no, y para convencernos de que es así, consideraremos ahora que el reloj móvil se coloca paralelamente a su velocidad. En

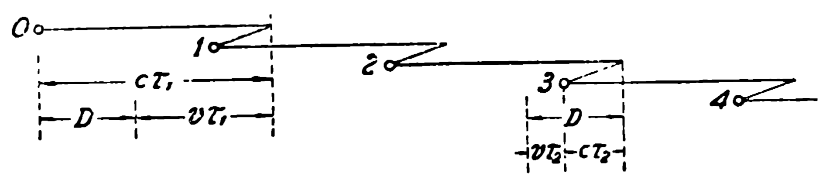


Fig. 40. — Reloj de luz colocado longitudinalmente.

este caso, la marcha de la luz del reloj móvil juzgada desde S es la que aparece representada en la fig. 40. La distancia entre los espejos medida desde S, sea D. Ya sabemos que $D = D_0 \cos \alpha$, pero procedamos como si no lo supiéramos. Si llamamos τ_1 al tiempo que tarda la luz en ir del espejo de la izquierda hasta el de la derecha, se tendrá

$$c\tau_1 = D + v\tau_1$$

o sea

[58] $$\tau_1 = \frac{D}{c - v} .$$

En cambio, el tiempo τ_2 que emplea la luz en ir del espejo de la derecha al de la izquierda, es

$$c\tau_2 = D - v\tau_2$$

o sea

[59] $$\tau_2 = \frac{D}{c+v}.$$

Los caminos L_1 y L_2 recorridos por la luz cuando viaja entre los espejos, una vez hacia la derecha y otra vez hacia la izquierda, son:

$$L_1 = c\tau_1 = \frac{D}{1-\frac{v}{c}} \quad ; \quad L_2 = c\tau_2 = \frac{D}{1+\frac{v}{c}} \quad ;$$

y de aquí

[60] $$L_1 + L_2 = \frac{2D}{\cos^2 \alpha}.$$

Para que este valor coincida con el obtenido en la otra posición del reloj (fórmula 55 para $n' = 1$), *es necesario* que

[61] $$D = D_0 \cos \alpha$$

y obtenemos así, nuevamente, la contracción de las medidas longitudinales. La [61] resulta de postular que la marcha de un reloj de luz, móvil, no puede depender de su posición, lo que es consecuencia inmediata del postulado de la constancia de la velocidad de la luz: a iguales intervalos de tiempo del sistema S, iguales recorridos del rayo de luz.

Digamos de paso que, prosiguiendo por este camino, se pueden deducir de inmediato las fórmulas de Lorentz. En efecto: Si un punto del sistema S' tiene abscisa x', la abscisa x en el instante t del sistema S será, de acuerdo a [61]:

[62] $$x = vt + x' \cos \alpha \quad ; \quad x' = \frac{x - vt}{\cos \alpha} \quad ;$$

y si ahora suponemos que un rayo de luz parte, al coincidir los orígenes de ambos sistemas desde allí, y se propaga según las x positivas, deberá tenerse

[63] $$x' = ct' \quad ; \quad x = ct \quad ; \quad t = \frac{x}{c} \quad ;$$

de donde, con sólo reemplazar en [62], resulta:

[64] $$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\cos \alpha}.$$

Volviendo a nuestro reloj, observamos que, cuando el mismo se coloca paralelamente a la dirección de la velocidad, sus semiperíodos, medidos desde S, no son iguales entre sí, pues L_1 es diferente de L_2, pero para el sistema respecto del cual el reloj se encuentra fijo, ambos semiperíodos, claro está, son

iguales entre sí. En la fig. 41 se ha representado al reloj fijo en S′, estando uno de los espejos en el origen de coordenadas y el otro en E. El reloj, en el espacio-tiempo, está represen-

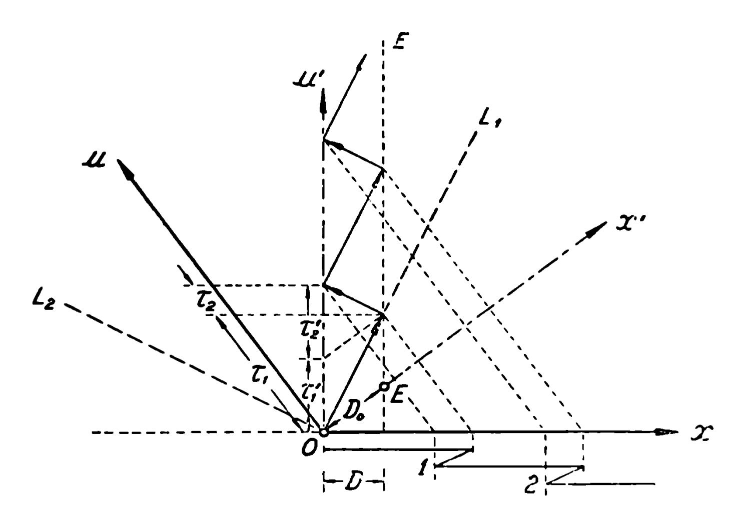


Fig. 41. — Representación de la marcha del reloj de luz.

tado por la faja Ou'EE, y la luz que va y viene entre ambos queda representada por la línea quebrada de lados paralelos a las bisectrices OL_1 y OL_2.

31. Observación respecto de las fórmulas relativistas. — De las fórmulas de Lorentz [43] se obtiene:

$$[65] \quad \Delta x' = \frac{\Delta x}{\cos\alpha} - \Delta u \,.\, \operatorname{tg}\alpha \quad ; \quad \Delta u' = \frac{\Delta u}{\cos\alpha} - \Delta x \,.\, \operatorname{tg}\alpha \quad ;$$

siendo seno $\alpha = v/c$ y v constante.

Examinemos los casos siguientes:

a) *Reloj en reposo en* S. Por estar en reposo en S, será $\Delta x = 0$ y para cierto Δt será $\Delta u = c \,.\, \Delta t$, con lo cual, reemplazando estos valores en [65] y teniendo en cuenta que $\Delta u' = c\Delta t'$, se tiene:

$$[66] \quad \left.\begin{aligned} \Delta x' &= -\, v\Delta t' \\ \Delta t' &= \frac{\Delta t}{\cos\alpha} \end{aligned}\right\} \text{ Válidas si } \Delta x = 0.$$

b) *Reloj en reposo en* S′. Será $\Delta x' = 0$; $\Delta u' = c\Delta t'$, con lo que:

$$[67] \quad \left.\begin{aligned} \Delta x &= v\Delta t \\ \Delta t &= \frac{\Delta t'}{\cos\alpha} \end{aligned}\right\} \text{ Válidas si } \Delta x' = 0.$$

c) *Regla en reposo en* S *de longitud propia* Δx. Medida desde S′, tendrá una longitud $\Delta x'$ y *medir desde* S′ *significa hacer* $\Delta u' = 0$. Por esta razón, de [65]

$$\Delta u = \Delta x \,.\, \text{sen}\, \alpha$$

y reemplazando en la primera de [65]

$$\Delta x' = \Delta x \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \frac{\text{sen}^2\, \alpha}{\cos \alpha} \right)$$

o sea

[68] $\Delta x' = \Delta x \,.\, \cos \alpha \; \{$ Válida si $\Delta u' = 0$.

d) *Regla en reposo en* S′ *de longitud propia* $\Delta x'$. Medida desde S, será $\Delta u = 0$ y por la primera de [65], resulta de inmediato:

[69] $\Delta x = \Delta x' \cos \alpha \; \{$ Válida si $\Delta u = 0$.

La dilatación recíproca del tiempo [66] y [67], y la contracción también recíproca de las longitudes, confirma la completa equivalencia entre los dos sistemas S y S′, como lo exige el principio de relatividad. Si no se tiene en cuenta en qué condiciones es válida una u otra fórmula, los resultados podrían parecer contradictorios. Conviene que el lector represente gráficamente todos los casos analizados en este párrafo.

32. **La palabra relatividad.** — En el lenguaje corriente, la palabra relatividad o expresiones tales como *relativo a, respecto de,* etc., se emplean de muy diversas maneras y con sentido muy variado. Ya PASCAL decía: "Verdad aquende los Pirineos, error allende", y Gulliver, el célebre personaje de Swift, inmenso en el país de los enanos, se convierte en insignificante pigmeo cuando se arriesga a viajar en el país de los gigantes. Esta "relatividad de Gulliver" no es recíproca:

A es enano respecto de B,

B es gigante respecto de A,

en tanto que la relatividad a que se refiere la frase de Pascal, si bien de carácter subjetivo, sí que lo es. Sin salir de determinado país, basta considerar los juicios que merecen los dirigentes de un partido político juzgados por los del partido opositor, para tener ejemplos de relatividad recíproca casi perfecta como la que tiene lugar al considerar el grado de dificultad de los idiomas que nos son extraños.

Dado que la relatividad del espacio y el tiempo de la teoría de la relatividad, o mejor dicho, la relatividad de las medidas efectuadas desde dos sistemas, goza también de ese carácter recíproco, hubo quienes pretendieron ver en ello un carácter subjetivo de la física de nuestros días. Así, el diario *Times* de

Londres se expresaba, al comentar editorialmente una sesión de la Royal Society en la que se anunció una verificación experimental de la teoría, de la que trataremos más adelante, en los siguientes términos: *"La ciencia experimental ha tenido que retroceder ante el más puro y subjetivo idealismo"*. Pero no es así. No hay ningún subjetivismo en las relaciones que aparecen en la teoría de la relatividad y que tratan exclusivamente de comparar las medidas físicas, llevadas a cabo sobre algo bien determinado, desde dos sistemas diferentes. Cuando se afirma:

Los relojes de S′ *atrasan respecto de los de* S *y, por lo tanto, también*

Los relojes de S *atrasan respecto de los de* S′

se afirma, en el primer caso, que medida ("juzgada") desde S la marcha de los relojes de S′, resulta más lenta que la marcha de los relojes fijos de S y, *naturalmente*, por la *equivalencia* de ambos sistemas, midiendo desde S′ aparecerán marchando *también* con mayor lentitud los relojes de S al compararlos con los que están fijos en S′. Y esto se podría comprobar, en principio, bien objetivamente, utilizando relojes y máquinas fotográficas fijos en ambos sistemas. Aun cuando se hable constantemente de "observadores" fijos a tal o cual sistema, debe tenerse presente que tales *observadores podrán ser sustituídos siempre por instrumentos de medida totalmente impersonales.*

Las proposiciones de la teoría de la relatividad que se refieren en primer término a las medidas de longitudes e intervalos de tiempo, tienen una estructura lógica enteramente análoga a la de los ejemplos siguientes:

A es antípoda de B

y, por lo tanto,

B es antípoda de A.

París está debajo del horizonte de Londres,

y, por lo tanto,

Londres está debajo del horizonte de París;

o la vieja afirmación copernicana, mucho más revolucionaria en su momento de lo que lo es en la actualidad la teoría de la relatividad:

Desde la Tierra se ve a Marte en el cielo;

Desde Marte se ve a la Tierra en el cielo;

con lo cual se desvanecieron las ilusiones del hombre que creía encontrarse en el centro del Universo.

33. **¿Apariencia o realidad?** — Este título podría hacer creer que pensamos sumergirnos en las turbias aguas de la metafísica, pero nada de eso. Utilizaremos las palabras que sirven de

encabezamiento a este párrafo, y a causa de las cuales se han hecho correr mares de tinta, con su sentido estrictamente físico. Ellas serán empleadas con el significado que tienen en expresiones de este tipo: "La luna, cuya apariencia es la de un disco brillante del tamaño de un plato, situado a unos 15 metros de distancia, es en realidad una esfera de unos 1 700 kilómetros de radio".

Hecha esta aclaración, pasemos a considerar si de los tiempos de los diferentes sistemas debe decirse que *son* o solamente que *parecen ser*. En nuestro ejemplo del tren (§ 24), el jefe del mismo afirmaba: "Aquí todo el mundo se sienta a la mesa, para almorzar, a las 12 exactas", en tanto que, para los observadores de la vía no ocurría tal cosa, pues a las 12 de sus relojes algunos pasajeros estaban tomando el desayuno, otros almorzaban y otros se preparaban ya para cenar. Frente a esta situación, es probable que el lector se haya dicho: "No es posible que los dos jefes, el del tren y el de la vía, tengan razón; a lo sumo podría decirse que a uno le parece una cosa y al otro otra". Pero si el jefe del tren afirma que todos los pasajeros se sientan a la mesa al mismo tiempo es porque los habrá visto hacer tal cosa y tendríamos que creerle, ¿no es así? Lo que ocurre es que nos olvidamos de que se trata de un comedor muy largo y nos olvidamos también de que la luz tiene una velocidad finita. Por esta razón, comenzaremos por analizar lo que vieron los comensales de un banquete cuya mesa tenía una longitud de 80 minutos-luz (1 440 millones de kilómetros).

Como se trataba del banquete de la puntualidad, se había convenido que todos los comensales se sentarían a la mesa a las 12 en punto y así se hizo. Para lograr tal cosa, se colocaron en el largo comedor infinidad de relojes perfectamente sincronizados. La sincronización fué hecha escrupulosamente y en forma automática. Para ello (fig. 42) se comenzó por detener a todos los relojes marcando una hora conveniente y se conectó cada uno de ellos con una célula fotoeléctrica de tal modo, que al incidir sobre la misma un rayo de luz, el reloj se pondría en marcha. El reloj situado en A marcaba las 7 y el B, las 7 más 80 minutos, o sea las 8 y 20, en tanto que el M situado en el medio de la mesa, indicaba las 7 y 40. En general, se hizo que el reloj situado a una distancia d_A del punto A marcara la hora

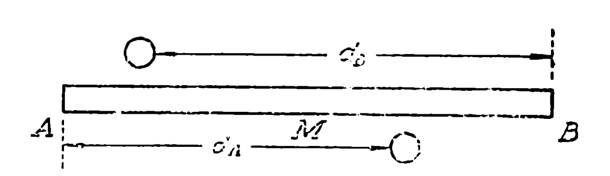


Fig. 42. — Sincronización de relojes distantes.

$$7^h + \frac{d_A}{c}.$$

En un momento dado, que se convino en decir que era la hora 7, se encendió en A una poderosa linterna con el haz luminoso dirigido hacia B.

Los relojes empezaban a caminar cuando la luz llegaba a ellos y de este modo estaban todos perfectamente sincronizados. En realidad, debemos decir que, para mayor seguridad, en cada lugar se instalaron varios relojes que se sincronizaron por haces de luz que provenían de diferentes puntos. Así, por ejemplo, los relojes comandados desde B, cuando estaban detenidos, marcaban una hora que era

$$9^h + \frac{d_B}{c}$$

y los ingenieros situados junto a B cuyo reloj comenzó a marchar, por la señal enviada desde A, a las 8 y 20, esperaron 40 minutos más y a las 9 en punto encendieron su poderosa linterna dirigida hacia A. La señal llegó a este punto a las 10 y 20 y los observadores de A constataron con gran satisfacción que el reloj comandado desde B, una vez puesto en marcha, indicaba la misma hora que el otro que había comenzado a andar a las 7.

Digamos finalmente que, como control final, los observadores situados en diferentes puntos del largo comedor, podían ver, utilizando receptores adecuados de televisión, los relojes situados en diferentes puntos. La fig. 43 muestra, por ejemplo, lo que veían los observadores situados en M al enfocar los extremos de la mesa. Su reloj M indica las 10 y 40 y los situados en A y B marcan las 10. Como el observador M sabe, por medidas anteriores, que AM = BM = 40 minutos-luz, concluye que los tres relojes A, B y M están perfectamente sincronizados. *Aparentemente*, de acuerdo con lo que ve, no habría sincronismo entre A y M, pero *realmente* lo hay.

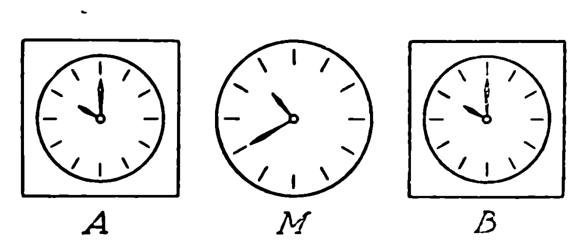


Fig. 43. — La apariencia no corresponde a la realidad: los tres relojes están perfectamente sincronizados.

Después de estos preparativos, no hubo que esperar mucho para que llegaran las 12 y en ese preciso instante, los comensales, que tenían los ojos puestos en el reloj más próximo, se sentaron a lo largo de la bien servida mesa. ¿Qué es lo que vieron los que se sentaron junto a A? Lo percibido por ellos, la apariencia, fué que a las 13 y 20 vieron sentarse a los que estaban en el otro extremo de la mesa y éstos vieron también que los que parecían haberse demorado eran los otros. En la

figura 44 se indican las horas en que, observados desde diferentes puntos, en reposo respecto de la mesa, *parecieron* sentarse los participantes del banquete.

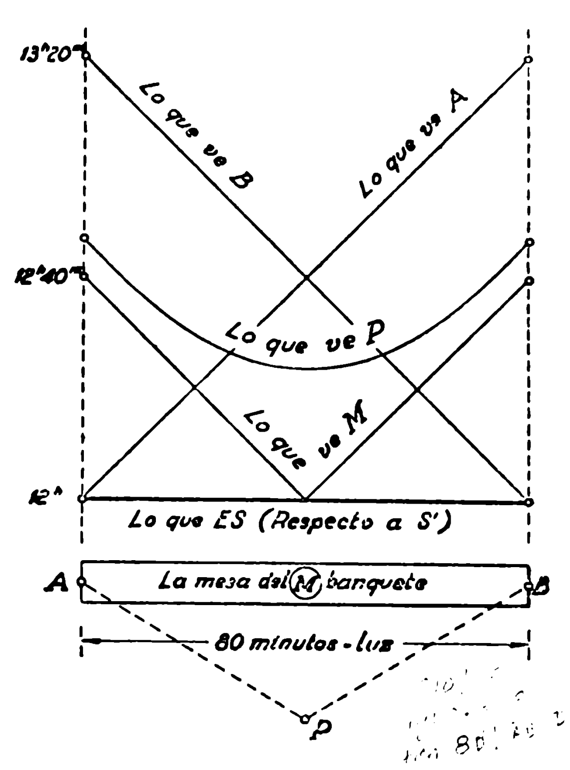


Fig. 44. — Acontecimientos distantes, realmente simultáneos, parecen no serlo.

En realidad todos ellos se sentaron exactamente a las 12. Los diferentes observadores (en reposo respecto de la mesa) saben extraer la realidad de la apariencia y se ponen todos de acuerdo: el banquete de la puntualidad ha sido todo un éxito, a pesar de que desde ningún punto de vista pudo observarse directamente que los comensales se sentaran al mismo tiempo.

De modo, pues, que se cometería un grave error si se dijera que "en apariencia", para los observadores del sistema de la mesa, los comensales se sentaron a las 12. No; la apariencia cambia con el punto de vista y si nos atuviéramos a las apariencias, entonces sí que las cosas serían complicadas: un tiempo diferente para cada punto de un mismo sistema. Hemos dicho que lo real es que todo el mundo se sentó a las 12. Pero debemos agregar que ésa es la realidad para los observadores que están en reposo con respecto a la mesa y, para decirlo brevemente, respecto del sistema que denominaremos S′. Para los observadores de otro sistema S que esté en movimiento respecto de S′ tendremos otras muchas apariencias, que dependerán de la posición particular de cada observador, y de ellas podrá extraerse también la realidad, o sea lo que verdaderamente *es* con respecto a S. En la fig. 45 se ha utilizado la representación gráfica que ya conocemos (§ 28), suponiendo que la mesa AB se desplaza, en el sentido de su longitud, con respecto a un sistema S con una velocidad igual a 3/5 de la velocidad de la luz. El lector puede pensar entonces que el banquete de que hablábamos tuvo lugar en el interior del tren del ejemplo del § 24.

Los rayos de luz que parten de los diferentes puntos de la mesa en el instante cero de S′ (las 12 de S′) y que se propagan de A hacia B, o sea en el sentido positivo del eje x, están representados por el haz de rectas paralelas AL_1, BL_1, siendo AL_1

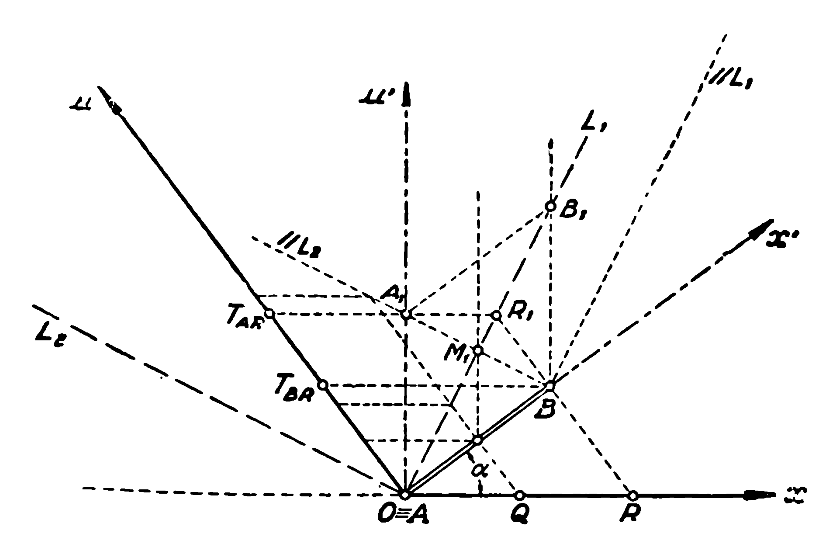


Fig. 45. — Apariencia y realidad de acontecimientos simultáneos respecto de un sistema móvil.

bisectriz del ángulo uOx y del u'Ox'. Los rayos que se propagan en sentido opuesto se representan por el haz AL_2, BL_2. Veamos, antes que nada, cómo puede leerse en esa figura lo que perciben los observadores A, B y M fijos en el sistema S′. El observador B "recorre" la línea de universo BB_1 paralela al eje del tiempo u'. Esta línea va cortando el haz de rectas BL_1, AL_1, que traen la noticia de que los comensales se han sentado en diferentes puntos, que corresponden a diferentes instantes. En B_1 corta a la recta AL_1 y el instante en que tal cosa ocurre, para S′, será un tiempo dado por el segmento $OA_1 = BB_1$.

Se ve de inmediato que el triángulo OBB_1 es isósceles, por lo cual $AB = BB_1$. Pero AB, longitud propia de la mesa, es igual a 80 minutos-luz, por lo cual el instante en que B percibe que A se sienta será igual a 80 minutos (ó 12 y 80, o sea, 13 y 20). El observador A recorre el propio eje u' y va cortando el haz de rectas AL_2, BL_2. El punto A_1 determina el instante en que el observador A percibe que B se ha sentado. El observador M va cortando parte del haz AL_1BL_1 y parte del haz AL_2BL_2. El punto M_1 determina el instante en que M percibe que A y B se han sentado. Los sucesos que estamos considerando (en el ejemplo, el acto de tomar asiento los comensales) son percibidos por los observadores de S′ en diferentes instantes, pero todos ellos se dan cuenta de que tales sucesos ocurren real-

mente a la hora cero (a las 12), siendo, por lo tanto, simultáneos para S′.

Pasemos ahora a considerar lo que percibiría un observador tal como el R fijo en el sistema S. La "trayectoria" de este observador es una recta RR_1 paralela al eje u. Esta recta RR_1 intercepta al haz BL_1AL_1 en los puntos B y R_1. El punto B representa el instante en que R percibe que B se ha sentado y tal cosa ocurre cuando los relojes de S marcan el tiempo OT_{BR}. Pero se ve en la figura que $OT_{BR} = OB \, . \, \mathrm{tg}\, \alpha$, y como $OB = 80$ minutos-luz y $\mathrm{sen}\, \alpha = 3/5$, resulta $OT_{BR} = 60$ minutos. Por eso R percibe que B se sienta a las 13 del sistema S, como se ve en la fig. 46. El punto R_1 (de la fig. 45) representa el acontecimiento en que el observador R percibe que A se ha sentado y como $OT_{AR} = OR = OB/\cos \alpha =$ $= 100$ minutos, tal cosa ocurre cuando los relojes de S marcan 13 y 40.

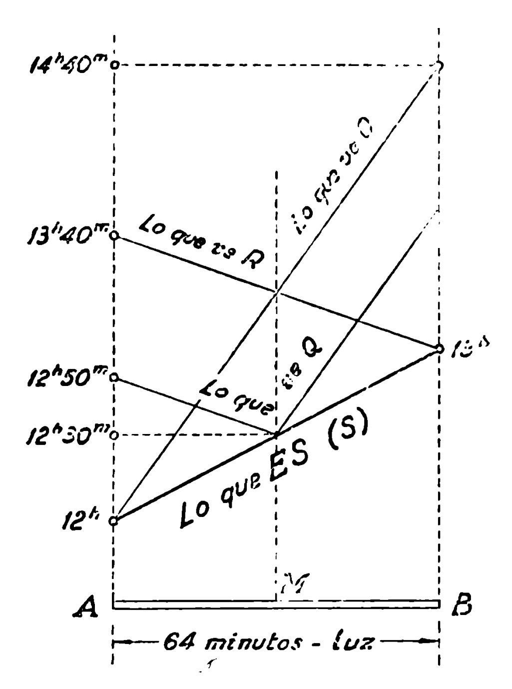


Fig. 46. — Para cada sistema un tiempo diferente, que es el tiempo real y objetivo del mismo.

Dejaremos que el lector se entretenga en verificar los otros gráficos de la figura 46, en que aparece lo que ven los observadores O y Q del sistema S. Pero de todas estas apariencias, tantas como observadores, se extrae una única realidad, que *es* la realidad del sistema S. Según ella —en esto están de acuerdo todos los observadores de S (los apostados a lo largo de la vía)— A se sentó a la mesa a las 12, M a las 12 y 30 y B a las 13.

Se desprende del ejemplo que, para cada sistema, se tiene en general un tiempo diferente y que ese tiempo *es el tiempo real y objetivo del sistema considerado.*

CAPÍTULO III

CINEMATICA RELATIVISTA

34. Composición de velocidades. — Si el sistema S′ se traslada respecto del sistema S con la velocidad v y un punto P se mueve, respecto de S′, con la velocidad V, se trata de hallar la velocidad resultante W de ese mismo punto respecto del sistema S. Comenzaremos por considerar que v y V tienen la misma dirección y sentido siendo ambas constantes, por lo cual, si tomamos los ejes x y x' de ambos sistemas en coincidencia con la velocidad relativa v, el punto P se moverá paralelamente al eje x' y su velocidad respecto de S′ será

[1] $$V = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} .$$

De las fórmulas de *Lorentz* (II, 17), utilizando la abreviatura (II, 8) se obtiene:

[2] $$\Delta x = \frac{\Delta x' + v\Delta t'}{\cos \alpha} \quad ; \quad \Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{v}{c^2}\,\Delta x'}{\cos \alpha} \quad ;$$

de donde

[3] $$W = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x' + v\Delta t'}{\Delta t' + \frac{v}{c^2}\,\Delta x'}$$

y de aquí dividiendo numerador y denominador por $\Delta t'$ y teniendo en cuenta [1] resulta

[4] $$W = \frac{V + v}{1 + \frac{vV}{c^2}}$$

que es la expresión del teorema de *Einstein* de adición de velocidades en el caso considerado. Si v y V son pequeños en comparación de c, resulta, en primera aproximación, la fórmula clásica: $W = v + V$. Se ve, además, que aun considerando $v = V = c$, resulta $W = c$, o sea que, por poco que difieran v y V de la velocidad de la luz, la velocidad resultante W será siempre menor que dicha velocidad, que desempeña, en la teoría de la relatividad, el papel de una velocidad límite inalcanzable.

Representación gráfica. — Representemos los ejes de los sistemas S y S′ como lo hemos hecho hasta ahora, haciendo sen $\alpha = v/c$ (fig. 47) y tomemos sobre el eje u un vector Oc igual a la velocidad c de la luz. Por el extremo de este vector c trazamos una paralela al eje x hasta encontrar al eje u' en el punto A, y desde este punto trazamos una paralela al eje u que interceptará al eje x en un punto v, tal que Ov representará la velocidad v de S′ respecto de S.

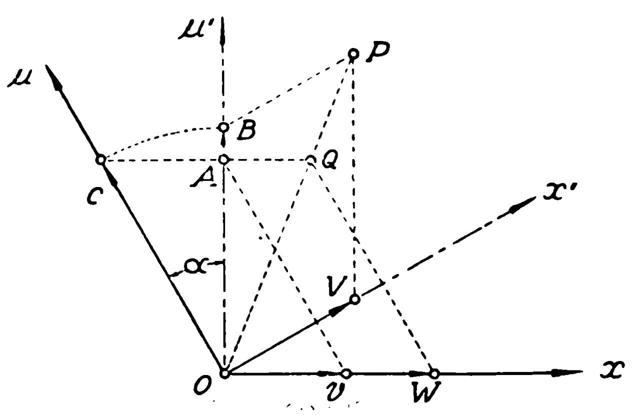


Fig. 47. — Composición de velocidades de igual dirección.

El vector Oc puede considerarse, además, como representativo de la unidad de tiempo, digamos 1 seg, representando entonces el segmento cA igual a Ov, lo que se alejan los orígenes de ambos sistemas en dicho tiempo. Si consideramos ahora que el punto P se desplaza sobre el eje x' con la velocidad V, medida en el sistema S′, esto significa que en 1 seg de este sistema hará un recorrido igual a OV. Tomamos entonces sobre el eje u' un vector OB = Oc y trazando por B y V las paralelas a los ejes x' y u' encontramos en su intersección el punto P.

La recta OP representa la trayectoria de universo (espacio-tiempo) del punto P. Para conocer ahora la velocidad W del punto móvil respecto de S, bastará hallar el recorrido que efectúa dicho punto sobre el eje x en 1 segundo del sistema S. Para ello, trazamos desde c una paralela al eje x que encuentra a OP en Q, y trazando desde Q una paralela a u hallamos así al vector OW = W que representa la velocidad resultante de los vectores v y V de la misma dirección y del mismo sentido, pues no debemos olvidar que los ejes x y x' son en realidad coincidentes.

35. **Caso general de composición de velocidades.** — Si V es la velocidad del punto P respecto del sistema S′ y suponemos que el punto parte del origen O′ de coordenadas, podremos escribir

$$[5] \qquad \begin{aligned} x' &= \mathrm{V} \cos \theta' . t' \\ y' &= \mathrm{V} \operatorname{sen} \theta' . \cos \varphi' . t' \\ z' &= \mathrm{V} \operatorname{sen} \theta' . \operatorname{sen} \varphi' . t' \end{aligned}$$

y si llamamos W a la velocidad del mismo punto respecto de S se tendrá

$$[6] \qquad \begin{aligned} x &= \mathrm{W} \cos \theta \,.\, t \\ y &= \mathrm{W} \operatorname{sen} \theta \,.\, \cos \varphi \,.\, t \\ z &= \mathrm{W} \operatorname{sen} \theta \,.\, \operatorname{sen} \varphi \,.\, t \quad . \end{aligned}$$

En estas ecuaciones θ' y θ son los ángulos que la trayectoria rectilínea del punto forma con los ejes x' y x de ambos sistemas, y φ' y φ los ángulos que la proyección de la trayectoria sobre los planos xy' y sobre xy forma respectivamente con los ejes y' é y.

Dividiendo entre sí las dos últimas de [5] y [6] se obtiene de acuerdo con (II, 1):

$$[7] \qquad \frac{z}{y} = \frac{z'}{y'} = \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \varphi'$$

lo que significa que el azimut se conserva, o sea que $\varphi = \varphi'$. En otros términos: el plano $\mathrm{V}_{x'}$ coincide con el plano W_x.

Se tiene, además, de la primera de la [6] aplicando (II, 17), para la componente de la velocidad resultante según el eje x:

$$[8] \qquad \mathrm{W} \cos \theta = \mathrm{W}_x = \frac{x}{t} = \frac{x' + vt'}{t' + \frac{v}{c^2}\, x'}$$

y reemplazando aquí x' por su valor dado en [5] resulta:

$$[9] \quad \mathrm{W} \cos \theta = \mathrm{W}_x = \frac{\mathrm{V} \cos \theta' + v}{1 + \frac{v}{c^2}\, \mathrm{V} \cos \theta'} = \frac{\mathrm{V}_{x'} + v}{1 + \frac{v}{c^2}\, \mathrm{V}_{x'}} \,.$$

Para las componentes según los ejes yz se obtiene:

$$[10] \qquad \mathrm{W} \operatorname{sen} \theta \cos \varphi = \mathrm{W}_y = \frac{y}{t} = \frac{y' \cos \alpha}{t' + \frac{v}{c^2}\, x'}$$

$$[11] \qquad \mathrm{W} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi = \mathrm{W}_z = \frac{z}{t} = \frac{z' \cos \alpha}{t' + \frac{v}{c^2}\, x'}$$

si se utiliza la (II, 8) en la expresión de t dada en (II, 17). Haciendo

$$[12] \text{ y } [13] \qquad \frac{y'}{t'} = \mathrm{V}_{y'} \quad ; \quad \frac{z'}{t'} = \mathrm{V}_{z'}$$

se obtiene para las [10] y [11], si se reemplaza $\cos \alpha$ por su valor:

$$[14] \qquad W_y = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c^2} V_{x'}} . V_{y'} \quad ;$$

$$[15] \qquad W_z = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c^2} V_{x'}} . V_{z'} \quad .$$

Si se elevan al cuadrado las [10] y [11] y se suman y se hace lo mismo con las dos últimas de [5], se obtiene:

$$[16] \qquad W \operatorname{sen} \theta = \frac{V \operatorname{sen} \theta' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c^2} V \cos \theta'} .$$

Dividiendo [16] por [9] obtenemos:

$$[17] \qquad \operatorname{tg} \theta = \frac{V \operatorname{sen} \theta' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{V \cos \theta' + v}$$

Cuadrando y sumando [9], [14] y [15] obtenemos el módulo de la velocidad resultante:

$$[18] \qquad W = \frac{\sqrt{V^2 + v^2 + 2vV \cos \theta' - \frac{V^2 v^2}{c^2} \operatorname{sen}^2 \theta'}}{1 + \frac{vV}{c^2} \cos \theta'} .$$

La fórmula es simétrica respecto de v y V, y si se hace cualquiera de estas velocidades igual a la velocidad c de la luz, resulta, como era de suponer, $W = c$.

Representación gráfica. — Se trata de hallar un método gráfico de composición de velocidades sustitutivo de la regla del paralelogramo de la mecánica clásica. Consideraremos que el vector V que representa la velocidad del punto respecto de S′ está contenido en el plano $x'y'$. Esto no limita en nada la generalidad, pues dada una dirección cualquiera de V se elegirá el eje y' de modo tal que V esté en el plano $x'y'$. Los ejes yy' están representados en la fig. 48 por una recta perpendicular en O al plano de la figura que contiene a los ejes xu y $x'u'$. Rebatimos el plano xy haciéndolo girar en un ángulo $\pi/2$ sobre el eje x coincidiendo así el plano rebatido con el plano del di-

bujo. Los ejes yy' (lo mismo que los z y z') coinciden, y coinciden también, en realidad, los ejes xx'. Por esta razón, en la parte del dibujo rebatida se considerará al eje x' coincidiendo con el eje x. Si V es la velocidad del punto respecto de S′, re-

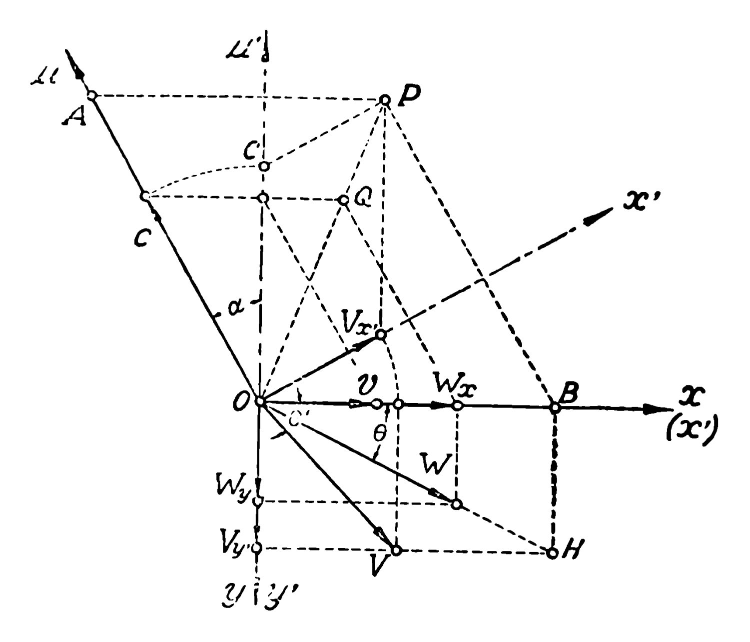


Fig. 48. — La regla equivalente a la del paralelogramo de la adición de velocidades.

presentaremos dicha velocidad por el vector OV que forma el ángulo θ′ con el eje x' y hallamos las componentes $V_{x'}$ y $V_{y'}$. Se trata ahora de hallar la proyección de la trayectoria de universo del punto en el plano $x'u'$. Para ello trazamos el paralelogramo de lados Oc (sobre u') y $V_{x'}$ sobre x' que forma el ángulo α con el eje x. La diagonal OP de este paralelogramo es la proyección buscada. Esto significa que en el tiempo 1 seg de S′, el punto se desplaza sobre el eje x' en $V_{x'}$ y sobre el eje y en $V_{y'}$. Pero el punto P tiene en el sistema S las coordenadas:

$$u = \mathrm{OA} \quad ; \quad x = \mathrm{OB} \quad ; \quad y = y' = V_{y'} \ .$$

Su trayectoria espacial será, en consecuencia, la recta OH, y tenemos así hallado el ángulo θ que dicha trayectoria forma con el eje x del sistema S. Pero OH no representa la velocidad resultante W, pues OH es el camino recorrido en el tiempo OA diferente de la unidad. Por lo tanto, para hallar W trazaremos desde c (sobre el eje u) una paralela a x que corta a OP en Q y desde aquí una paralela a u que al cortar al eje x nos dará W_x y con ello, como conocemos la dirección OH, tendremos el

vector W y la componente W_y del mismo. Se ha hallado así la resultante relativista W de los vectores v y V que forman entre sí el ángulo θ'.

36. **Las fórmulas de Lorentz forman grupo.** — Consideremos tres sistemas de referencia, S, S′ y S″, y sea v la velocidad de S′ respecto de S y V la velocidad de S″ respecto de S′. Supondremos que los ejes x, x', x'' coinciden y que V y v tienen la misma dirección y sentido. Se pasa de S a S′ por las fórmulas:

$$[19] \qquad x' = \frac{x - vt}{\cos\alpha} \; ; \; t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}\, x}{\cos\alpha} \; ;$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \; ;$$

y de S′ a S″ por

$$[20] \qquad x'' = \frac{x' - Vt'}{\cos\beta} \; ; \; t'' = \frac{t' - \frac{V}{c^2}\, x'}{\cos\beta} \; ;$$

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \, .$$

Si se reemplaza en las [20] los valores dados en [19] obtendremos expresiones que permitirán pasar de las medidas efectuadas en S a las efectuadas en S″, obteniéndose de ese modo:

$$[21] \qquad x'' = \frac{x - Wt}{\cos\gamma} \; ; \; t'' = \frac{t - \frac{W}{c^2}\, x}{\cos\gamma} \; ;$$

$$\cos\gamma = \sqrt{1 - \frac{W^2}{c^2}} \; ;$$

siendo

$$[22] \qquad W = \frac{v + V}{1 + \frac{vV}{c^2}} \, .$$

Como esta W es la velocidad de S″ respecto de S, se ve que las fórmulas que se obtienen siguen siendo, como era de esperar, las mismas fórmulas de *Lorentz*. Esta propiedad hace que se designe a las fórmulas de *Lorentz* por *grupo de Lorentz*. Las ecuaciones de transformación de *Galileo* también forman grupo, pero con el teorema de adición $W = v + V$. Si se admitiera esta última expresión para la adición de velocidades, las fór-

mulas de *Lorentz* no formarían grupo y se obtendrían resultados diferentes, y por lo tanto contradictorios, si se calculara una vez pasando directamente de S a S″ y otra de S a S′ y de S′ a S″.

37. Casos aparentes de velocidades superiores a la de la luz. — De la adición de velocidades surge, como ya lo hicimos notar, que no puede existir ninguna velocidad superior a la de la luz. Las mismas fórmulas de *Lorentz* pierden todo su significado si se supone $v > c$. No obstante, en algunos casos, un análisis superficial podría hacer creer que nos encontramos con velocidades de transmisión de "algo" superiores a la de la luz. Así, por ejemplo, si se tuviera una varilla constituída por un material *absolutamente rígido* y se golpeara en uno de sus extremos, dicho impulso se propagaría por la varilla hasta el otro extremo en forma instantánea, o sea con velocidad infinita. Pero en la práctica no hay cuerpos absolutamente rígidos, y en una varilla de acero la compresión producida por un golpe en uno de sus extremos se propaga hasta el otro con una velocidad que es sólo de unos pocos kilómetros por segundo y, por lo tanto, muy inferior a la de la luz. En consecuencia, podemos afirmar que, de acuerdo con la teoría de la relatividad, no hay, *ni puede haber*, cuerpos absolutamente rígidos. De un modo análogo, el tirón que se efectúa en uno de los extremos de una cuerda tensa se propaga a lo largo de la misma con una velocidad igual a $\sqrt{F/\mu}$, siendo F la fuerza que mantiene tendida a la cuerda y μ la densidad lineal de la misma. Al aumentar F aumenta la velocidad de propagación, pero, para cualquier material, la cuerda se rompe inevitablemente por una tensión que es, en mucho, inferior a la que se necesitaría para alcanzar la velocidad de la luz.

Ya que fracasamos mecánicamente al tratar de crear un dispositivo que produzca una propagación con velocidad superior a la de la luz, puesto que las ondas elásticas se propagan mucho más lentamente, podemos intentar pensar en algo puramente geométrico. El aparato podría consistir en dos reglas que se aproximan y forman entre sí un ángulo muy pequeño. La intersección de los cantos de ambas reglas puede así desplazarse con una velocidad tan grande como se quiera. En la fig. 49 se ha representado una guillotina cuyo filo forma un ángulo φ con la parte AB, fija, de la misma. Si la parte móvil se desplaza con la velocidad v, el punto P, intersección de AB con el filo, se corre con una velocidad V tal que:

$$\frac{v}{V} = \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi \quad ; \quad V = \frac{v}{\operatorname{tg}\varphi} .$$

Esta velocidad V puede, efectivamente, ser tan grande como

se quiera, para lo cual basta con hacer φ lo suficientemente pequeño. Podemos imaginar todavía que sobre AB colocamos una hoja de papel, y entonces V representaría la velocidad del corte (la velocidad del tajo). Si $\varphi = 0$, o sea si el filo de la guillotina es paralelo a AB, tendríamos una velocidad infinita. Pero, ¿hay algo que se propaga efectivamente de A hacia B? ¿Podría utilizarse este dispositivo para enviar señales de A hacia B?

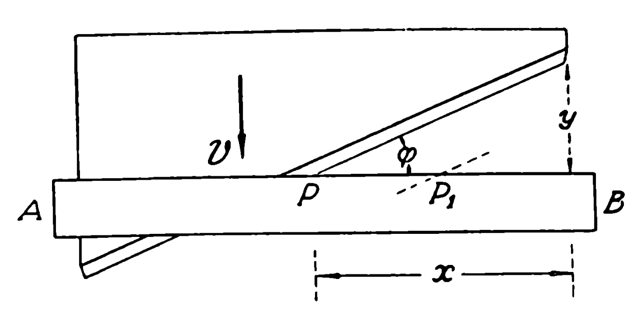


Fig. 49. — Una "velocidad geométrica" que puede ser superior a la de la luz.

Para contestar a estas preguntas pensemos en dos acontecimientos sucesivos de esa "propagación", tales como el P y el P_1. El P es anterior al P_1 pero ambos son enteramente independientes. La cuchilla podría estar mellada entre P y P_1 y hasta podría faltar un trozo de la misma, y lo mismo ocurriría P_1 independientemente en absoluto de P, cualquiera que sea P. La hoja de papel que corta la cuchilla puede aparecer, para una forma determinada de la misma, con un tajo a la derecha, otro a la izquierda e intacta en la parte central, lo que prueba que no estamos en presencia de ninguna propagación. Por eso, este proceso no puede ser utilizado para enviar señales de un punto al otro. Debemos admitir, en consecuencia, que la velocidad mayor de que puede disponerse para enviar una señal de un punto a otro es la velocidad de la luz en el vacío. Aun cuando ciertas sustancias tienen para determinada longitud de onda un índice de refracción inferior a la unidad (dispersión anormal), ello no implica que por su intermedio pueda enviarse una señal con velocidad superior a la de la luz, pues aunque en esas sustancias y para esa longitud de onda la *velocidad de fase* resulta mayor que la velocidad de la luz en el vacío, la *velocidad de grupo*, la velocidad con que se propaga la energía del proceso luminoso, es siempre inferior a *c*. La velocidad con que corre la fase puede ser asimilada al corrimiento de algo puramente geométrico como la intersección del punto P del ejemplo anterior. En la teoría de *De Broglie* se asocia a cada partícula (un electrón, por ejemplo) una onda, y si la partícula se mueve con velocidad v, la velocidad de fase u de las ondas es tal que

$$uv = c^2.$$

Esta velocidad de fase u es siempre mayor que c, pero no

puede ser utilizada para enviar ninguna señal. Observemos todavía que, si respecto de un sistema S, otro sistema S′ se mueve en el sentido positivo del eje x con la velocidad V_1 y otro sistema S″ tiene respecto de S la velocidad V_2 pero de sentido opuesto, la velocidad con que se alejan entre sí S′ y S″, observada desde S, es $V_1 + V_2$. Pero esta "velocidad de alejamiento", que puede ser mayor que c, no es la velocidad de *algo* que pueda servir siquiera para enviar una señal. Naturalmente que esta velocidad de alejamiento entre S′ y S″, observada desde S, no coincide con la velocidad que desde S′ se ve alejar a S″ o desde S″ a S′. Si suponemos que $V_1 = 3c/5$ y $V_2 = -3c/5$, la velocidad de alejamiento sería $6c/5$, pero la velocidad de S′ respecto de S″ sería siempre menor que c y en este caso igual a $15c/17$.

38. **Propagación de la luz.** — Ya sabemos que la luz se propaga con la misma velocidad c en todos los sistemas (inerciales), puesto que ése ha sido uno de los postulados básicos. También hicimos notar que si en las fórmulas [4] ó [18] se hace $V = c$, se obtiene también $W = c$. Como consecuencia de esto, si una onda luminosa parte del origen O del sistema S en el instante cero, alcanzará al cabo de un tiempo t de este sistema, una superficie esférica de radio igual a ct, de tal modo que la ecuación de dicha superficie será:

[23] $$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$$

y en el sistema S′, que se mueve respecto de S con la velocidad v, se tendrá que tener también, al cabo del tiempo t', una superficie esférica de radio ct' y centro en O′, o sea:

[24] $$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2.$$

Antes de proseguir, verifiquemos que es efectivamente así. Reemplazando en [23] los valores de x, y, z, t, por los dados en (II, 17) (con II, 8) resulta:

[25] $$\frac{(x' + vt')^2}{\cos^2 \alpha} + y'^2 + z'^2 = \frac{\left(t' + \frac{v}{c^2}\, x'\right)^2 c^2}{\cos^2 \alpha}$$

de la cual, efectuando las operaciones, se obtiene efectivamente la [24]. La validez de [23] y [24] ¿debe entenderse como una superficie esférica que tiene dos centros? De ninguna manera: respecto del sistema S la luz llega simultáneamente a los puntos de una superficie esférica de radio R y centro O, y eso ocurre en el instante t de ese sistema, siendo $R = ct$. Pero estos acontecimientos *no son simultáneos respecto de S′*. Para este sistema, la luz llega simultáneamente a los puntos de una superfi-

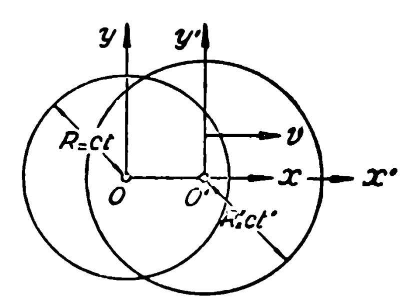


Fig. 50. — En los dos sistemas la superficie de onda es esférica.

cie esférica de centro O′ y radio R′ en el instante t' de S′, siendo $R' = ct'$ (fig. 50).

Esto que precede se comprende de inmediato mediante la representación gráfica de las fórmulas de *Lorentz* (§ 28) ya tantas veces utilizada. En la fig. 51, OL_1 y OL_2, bisectrices de los ángulos que forman los ejes x con los ejes u, representan rayos de luz que se propagan según x ó x' en el sentido positivo y negativo, respectivamente, de estos ejes. Si imaginamos a los ejes yy' levantados por O perpendicularmente al plano del dibujo, la representación de todos los rayos de luz que parten de O en el instante cero y que se propagan en el plano xy será un cono oblicuo de vértice en O, cuya intersección con el plano xu da las rectas OL_1, OL_2. Para encontrar el lugar de los puntos alcanzados por la luz en el instante t del sistema S,

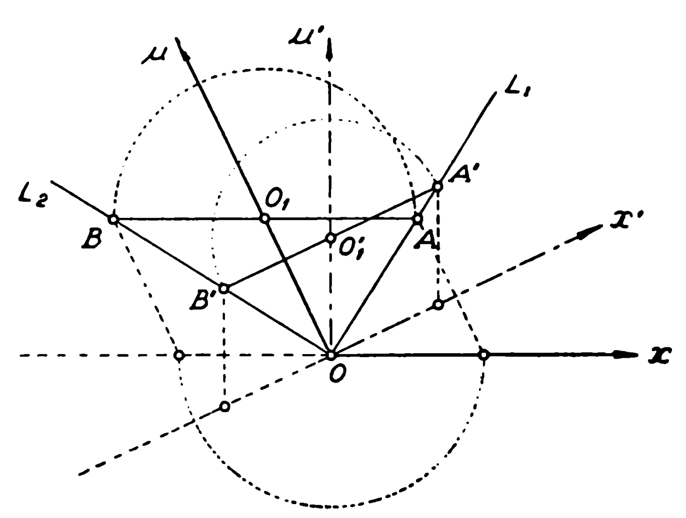


Fig. 51. — Las dos secciones circulares de un mismo cono.

seccionaremos a dicho cono por el plano $t =$ constante ($u =$ $=$ constante). AO_1B puede ser la traza con el plano del dibujo de uno de estos planos. O_1A es el camino recorrido por el rayo en el sentido positivo del eje x en el tiempo representado por el segmento OO_1, y O_1B el camino recorrido en sentido opuesto en igual tiempo. Se ve en la figura que el triángulo OBO_1 es isósceles por ser el ángulo OBO_1 igual al BOO_1, de donde resulta $O_1B = OO_1$. También es isósceles el triángulo OO_1A por ser ángulo AOO_1 = ángulo OAO_1, siendo entonces $O_1A = OO_1$. Resulta así que $O_1A = O_1B$. Se ve entonces que la sección del cono L_1OL_2 por el plano AB da una circunferencia cuyo centro está en O_1. Análogamente, si se secciona el mismo cono por el

plano $t' =$ constante ($u' =$ const) se obtiene otra circunferencia. Para el plano A'B' el centro de la circunferencia está en O'_1. Al transcurrir el tiempo, el cono resulta cortado para el sistema S por planos paralelos al BO_1A y cada vez más alejados del origen O, lo que se traduce por un aumento constante del radio alcanzado por la luz. Lo mismo, exactamente, ocurre para S', en que los planos que seccionan al cono son paralelos a $A'O'_1B'$.

Si agregamos ahora el eje z, como un cuarto eje, tendremos que la propagación de la luz que parte de O en todo sentido estará representada por un hipercono que al ser seccionado por el hiperplano $t =$ const da una superficie esférica de radio ct, y si se secciona por $t' =$ const da también otra superficie esférica de radio ct'. De esto último, naturalmente, no puede darse una representación geométrica inmediata, pues no podemos intuir directamente un espacio geométrico de cuatro dimensiones. Pero sí podemos ver las "proyecciones" de ese hiperespacio $xyzu$ en los espacios xyz, xyu, yzu, del mismo modo que al dibujar una figura de tres dimensiones xyz la proyectamos sobre los planos xy; xz; yz.

En la representación que precede hemos hecho eso y así como vimos que en el plano xy la luz se propaga para S y S' según circunferencias de centros O y O', se ve también que lo mismo ocurre para los planos xz ó yz, pudiendo pasar de ese modo de las circunferencias a la esfera.

39. **Aberración de la luz.** — Si en las fórmulas del § 36 hacemos $V = c$ resulta $W = c$, por lo cual de la [9] se obtiene:

[26] $$\cos\theta = \frac{\cos\theta' + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}\cos\theta'},$$

y de la [16]:

[27] $$\operatorname{sen}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c}\cos\theta'},$$

valiendo también la [7]. Con sólo cambiar v por $-v$ puede obtenerse:

[28] $$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}\cos\theta};$$

[29] $$\operatorname{sen}\theta' = \frac{\operatorname{sen}\theta\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}{1-\dfrac{v}{c}\cos\theta}.$$

Las [26] y [27] o las [28] y [29] son las fórmulas relativistas de la aberración de la luz. Si calculamos, a partir de estas fórmulas, el seno de la diferencia $\theta' - \theta$, obtenemos:

[30] $$\operatorname{sen}(\theta'-\theta) = \frac{\dfrac{v}{c}\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta\left(1-\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}\right)}{1-\dfrac{v}{c}\cos\theta}.$$

Para $\theta = \pi/2$, $\theta' - \theta = \alpha$, es el ángulo que hemos llamado de aberración principal de los dos sistemas, y se obtiene para dicho ángulo la expresión que ya conocemos:

[31] $$\operatorname{sen}(\theta'-\theta) = \operatorname{sen}\alpha = \frac{v}{c}.$$

Si se considera que v es pequeño con respecto a c, de modo que puedan despreciarse los términos de grado superior en v/c, la [30] da:

[32] $$\operatorname{sen}(\theta'-\theta) = \frac{\dfrac{v}{c}\operatorname{sen}\theta}{1-\dfrac{v}{c}\cos\theta},$$

que difiere de la fórmula clásica (I, 18) tan sólo en que aquí aparece el seno y allá la tangente y que, por lo tanto, dan resultados coincidentes para ángulos pequeños, o sea para cuando v sea pequeño con respecto a c.

En las fórmulas precedentes v es la velocidad relativa de dos sistemas de referencia

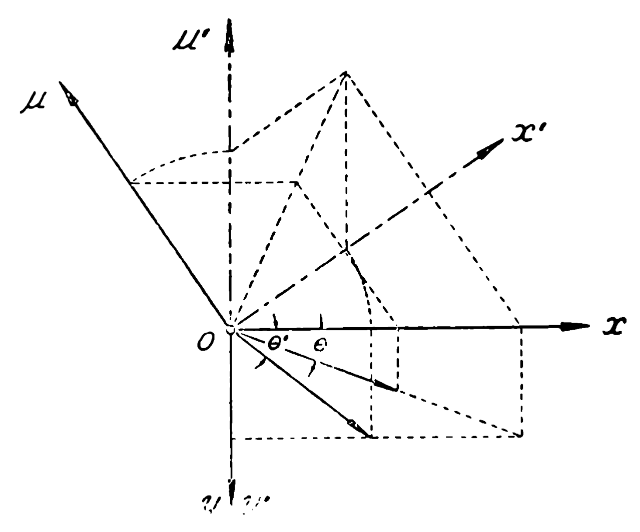


Fig. 52. — Construcción gráfica para hallar el ángulo de aberración.

y cabe preguntar: ¿cuál es el valor de v en el fenómeno de la aberración astronómica? Los dos sistemas son en este caso: uno el Sol y el otro la Tierra, y v es, en consecuencia, la velocidad de traslación de la Tierra respecto de un sistema fijo al Sol y a las estrellas.

Representación gráfica. — Si se hace la construcción de la figura 48 pero tomando V = c, se encuentra el ángulo θ si se da θ' o viceversa (fig. 52).

40. **Efecto Doppler.** — Consideremos un tren de ondas planas que se propaga con respecto al sistema S (fig. 53), formando la dirección de propagación con el eje x del mismo el ángulo θ. Supondremos que los planos π_2 y π_1 perpendiculares a la dirección de propagación representan las posiciones de la "cabeza" y la "cola" del tren considerado en el instante t_0 del sistema S. La longitud del tren de ondas, medida desde S, es entonces igual al segmento PA = L. Respecto del sistema S' la luz se propagará en la dirección PB que forma con x' el ángulo θ'. Deseamos calcular la longitud L' del mismo tren de ondas medido desde el sistema S'. La llegada de la luz al punto P es registrada en S como un acontecimiento que tiene lugar en el punto $x = x_0$ y en el instante $t = t_0$. Respecto de S' ese acontecimiento ocurre en el lugar $x' = x'_0$ y en el instante $t' = t'_0$. En este instante de S' la cola del tren de ondas coincidirá con un plano π'_1 perpendicular en P a la dirección de propagación que es PB. ¿Dónde se encuentra el frente de onda o la cabeza del tren respecto de S' y en ese mismo instante t'_0? La luz alcanza simultáneamente para S todos los puntos del plano π_2 y precisamente en el instante t_0 de S. Pero t' (tiempo de S') depende de t y de x. Por esta razón, si consideramos los puntos del plano π_2 que tengan por abscisa x_0, tal como el

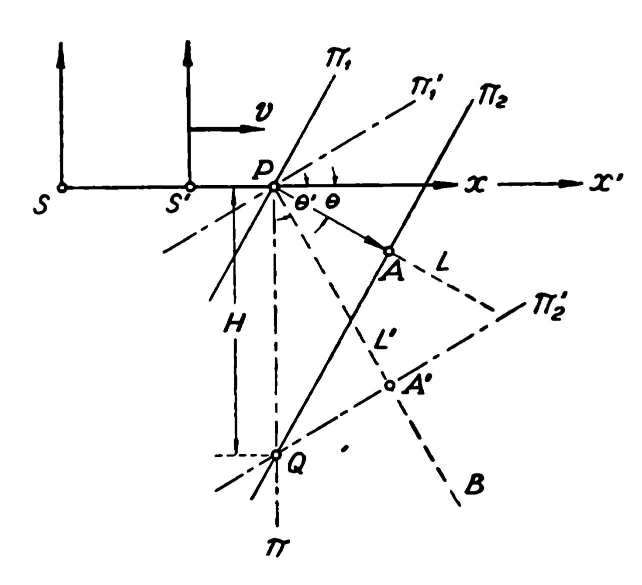


Fig. 53. — Efecto Doppler.

punto Q de la figura, el acontecimiento de la llegada de la luz a Q se registra en el sistema S como ocurrido en un lugar donde $x = x_0$ y en el instante $t = t_0$. Pero para $x = x_0$ y $t = t_0$ se tenía para S′, x'_0 y t'_0. La llegada de la luz al punto Q ocurre entonces en el instante t'_0 de S′. Si trazamos por Q el plano π'_2, dicho plano cortará a PB en un punto A′ y el segmento PA′ será la longitud L′ del tren de ondas medido desde S′.

Por otra parte, la distancia PQ normal a la velocidad relativa v de ambos sistemas, tiene en S y S′ la misma longitud H por lo cual

[33] $$L = H \operatorname{sen} \theta \quad ; \quad L' = H \operatorname{sen} \theta' .$$

Si llamamos n al número de ondas contenidas en el tren, dicho número tiene que ser igual para S y para S′, por lo cual, si designamos por λ y λ' a las longitudes de onda medidas en ambos sistemas, se tendrá

[34] $$L = n\lambda \quad ; \quad L' = n\lambda' .$$

Llamando ν y ν' a las frecuencias medidas en ambos sistemas, se tendrá

[35] $$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\nu'}{\nu} = \frac{L}{L'} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen} \theta'}$$

y de aquí, teniendo en cuenta [29], resulta:

[36] $$\nu' = \nu \frac{1 - \dfrac{v}{c} \cos \theta}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} ,$$

que es la fórmula del efecto Doppler relativista, la cual, en primera aproximación, coincide con la fórmula clásica.

Si $\theta' = \pi/2$, en tal caso el observador de S′ recibe los rayos de luz perpendicularmente a la velocidad relativa y respecto de S será, de acuerdo con [26], $\cos \theta = v/c$, con lo cual la [36] se convierte:

[37] $$\nu' = \nu \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} .$$

Se trata del efecto *Doppler transversal*, al cual nos hemos referido en el § 29.

Si en la [36] hacemos $\theta = 0$ se obtiene:

[38] $$\nu' = \nu \frac{1 - \dfrac{v}{c}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \nu \frac{\sqrt{1 - \dfrac{v}{c}}}{\sqrt{1 + \dfrac{v}{c}}} \cdot$$

Si en esta expresión se desprecian las potencias de grado superior de v/c se obtiene

[39] $$\nu' = \nu\left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

que coincide con la fórmula clásica (I, 31).

Representación gráfica. — Dado que ya sabemos hallar gráficamente el ángulo de aberración (fig. 52), la construcción de la figura 53 permite determinar la relación L/L′ igual a λ/λ'. Pero para $\theta = 0$ dicha construcción no es viable. En tal caso se puede hallar λ/λ' en forma mucho más directa: si OO′ es la bisectriz de los ejes xu y $x'u'$, dispuestos los ejes en la forma que ya conocemos (fig. 54), la faja OO′AA′, siendo AA′ paralela a OO′, representa un tren de ondas que en el sistema S se propaga según el eje x y cuya longitud es OA = L. Dicho tren tiene en el sistema S′ una longitud L′ que resulta de cortar la faja con la línea $t' =$ constante; en el caso de la figura $t' = 0$. Observando la figura se ve que:

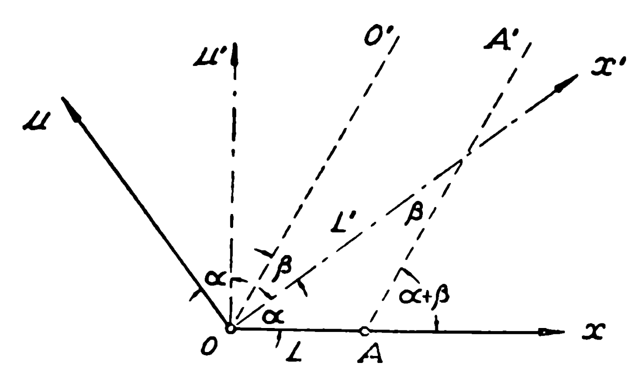


Fig. 54. — Un caso particular del efecto Doppler.

$$\frac{L'}{L} = \frac{\nu}{\nu'} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$$

y como

$$\operatorname{sen}\frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\omega}{2}}$$

resulta

[40] $$\frac{\nu}{\nu'} = \sqrt{\frac{1+\operatorname{sen}\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}}$$

que coincide con [38], pues es $\operatorname{sen}\alpha = v/c$.

En la fig. 55 se han representado los conos de luz que parten del origen O′ del sistema S′ a intervalos iguales de tiempo. El cono de vértice en O(OL_0L_0) corresponde a la luz que par-

tió de O en el instante cero cuando los orígenes O y O' estaban en coincidencia, y el que tiene su vértice en O'_1 representa la luz que parte de O' en todo sentido en el instante de S' representado por el segmento OO'_1, y así sucesivamente. Los

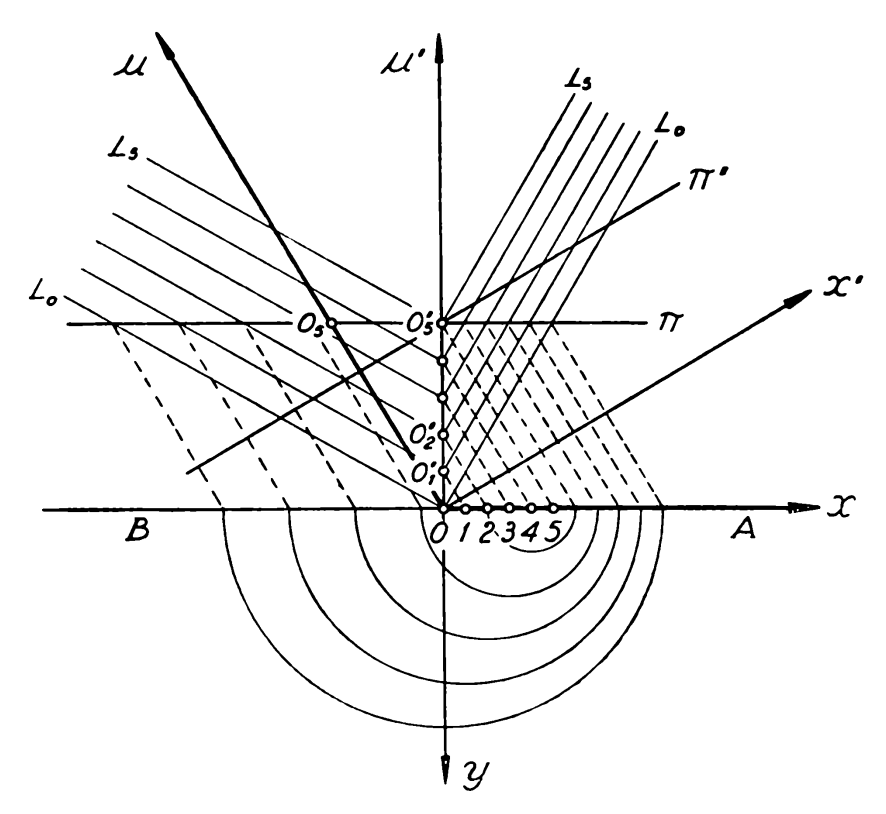


Fig. 55. — Las superficies de onda en el efecto Doppler.

puntos 1, 2, 3, etc., sobre el eje de las x, representan los lugares en que O' se encontraba respecto de S al emitir los impulsos luminosos en los instantes considerados. Si seccionamos esta familia de conos por un plano π para el cual sea u = constante, o sea t = constante, del sistema S, obtendremos una familia de circunferencias que son las representadas en el plano xy. (Si hubiéramos considerado los hiperconos de cuatro dimensiones se obtendría en el corte una familia de superficies esféricas).

Se ve, con sólo observar la figura, que para los observadores fijos al sistema S y situados del lado de las x positivas, tales como el A, la luz parecerá con menor longitud de onda que para los observadores situados como el B hacia el lado de las x negativas. La fuente luminosa, situada en O', se acerca a A y se aleja de B. Si, en cambio, cortamos a la familia de conos por un plano π', para el cual sea u' = constante, obtene-

mos una familia de circunferencias todas concéntricas y situadas en el plano $x'y'$ (no representadas en la figura) y que tienen el centro común en O'.

41. Distancia cronotópica. — Sean dos acontecimientos A y B, que para el sistema S tienen las coordenadas siguientes:

$$\begin{array}{lllll} A: & x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ B: & x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \end{array}$$

La distancia espacial $\Delta\sigma$ que separa a los mismos es:

$$\Delta\sigma^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

o sea

[41] $$\Delta\sigma^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2.$$

En cambio, la "distancia temporal" Δu es igual al camino que recorrería la luz en el intervalo de tiempo $t_2 - t_1$, o sea

[42] $$\Delta u = c(t_2 - t_1) = u_2 - u_1.$$

Respecto de otro sistema de referencia S' esos mismos acontecimientos A y B tienen otras coordenadas:

$$\begin{array}{lllll} A: & x'_1 & y'_1 & z'_1 & t'_1 \\ B: & x'_2 & y'_2 & z'_2 & t'_2 \end{array}$$

y su distancia espacial

[43] $$\Delta\sigma'^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2$$

será en general diferente de $\Delta\sigma$, ocurriendo lo propio con la distancia temporal

[44] $$\Delta u' = c(t'_2 - t'_1) = u'_2 - u'_1.$$

Minkowski introdujo en 1909 el concepto de distancia cronotópica s entre dos acontecimientos, definida del modo siguiente:

[45] $$s^2 = \Delta u^2 - \Delta\sigma^2$$

que es, en cierto modo, una extensión del teorema de *Pitágoras*, pero con un cambio de signo. La coordenada temporal u se distingue de las coordenadas espaciales x, y, z precisamente por ese cambio de signo. Si se pusiera *más* en lugar de *menos*, cualquiera de las coordenadas x, y ó z sería permutable con u. Esta coordenada temporal $u = ct$, se comporta en forma *análoga* a las coordenadas espaciales, pero *no en forma idéntica.*

La distancia cronotópica definida en [45] se llama también *intervalo, distancia minkowskiana* y también *elemento lineal,* si es que se refiere a dos sucesos infinitamente próximos. La importancia de este concepto radica en el hecho de que la distancia cronotópica es un *invariante.* El valor de la tal distancia es, efectivamente, independiente del sistema de coordena-

das, como se prueba sólo con aplicar las fórmulas de *Lorentz* (II, 46), de las cuales se obtiene:

$$\Delta u = \frac{\Delta u' + \Delta x' \cdot \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \quad ; \quad \Delta x = \frac{\Delta x' + \Delta u' \cdot \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \quad ;$$

$$\Delta y = \Delta y' \quad ; \quad \Delta z = \Delta z'.$$

Llevando estos valores a [41] y [45] resulta:

$$s^2 = \frac{(\Delta u' + \Delta x' \cdot \operatorname{sen} \alpha)^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{(\Delta x' + \Delta u' \cdot \operatorname{sen} \alpha)^2}{\cos^2 \alpha} - \Delta y'^2 - \Delta z'^2$$

que se transforma de inmediato en

[46] $$s^2 = \Delta u'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2$$

y como por definición el segundo miembro es s'^2, resulta efectivamente

[47] $$s = s'.$$

Claro está que puede definirse esta distancia cronotópica cambiando los signos de la parte espacial y temporal, o sea haciendo

[48] $$s^2 = \Delta\sigma^2 - \Delta u^2.$$

En esta forma, la distancia resulta imaginaria cuando del primer modo es real y viceversa. Nosotros tomaremos, por lo general, los signos como lo hemos hecho en [45] para obtener una distancia cronotópica real al considerar un par de acontecimientos dados por las coordenadas de un punto que se desplaza. En este caso, como la velocidad del punto es siempre menor que la de la luz, la distancia temporal Δu, lo que recorrería la luz en el tiempo empleado por el punto al desplazarse, será siempre mayor que dicho desplazamiento $\Delta\sigma$.

Consideremos ahora dos acontecimientos, o sea dos *puntos de universo*, incluyendo en esta designación el espacio y el tiempo, cuya distancia cronotópica sea nula. En tal caso será:

$$\Delta u = \Delta\sigma \quad ;$$

$$c\Delta t = \Delta\sigma \quad ;$$

y entonces la distancia espacial resul-

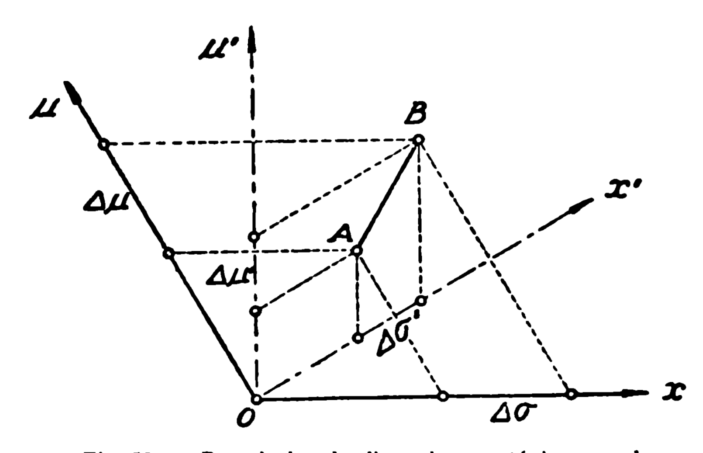


Fig. 56. — Para la luz, la distancia cronotópica es nula.

ta —en cualquier sistema— igual a la distancia temporal. Esto significa que, en el intervalo de tiempo que separa ambos sucesos, un rayo de luz puede propagarse de un punto al otro.

Si dos acontecimientos se producen, referidos a determinado sistema, en lugares que distan entre sí 300 000 km y el intervalo de tiempo que los separa es de 1 seg, su distancia cronotópica será nula. En la fig. 56 se ha ilustrado este caso: para los puntos de universo A y B es $\Delta u = \Delta\sigma$ y también $\Delta u' = \Delta\sigma'$, aún cuando $\Delta u \neq \Delta u'$ y $\Delta\sigma \neq \Delta\sigma'$. El segmento AB puede representar la trayectoria de universo de un rayo de luz.

La distancia cronotópica de dos puntos cualesquiera de un rayo luminoso es siempre nula.

Si suponemos que s es real, en un determinado sistema S será

[49] $$\Delta u > \Delta\sigma \quad ; \quad c\Delta t > \Delta\sigma$$

y por la invariancia de s lo mismo ocurrirá en cualquier otro sistema. En este caso, el cociente $\Delta\sigma/\Delta t$ representa una velocidad menor que la de la luz y, por lo tanto, si se elige otro sistema de referencia S′, apropiado, que se mueva con esta velocidad respecto de S, podrá lograrse que para S′ sea $\Delta\sigma$, la distancia espacial, igual a cero. Los acontecimientos A y B de la fig. 57 están en este caso, y observando el triángulo ABC se ve que:

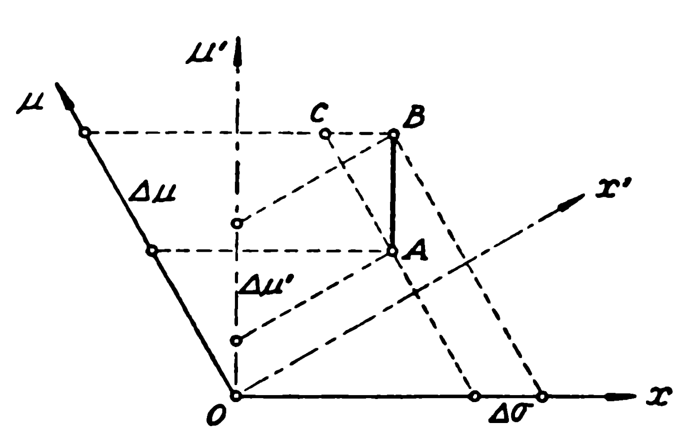


Fig. 57. — Cupla en el tiempo: orden de sucesión inmutable.

$$\Delta u^2 - \Delta\sigma^2 = \Delta u'^2 = s^2 .$$

Dos acontecimeintos de esta clase [49] constituyen lo que se llama una *cupla en el tiempo* y para ellos puede encontrarse siempre un sistema de referencia que haga su distancia espacial igual a cero. Para acontecimientos así [49] *el orden de sucesión es inmutable*: si A es anterior a B en un sistema, será también anterior en cualquier otro, pues por ser s^2 positivo y s invariante se cumplirá siempre [49] y, en consecuencia, para cualquier sistema se cumplirá: $\Delta t > 0$. Si, para fijar ideas, suponemos que los dos acontecimientos están constituí-

dos por el encenderse y el apagarse de una misma lámpara fija en un tren en marcha, respecto del tren, la distancia espacial $\Delta\sigma'$ es igual a cero y respecto a la vía es $\Delta\sigma = v \,.\, \Delta t$, si Δt es el intervalo de tiempo, que separa ambos sucesos, medido desde la vía, y por la invariancia de s deberá cumplirse:

$$c^2\Delta t^2 - v^2\Delta t^2 = c^2\Delta t'^2$$

de donde obtenemos la relación que ya conocemos:

[50] $$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad ; \quad (\Delta\sigma' = 0).$$

Considerando, en cambio, dos sucesos para los cuales resulte s^2 negativo (s imaginario), en cierto sistema será

[51] $$\Delta u^2 - \Delta\sigma^2 < 0$$

y podrá elegirse siempre un sistema respecto del cual sea $\Delta u' = 0$, siendo el valor de $\Delta\sigma'$ tal que

[52] $$\Delta u^2 - \Delta\sigma^2 = - \Delta\sigma'^2.$$

Acontecimientos así [51] constituyen una *cupla en el espacio* y puede elegirse siempre un sistema respecto del cual la distancia temporal sea nula, o dicho de otro modo, los sucesos pueden aparecer como simultáneos en determinado sistema (fig. 58). El orden de sucesión de acontecimientos de esta clase puede cambiarse al pasar de un sistema a otro, como es el caso de los sucesos O y P de la figura: P posterior a O respecto de S y anterior a O respecto de S′. Esto puede suceder cuando la distancia temporal $c\Delta t$ es menor que la distancia espacial $\Delta\sigma$, de tal modo que sería necesario disponer de una velocidad superior a la de la luz para poder considerar que uno de los sucesos es causa del otro. Los sucesos son entonces *causalmente independientes*, y de ahí que puedan aparecer simultáneos o con orden cambiante si se pasa de un sistema a otro.

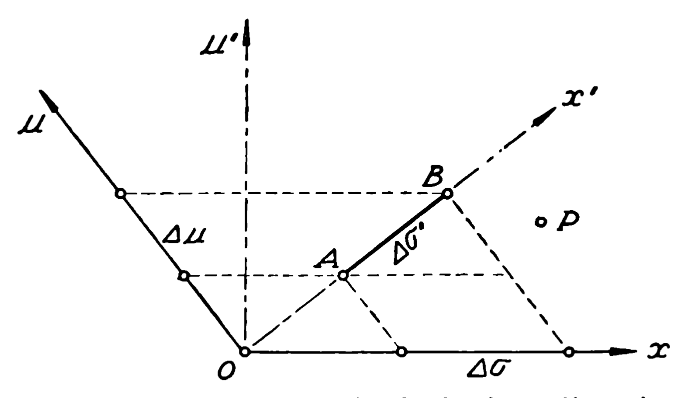


Fig. 58. — Cupla en el espacio: el orden de sucesión puede alterarse.

Supongamos que "hoy" ocurre en la Tierra una explosión atómica y que tenemos motivos para pensar, por su comportamiento anterior, que en ese mismo instante estallará una estrella que dista de nosotros 20 años-luz. La noticia de la explosión de la estrella llegará a la Tierra, entonces, 20 años después de la explosión atómica. Estos dos acontecimientos, simultáneos respecto de nosotros, sistema S, no pueden ser causa uno del otro. Su distancia cronotópica es, tomando signo positivo para la separación espacial, de acuerdo con [48], igual a 20 años-luz. Consideremos ahora (fig. 59) un sistema S′ que se acerque a la estrella con una velocidad igual a 3/5 de c. Si regulamos,

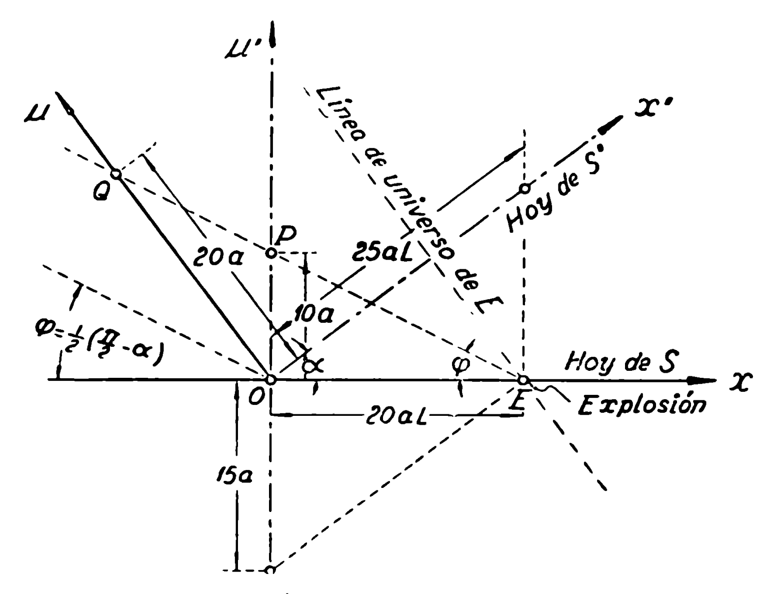


Fig. 59. — Una explosión estelar que ocurre "hoy" para nosotros, ocurrió hace ya 15 años respecto de S′.

no ya los relojes sino los calendarios de ambos sistemas, de tal modo que para S′ la explosión terrestre ocurra también en el día de "hoy", la explosión estelar, con respecto a S′ *ocurrió* hace 15 años, cuando la distancia de la estrella a la Tierra era, según S′, de 25 años-luz.

Pero debe observarse que los observadores de S′ que pasan "hoy" cerca de la Tierra, percibirán la explosión estelar que se produjo hace 15 años dentro de 10 años (punto P de la figura). La línea de universo del rayo de luz que parte de E con la noticia de la explosión corta al eje u' en P y al eje u en Q y para el caso considerado resulta $\operatorname{tg} \varphi = 1/2$.

En la fig. 60 se ha representado al sistema S y al S″, que se mueve alejándose de la estrella con una velocidad igual también a 3/5 de c. Para S″ la bomba terrestre estalló hoy, pero

la estrella *estallará*, si se cumplen las predicciones astronómicas, dentro de 15 años. Cuando suceda tal cosa, la estrella, que dista "hoy" del origen O″ de S″ 16 años-luz, distará de dicho origen 25 años-luz. La noticia de la explosión estelar les lle-

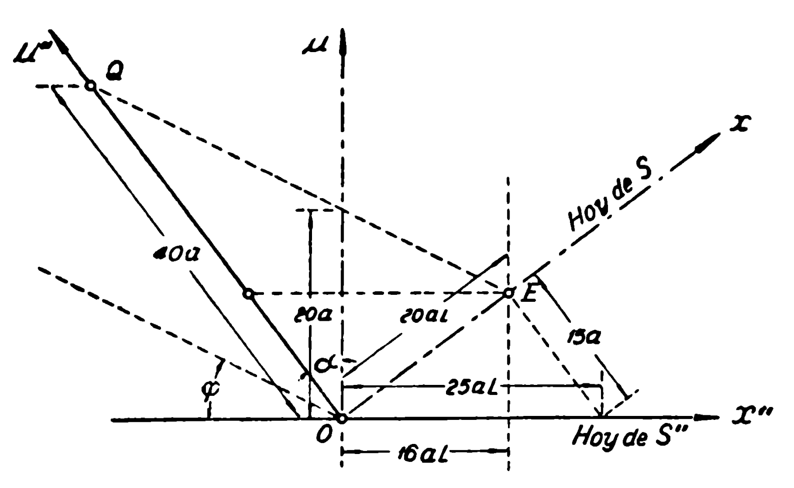


Fig. 60. — La explosión estelar que respecto de nosotros debe ocurrir hoy, se producirá respecto de S″ dentro de 15 años.

gará, a los observadores situados en O″, dentro de 40 años (punto Q de la figura). En todos los casos, la distancia cronotópica entre los dos acontecimientos, las dos explosiones, resulta la misma:

$$s = \sqrt{20^2 - 0^2} = \sqrt{25^2 - (-15)^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20.$$

Este ejemplo no lo hemos puesto con el ánimo de que se vaya vislumbrando lo difícil que será, para los criminales del futuro, inventar coartadas aceptables si cometen sus fechorías por los espacios intersiderales, viajando en cohetes con velocidades próximas a la de la luz. No; nuestro objeto ha sido ayudar al lector a comprender la profética frase de *Minkowski* (el trabajo original se publicó en febrero de 1909, poco después de la muerte del autor, ocurrida el 12 de enero de ese mismo año): *"A partir de ahora el espacio en sí y el tiempo en sí se hunden por completo en las sombras y sólo algo que es como una unión de ambos conserva una existencia propia"*.

42. **Tiempo propio.** — El hecho de que un mismo acontecimiento pueda estar en el futuro respecto de un sistema y en el pasado respecto de otro, puede ocasionar mal entendidos como el de cierta persona que se expresaba así: "Pienso casarme dentro de un año y si es cierto que lo que es futuro para mí puede ser ya pasado para los observadores de otro sistema, re-

sulta que, para ellos, yo ya estoy casado. ¿Cómo es esto posible? ¿Y si no me casara?".

El sujeto del cuento quedó tranquilo cuando se enteró que su casamiento estaba, forzosamente, en el futuro de todos los sistemas, pues ni aun para ir a casarse, podría recorrer en un año una distancia mayor de un año-luz. La distancia espacial entre el lugar donde se encuentra "hoy" y donde se encontrará el día de su casamiento tendrá que ser menor que el recorrido que efectúe la luz durante la espera. Por eso, *nuestro* futuro es un futuro absoluto y también es un absoluto nuestro pasado. Respecto de ningún sistema puede ser la muerte de un individuo anterior a su nacimiento, y si un átomo radiactivo emite ahora una partícula alfa y poco después otra beta, para cualquier sistema será la emisión α anterior a la β.

En particular, si medimos el intervalo de tiempo que separa dos acontecimientos vinculados a determinada partícula desde un sistema respecto del cual la partícula aparezca en reposo, dicho intervalo τ recibe el nombre de *tiempo propio*. Para ese sistema, que se llama también *sistema propio* de la partícula, la distancia espacial entre los dos acontecimientos considerados (emisión α y β del ejemplo) es nula, y la distancia cronotópica s será:

[53] $$s = c\tau.$$

Como s es un invariante, lo mismo que c, resulta que el tiempo propio es también un invariante.

Si medimos el tiempo t desde un sistema S, respecto del cual la partícula se mueve con cierta velocidad v, por la invariancia de s, podremos escribir, dado que $\Delta\sigma = vt$:

$$c^2t^2 - v^2t^2 = c^2\tau^2$$

de donde

[54] $$t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Se ve que el tiempo t será siempre mayor que el tiempo propio τ, pero ambos, t y τ, tendrán siempre el mismo signo. El orden de sucesión de los acontecimientos ligados a determinada partícula es invariable, pues coincide dicho ordenamiento con el del tiempo propio.

Si la partícula se mueve con movimiento variado respecto de un sistema inercial S, podremos considerar que la [54] sigue siendo válida si la aplicamos a un intervalo de tiempo infinitamente pequeño, durante el cual pueda considerarse a v como constante. Se tiene, así,

[55] $$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

y el tiempo propio τ estará vinculado al tiempo t del sistema S, desde el cual se observa que la partícula pasa de la posición A a la B por la expresión

[56] $$\tau = \int_A^B \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \, . \, dt$$

donde debe pensarse a v como cierta función de t. El tiempo propio τ es, repetimos, el medido desde un sistema respecto del cual la partícula está en reposo, por lo cual será el tiempo que indica un reloj que, considerado desde S, se mueve junto con la partícula. La [56] vincula entonces la marcha de un reloj fijo al sistema inercial S (tiempo t) con otro reloj que se mueve de cualquier manera (tiempo τ), admitiendo que el tal reloj resiste sin despedazarse los cambios de velocidad. De acuerdo con esto, un reloj de resorte, fijo en uno de los polos terrestres marchará más rápido ($t > \tau$) que otro reloj idéntico situado en el ecuador *, pues este último recorre, respecto de un sistema inercial, una circunferencia de 40 000 kilómetros en 24 horas. Pero en este caso, el reloj del polo le sacaría una ventaja al reloj del ecuador de sólo un segundo en 26 000 años. Por esta razón, daremos un ejemplo más impresionante. Supondremos que disponemos de un avión a propósito para hacer viajes intersiderales, con el cual se pueda alcanzar una velocidad que difiera de la de la luz en sólo 5 milésimos:

$$\frac{v}{c} = \sqrt{0{,}99} \cong 0{,}995 \quad ; \quad \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0{,}1.$$

Nos metemos, pues, en esta poderosa nave sideral y durante cinco años nos alejamos constantemente de la Tierra para retornar a nuestro planeta al cabo de otros cinco. A nuestro regreso nos encontramos con una sorpresa mayúscula: en la Tierra han transcurrido 100 años mientras nosotros sólo envejecimos en 10. Aquí no hay reciprocidad: en el avión los relojes marcharon mucho más lentamente que en la Tierra y en concordancia con ello, ya que hasta los átomos vibraban más lentamente, los procesos biológicos se desarrollaron también con la misma parsimonia. Pero, ¿cómo es posible? ¿No pueden suponerse los pasajeros del avión en reposo y considerar que es la Tierra la que se alejó de ellos con velocidad próxima a la de la luz, durante cierto tiempo, para acercarse después. En

* Ejemplo original de *Einstein*.

este caso, si pudieran considerarse las cosas de este modo, serían los del avión los que habrían envejecido 100 años, mientras que en la Tierra transcurrían sólo 10. Pero las cosas no pueden considerarse así: son los pasajeros del avión y no los habitantes de la Tierra los que experimentan los efectos de la aceleración durante la partida y la llegada y en el proceso del viraje para emprender el regreso. El sistema Tierra y el sistema avión *no son equivalentes.*

Para convencernos de ello y comprender la causa de esa asimetría que muestra el verdadero significado de la relatividad del tiempo, transcribimos a continuación el siguiente relato del viaje que servirá para aclarar lo que en la literatura relativista se conoce con el nombre de *paradoja de los relojes.*

"Partimos con movimiento uniformemente acelerado respecto de la Tierra y con una aceleración próxima a g. De este modo, al comienzo, todo iba bien, pues nuestro peso dirigido hacia la popa del navío, era aproximadamente igual al que teníamos en la Tierra. Habíamos calculado que manteniendo constante esta aceleración, en algo menos de un año terrestre, alcanzaríamos una velocidad próxima a la de la luz. Por esta razón se mantuvo constante esta aceleración: los observadores terrestres que nos seguían con sus telescopios podrían atestiguar que nos alejábamos de ellos como lo habíamos convenido: $d = \frac{1}{2}gt^2$. Pero, cosa curiosa, a medida que aumentaba nuestra velocidad, nuestro peso se hacía mayor y los cuerpos caían hacia la popa con una aceleración que crecía constantemente. Al final del período en que viajamos con movimiento acelerado, nos sentíamos aplastados contra nuestros asientos, pues nuestro peso se había hecho —cosa increíble— mil veces mayor. Los cuerpos también caían entonces con una aceleración igual a 1 000 g *. Fué un verdadero alivio cuando la aceleración comenzó a disminuir hasta anularse totalmente. A partir de entonces continuamos nuestro viaje absolutamente ingrávidos y flotábamos en el aire, como los angelitos de Rubens entre las nubes. Pero todo lo que observamos en el interior de nuestra cabina se convierte en nada si lo comparamos con los cambios que se producían en el universo entero. Nos dirigimos rectamente hacia el polo sur celeste y poco después de partir, nuestro Sol, que quedaba hacia la popa, desapareció por completo de nuestra vista. Poco antes de desaparecer presentaba el aspecto de una enorme estrella de color rojo sangre. Las estrellas visibles desde la proa se hacían, en cambio, cada vez más azuladas y terminaban también por hacerse invisibles. Pero ¿qué son estos simples cambios de color producidos por el efecto

* En el capítulo siguiente se estudiará la transformación de la aceleración y se podrá comprender esta parte del relato. Adelantemos tan sólo que, para que los observadores del interior de nuestro avión percibieran una aceleración de caída constante, su movimiento respecto de un sistema inercial no debe ser uniformemente acelerado, sino que debe tener un movimiento particular, que se denomina hiperbólico.

Doppler si se les compara con el movimiento afanoso y unánime de todas las estrellas hacia el polo sur, donde se apretaban como racimos, sin otro objeto aparente que el de esperar nuestra llegada? Casi la totalidad de las estrellas del hemisferio norte atravesaron el ecuador celeste y se instalaron en el sur. El hemisferio norte quedó prácticamente vacío: por todo él se dispersaron las estrellas que distaban del polo algo más de 5 grados, pues las de distancia polar de 5°43′ llegaron a instalarse en el mismo ecuador celeste (para observarnos, sin duda, con mayor comodidad). Y ¿qué decir de las estrellas australes? Todas ellas se apretujaron alrededor del polo sur celeste en un pequeño círculo de radio inferior a 6°. Rodeando a éstas y dentro del círculo de 21° de distancia polar se encontraban todas las estrellas boreales comprendidas entre el ecuador y el paralelo celeste de 60° de declinación norte. ¡En ese pequeño círculo de 21° de radio, con centro en el polo sur, se encontraban, prácticamente, todas las estrellas de la vía láctea! Cabe observar que ese movimiento unánime de las estrellas hacia el polo sur tuvo lugar durante el período en que viajábamos con movimiento acelerado. Al hacerse uniforme nuestra marcha, las estrellas permanecieron quietas en los lugares que habían alcanzado. Todo esto se refiere, claro está, a las estrellas lejanas, pues las poquísimas de nuestra inmediata vecindad experimentaban, además del movimiento de conjunto, otro de retroceso. Pero no se crea que todo esto lo pudimos apreciar a simple vista: para nuestros pobres ojos las estrellas se hicieron, en su inmensa mayoría, totalmente invisibles. A ojo desnudo el cielo aparecía totalmente negro con excepción de una estrecha zona anular de unos 10° de amplitud y distante 25° del polo sur. Ésa era la única zona que contenía estrellas visibles: azules en el borde austral y rojas en el borde opuesto. Por la proa del aparato entraba una intensa radiación de rayos X provenientes de las estrellas que se habían amontonado a nuestro frente, en tanto que la debilísima radiación infrarroja que entraba por la popa era muy difícil de revelar. Apenas empezamos a frenar, las estrellas comenzaron a moverse hacia el polo norte desandando poco a poco el largo camino que habían hecho. Cuando el aparato se detuvo totalmente, el cielo recuperó su aspecto habitual, ya que las estrellas ocupaban las mismas posiciones a que estábamos acostumbrados a verlas desde la Tierra. Sólo unas pocas estrellas vecinas ocupaban un lugar visiblemente diferente del asignado en las cartas del cielo. Pero durante poco tiempo pudimos gozar de este espectáculo que nos hacía recordar a nuestra Tierra querida y lejana, pues al acelerar nuestro navío, dirigido ahora hacia el polo norte, las estrellas, empeñadas al parecer en seguirnos, se dirigieron también hacia el hemisferio boreal, apiñándose cada vez más y más alrededor del punto que constituía nuestra meta. En él, justa-

mente, en el polo norte celeste, se encontraba nuestro Sol, que, al emprender el regreso, pudimos percibir como una débil estrella amarilla de quinta magnitud que pronto se hizo azul y luego totalmente invisible."

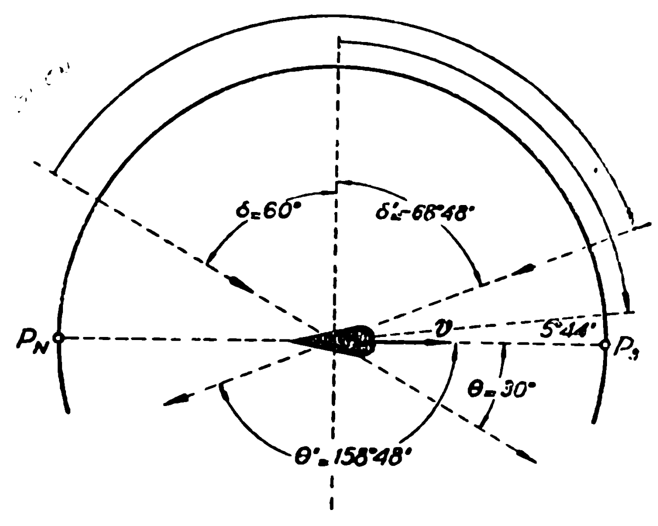


Fig. 61. — Todas las estrellas del cielo se desplazan hacia donde se dirige el avión sideral.

Suprimiré la parte del relato concerniente a la frenada final y al recibimiento que les hicieron a nuestros viajeros, hombres todos ellos de unos cincuenta años, sus tataranietos octogenarios, y me limitaré a remitir al lector a la fig. 61 y a la tabla adjunta, calculada con las fórmulas [28] y [29] para la aberración de la luz y [36] para el efecto *Doppler.*

δ	θ	θ'	δ'	ν'/ν
— 90°	180°	180°	— 90°	20
0°	90°	174°16'	— 84°16'	10
+ 30°	60°	170° 5'	— 80° 5'	5
+ 60°	30°	158°48'	— 68°48'	1,4
+ 64°46'	25°14'	154°46'	— 64°46'	1
+ 84°16'	5°44'	90°	0°	0,1
+ 85°	5°	82°10'	+ 7°50'	0,09
+ 90°	0°	0°	+ 90°	0,05

En la fig. 62 se ha indicado esquemáticamente la marcha del rayo luminoso, respecto de la Tierra, del "reloj de luz"

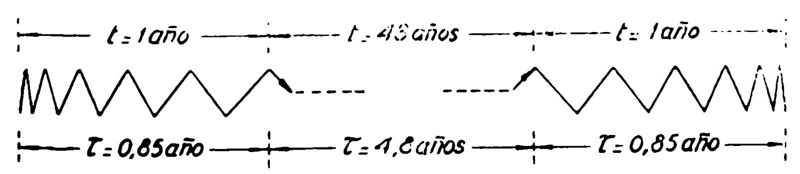


Fig. 62. — Marcha del reloj de luz del avión sideral visto desde la Tierra.

(§ 31) del avión en su viaje de ida, dándose en la tabla siguiente el cómputo del tiempo t y del tiempo propio τ calculado, en los

intervalos en que el movimiento es variable, con el auxilio de la [56] suponiendo que se trata de un movimiento con aceleración constante. Si llamamos g a esa aceleración será $v = gt$ y la [56] podrá escribirse

$$\tau = \frac{1}{g}\int_0^v \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dv = \frac{c}{2g}\left(\operatorname{arc\,sen} \frac{v}{c} + \frac{v}{c}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)$$

o sea

$$\tau = \frac{1}{2}\, t\, \frac{c}{v}\left(\operatorname{arc\,sen} \frac{v}{c} + \frac{v}{c}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)$$

y con los valores del ejemplo, si se hace $t = 1$ año, resulta aproximadamente $\tau = 0{,}85$ y la aceleración g es de 950 cm/seg^2.

Tiempo terrestre	*Tiempo propio*	*Observaciones*
1 año	0,85 años	Aceleración a la partida.
48 "	4,80 "	Movimiento uniforme de ida.
1 "	0,85 "	Frenada al final del viaje.
1 "	0,85 "	Aceleración al regreso.
48 "	4,80 "	Movimiento uniforme de vuelta.
1 "	0,85 "	Frenada para aterrizar.
100 años	13 años	

Si el reloj de luz a que se refiere la fig. 62 tuviera sus espejos separados en 150 m, su período sería de un microsegundo y tal es el período de los relojes de luz idénticos a ése y fijos en la Tierra. Para los pasajeros del avión, el rayo sigue siempre marchando directamente de un espejo al otro, pero para los observadores terrestres, el rayo de luz del reloj del avión recorre en un período 3 000 metros en lugar de 300, y cada período del reloj del avión equivale entonces a 10 microsegundos terrestres. Claro está que los pasajeros del avión, cuando se desplazan con movimiento uniforme, pueden considerar que es la Tierra la que se acerca o la que se aleja de ellos y, en este caso, para tener cómputos correctos acerca del tiempo transcurrido en la Tierra, entre dos señales que ellos *efectivamente reciban, deben* suponer que son los relojes terrestres los que marchan lentamente. Pero todos los cálculos hechos así se derrumban, si al experimentar una aceleración e invertir el sentido de su movimiento, persisten en suponer que es el universo entero el que realmente se mueve. Cuando el avión emprende el regreso, viene al encuentro de las señales de luz emitidas desde la Tierra, y con ello pasa de un sistema a otro, no pudiendo haber entonces reciprocidad. En resumen, si se tienen dos relojes idénticos en un sistema inercial, y se hace recorrer

a uno de ellos un camino cualquiera cerrado, cuando se encuentre nuevamente con el reloj que permaneció fijo, el reloj móvil, el que experimentó los efectos de la aceleración, el que salió de su sistema, indicará un tiempo menor del que indica el reloj que se mantuvo fijo. En la fig. 63 está representada la trayectoria de universo del avión de nuestro ejemplo, que efectúa de ida el recorrido espacial OC y de regreso el CO, siendo OC aproximadamente igual a 50 años-luz.

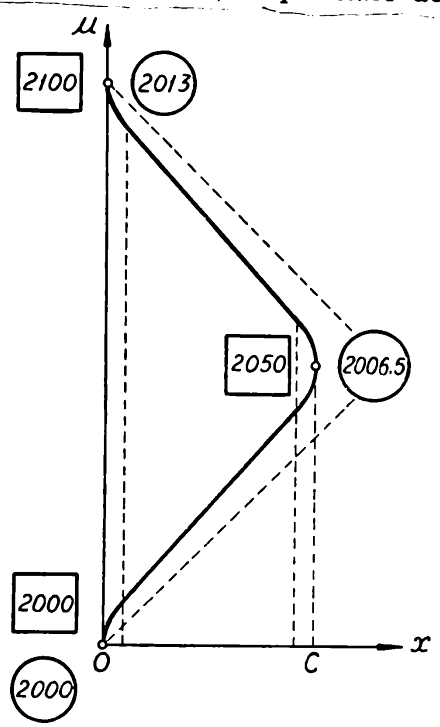


Fig. 63. — Trayectoria de universo del viaje de ida y vuelta del avión sideral. El viaje que comienza en el año 2000 termina en el 2100 según los cómputos terrestres y en el 2013 según el calendario del avión.

Es verdaderamente lamentable que este efecto sea tan pequeño. Si así no fuera, ya se estarían explotando comercialmente "calesitas de tiempo", pues habría mucha gente dispuesta a girar en ellas durante un año para tener la satisfacción de ver, a la salida, al mundo entero envejecido en diez y los impacientes no harían otra cosa que entrar y salir de la máquina constantemente. En la fig. 64 se indica el trayecto seguido por el rayo luminoso de un reloj de luz colocado en un disco giratorio. Se ve así de inmediato que el tiempo, en la periferia del disco, transcurre con mayor lentitud que en el centro del mismo.

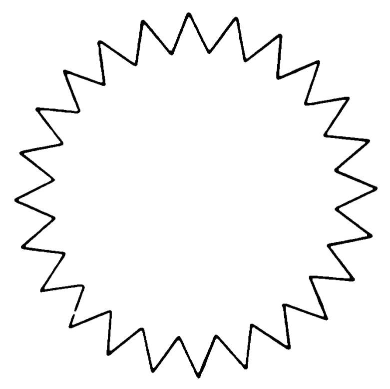


Fig. 64. — Los relojes colocados sobre la periferia de un disco giratorio atrasan.

43. **Representación de Minkowski con tiempo real.** — Para fijar la posición de un acontecimiento necesitamos conocer sus tres coordenadas espaciales x, y, z, y el instante t en que aquél ocurre. Para un sistema determinado, los acontecimientos podran representarse en un espacio de cuatro dimensiones y para homogeneizar las coordenadas habrá que multiplicar al tiempo por cierta velocidad constante que, como es natural, se toma

igual a la velocidad c de la luz. La cuarta coordenada es entonces $u = ct$.

Se quiere dar una interpretación geométrica de las fórmulas de *Lorentz,* de tal modo que el pasaje de un sistema inercial a otro consista, geométricamente, en un simple cambio de ejes. Hasta ahora, en nuestra representación, ya tantas veces utilizada, se hace lo mismo, pero sólo se relacionan de ese modo *dos* sistemas en movimiento, en tanto que aquí se busca relacionar entre sí, y en la misma representación, a todos los sistemas posibles.

Comenzamos por tomar para un sistema físico determinado los ejes u y x perpendiculares entre sí y de este modo, la "línea de universo" de los rayos de luz que parten del origen en el instante cero y se propagan según los sentidos positivo y negativo del eje x, serán las rectas

[57] $$x = ct \quad ; \quad x = u$$
$$x = -ct \quad ; \quad x = -u$$

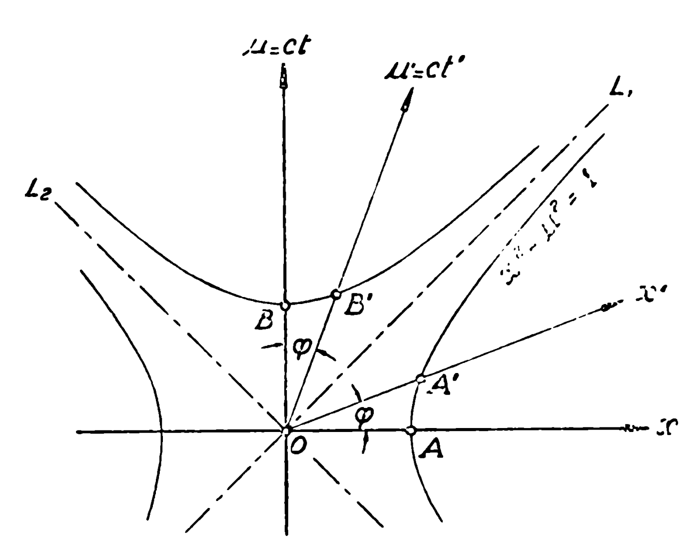


Fig. 65. — Representación de Minkowski.

representadas en la figura 65 por OL_1 y OL_2. La línea de universo de un punto que pasa por el origen en el instante cero y que se mueve sobre el eje x con la velocidad constante v, tiene por ecuación

[58] $$x = vt = \frac{v}{c} \cdot u$$

que es una recta r que forma con el eje u un ángulo φ tal que

[59] $$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x}{u} = \frac{v}{c} \,.$$

Si este punto fuera el origen de otro sistema de coordenadas S', en dicho sistema el punto se encuentra en reposo, por lo cual habrá que tomar para S', como eje del tiempo $u' = ct'$, a la recta r. Para el eje x' del sistema S' tendremos que tomar una recta cuya posición sea tal que las rectas OL_1 y OL_2 sigan siendo bisectrices de los nuevos ejes, pues en el nuevo sistema la luz se propaga también con la velocidad c, debiendo entonces ser para OL_1

$$x' = ct' \quad ; \quad x' = u'$$

y para OL_2

$$x' = -ct' \quad ; \quad x' = -u'.$$

Pero con esto no basta para que las fórmulas que dan el cambio de coordenadas coincidan con las fórmulas de *Lorentz*. Es necesario, para obtener dicha coincidencia, adoptar para cada sistema de ejes, unidades de medida diferentes, lo que equivale a cambiar de escala cuando se pasa de un sistema a otro. Supongamos que en el sistema S, en que x es perpendicular a u, tomamos como unidades a los segmentos

[60] $$OA = OB = 1.$$

Se trata de averiguar ahora la longitud de los segmentos unitarios de los diferentes sistemas. Si consideramos la hipérbola de ecuación

[61] $$x^2 - u^2 = 1 \quad ,$$

los puntos de esta ecuación representan el lugar donde se encuentran todos los acontecimientos cuya distancia cronotópica al origen O es igual a 1. Esta hipérbola corta al eje x' en el punto A'. Este punto A' tiene por coordenadas en el sistema S'

$$x' = OA' \quad ; \quad u' = 0 \quad ;$$

pero en este sistema también deberá encontrarse que la distancia cronotópica entre A' y O es 1, pues dicha distancia es, como sabemos, invariante. Por lo tanto, la unidad buscada para el eje x' del sistema S' será el segmento OA'.

De modo análogo, si se considera la hipérbola

[62] $$u^2 - x^2 = 1$$

que corta al eje u' en B', el segundo OB' será la unidad que corresponde adoptar para el eje u'. De este modo es fácil probar que las fórmulas que permiten pasar de un sistema de coordenadas a otro coinciden con las de *Lorentz*. Como las fórmulas de pasaje deben ser lineales, escribiremos

[63] $$x = a_1 x' + a_2 u'$$

[64] $$u = b_1 x' + b_2 u'$$

y los coeficientes a_1, a_2, b_1, b_2, los determinamos fácilmente,

puesto que conocemos las coordenadas de los puntos A′ y B′ en ambos sistemas. Para A′ las coordenadas en el sistema S las hallamos buscando la intersección de la hipérbola [61] con la recta

$$u = \operatorname{tg}\varphi \,.\, x = \frac{v}{c}\, x$$

y así obtenemos:

[65] $$\begin{cases} \text{coordenadas de A}' \text{ en S:} & x = \dfrac{1}{\beta} \;;\; u = \dfrac{1}{\beta}\dfrac{v}{c} \\ \text{coordenadas de A}' \text{ en S}': & x' = 1 \;;\; u' = 0 \end{cases}$$

siendo

[66] $$\beta = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,.$$

Análogamente se encuentra para B′:

[67] $$\begin{cases} \text{coordenadas de B}' \text{ en S:} & x = \dfrac{1}{\beta}\dfrac{v}{c} \;;\; u = \dfrac{1}{\beta} \\ \text{coordenadas de B}' \text{ en S}': & x' = 0 \;;\; u' = 1 \end{cases}$$

Llevando los valores [65] a [63] y [64] resulta:

[68] $$\frac{1}{\beta} = a_1 \;;\; \frac{1}{\beta}\frac{v}{c} = b_1 \;;$$

y haciendo lo mismo con [67]:

$$\frac{1}{\beta}\frac{v}{c} = a_2 \;;\; \frac{1}{\beta} = b_2.$$

Reemplazando los valores dados en [68] y [69] en [63] y [64] se obtiene:

[69] $$x = \frac{x' + \dfrac{v}{c}u'}{\beta} \;;\; u = \frac{u' + \dfrac{v}{c}x'}{\beta} \;;$$

que con el valor de β dado en [66], coinciden efectivamente con las fórmulas de transformación de *Lorentz.*

Si bien esta representación tiene el inconveniente de emplear diferentes unidades para cada uno de los sistemas, lo que hace engorroso ver con ella, por ejemplo, la contracción recíproca de las longitudes o la dilatación del tiempo, etc., permite, en cambio, comprender ciertas consecuencias de la teoría donde es necesario considerar de un solo golpe todos los sistemas posibles. Pensemos, por ejemplo, en todos los rayos de luz que pasan o pueden pasar por el origen O, de coordenadas, en todas

direcciones. Si nos limitamos a pensar en los rayos que se propagan en el plano xy (fig. 66) (el eje y debe pensarse perpendicular al plano del dibujo en el punto O), las líneas de universo de esos rayos forman un cono de vértice O y un hipercono si se considera además el eje z. Queda así el espacio-tiempo dividido en tres regiones: 1) La parte interior del cono donde se encuentra el semieje positivo u y que contiene a todos los puntos de universo cuya distancia temporal al punto O es mayor que la distancia espacial. Todos esos acontecimientos se encuentran en el futuro absoluto de O, pues para cualquier sistema de coordenadas y para cualquier punto de esa región será siempre $u' > \sigma'$. 2) La región opuesta del cono en que para cualquier punto de universo es $u' < \sigma'$ y que contiene los sucesos anteriores a O respecto de cualquier sistema de coordenadas. 3) La parte comprendida entre las dos hojas del cono donde $\sigma > u$ y que contiene acontecimientos que desde un determinado sistema de coordenadas pueden aparecer como simultáneos con O. Así, por ejemplo, si se trata del acontecimiento P que está en el futuro de O, en el sistema S(xu), dicho acontecimiento ocurre para el sistema S$'(x'u')$, lo mismo que O, en el instante cero de S$'$ y en el sistema S$''(x''u'')$ P sería anterior a O.

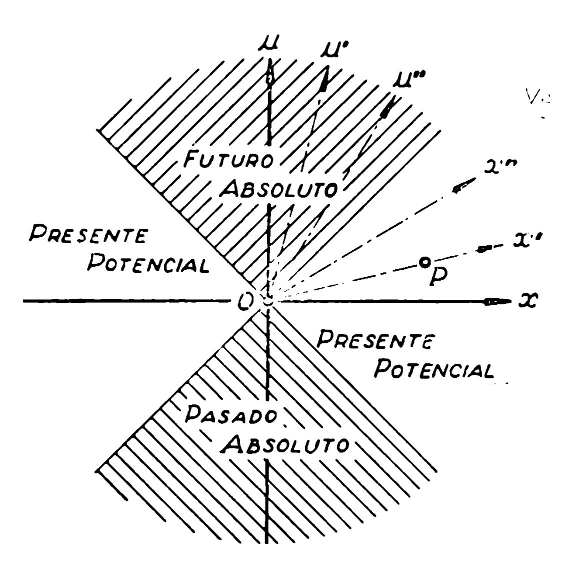


Fig. 66. — Acontecimientos anteriores y posteriores al O y los que podrían ser simultáneos a O.

El cono de vértice O tiene la propiedad de que da siempre secciones circulares (o superficies esféricas si se considera el hipercono) al seccionarlo con los planos $u =$ constante; o $u' =$ constante, siendo cualquiera el eje u'. Para comprender esto, es necesario recordar que a medida que se inclinan los ejes deben usarse en esa dirección unidades de medida mayores, lo que hace que se conviertan las elipses en circunferencias.

Si una partícula se mueve con movimiento variado respecto de un sistema S, su trayectoria de universo será una curva, y el sistema propio de la misma en cada punto es tal que su eje del tiempo debe ser tangente a aquella trayectoria. Si el movimiento es variado, el eje del tiempo del sistema propio cambia de orientación constantemente.

Hallaremos ahora directamente el valor que debe dársele a las unidades de medida en el sistema de ejes oblicuos, para que las fórmulas de pasaje de un sistema a otro coincidan con las de *Lorentz*. El punto de universo P (fig. 67) tiene en el sistema S las coordenadas xu. Llamemos x'', u'' a las coordenadas que el mismo acontecimiento tendría en el sistema S′ (ejes x' y u'), si en S′ se emplearan en las medidas las mismas unidades que en S. En este caso, basta observar la figura para ver que se tendría:

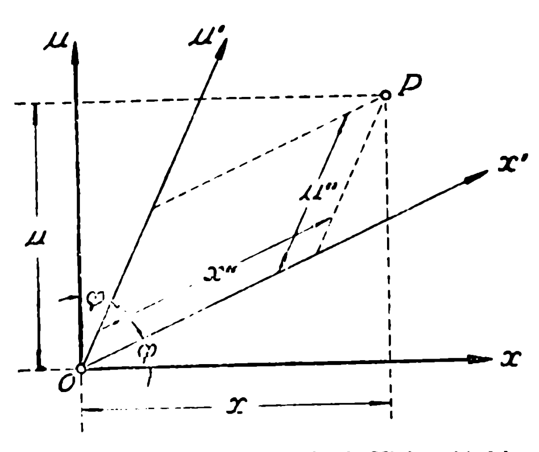


Fig. 67. — En la representación de Minkowski deben tomarse unidades de medida diferentes para cada sistema.

[71] $x = x''\cos\varphi + u''\operatorname{sen}\varphi \quad ; \quad u = u''\cos\varphi + x''\operatorname{sen}\varphi$

y si ponemos el seno y el coseno en función de la tangente y recordamos que $\operatorname{tg}\varphi = v/c$ se obtiene:

[72] $$x = \frac{x'' + u'' \cdot \frac{v}{c}}{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}}} \quad ; \quad u = \frac{u'' + x''\frac{v}{c}}{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}}}$$

Para que estas fórmulas coincidan con las de *Lorentz* es necesario hacer

[73] $$x'' = x'\frac{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad ; \quad u'' = u'\frac{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad ;$$

y si designamos por U a la unidad buscada se tendrá:

[74] $$\mathrm{U} = \frac{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} ,$$

pues de este modo los valores de x' y u' serán:

[75] $$x' = \frac{x''}{\mathrm{U}} \quad ; \quad u' = \frac{u''}{\mathrm{U}} .$$

A este mismo valor de U se llega si se calcula la longitud del segmento OA′ de la fig. 65, pues se obtiene:

$$[76] \qquad U = \sqrt{\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\beta^2}\frac{v^2}{c^2}} .$$

Claro está que es difícil entender lo que físicamente puede representar este cambio de unidades de medida. Todo pasa como si en el sistema acentuado emplearan una varilla más larga para medir las longitudes en el sentido del eje de las x de la utilizada en el sistema S, ocurriendo lo mismo con los relojes. Se trata sólo, naturalmente, de un artificio matemático introducido con el solo objeto de dar una representación geométrica de las ecuaciones de *Lorentz.*

44. **Relación entre la representación de Minkowski y la nuestra.** — De los infinitos sistemas de ejes que pueden hacerse pasar por O (fig. 68), consideraremos a un par de ellos $x'u'$ y $x''u''$ dispuestos en la forma que muestra la figura y que representan a dos sistemas S′ y S″ que se mueven respecto del sistema S con las velocidades v_1 y v_2 tales que:

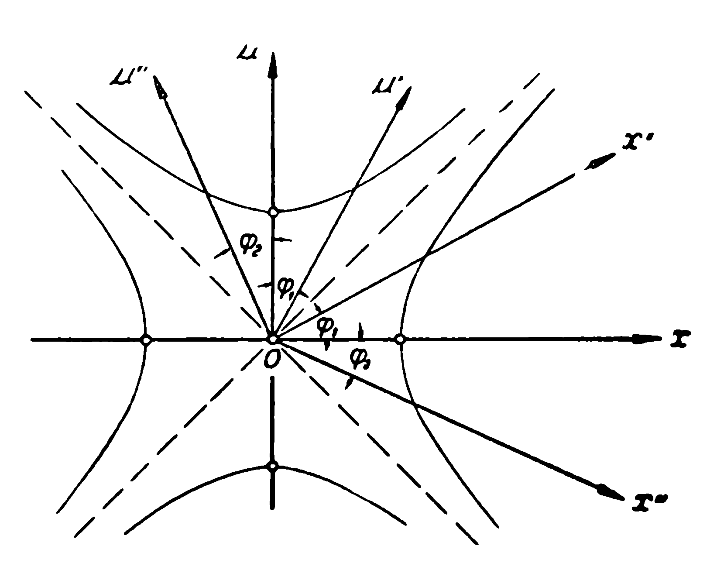


Fig. 68. — Pares de sistemas en los cuales se utilizan unidades iguales.

$$[77] \qquad \frac{v_1}{c} = \operatorname{tg} \varphi_1 \quad ; \quad - \frac{v_2}{c} = \operatorname{tg} \varphi_2 .$$

Si $\varphi_1 = \varphi_2$ las velocidades son iguales y opuestas y para ambos sistemas, se tendrán las mismas unidades de medida determinadas por los segmentos de ejes comprendidos entre el origen y las ramas de las hipérbolas [61] y [62]. En este caso se ve que el eje u' es perpendicular a x'' y u'' perpendicular a x'. Calculando el ángulo α que forman entre sí los ejes u' y u'' se obtiene para $\varphi_1 = \varphi_2$:

[78] $$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen} 2\varphi_1 = 2 \operatorname{sen}\varphi_1 \cos\varphi_1 = \frac{2 \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_1}$$

o sea

[79] $$\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{c} \frac{2v_1}{1 + \dfrac{v_1^2}{c^2}} = \frac{v}{c} \quad ;$$

si llamamos v a la velocidad de S′ con respecto a S″, pues S se mueve con respecto a S″ con la velocidad $+v_1$ y S′ respecto de S también con la velocidad $+v_1$ siendo entonces v la velocidad resultante de ambos. Los ejes de un par de sistemas como éstos, forman entonces, entre sí, el ángulo de aberración principal. Pares de sistemas de esta clase son, precisamente, los que hemos estado usando permanentemente hasta ahora. No es una casualidad que correspondan a sistemas dispuestos de esa manera las mismas unidades de medida. Por el contrario, este hecho revela la profunda significación que tiene en la teoría el fenómeno de la aberración de la luz. Lo único extraño es que esta propiedad de los ejes dispuestos en esa forma haya permanecido inadvertida durante tanto tiempo *.

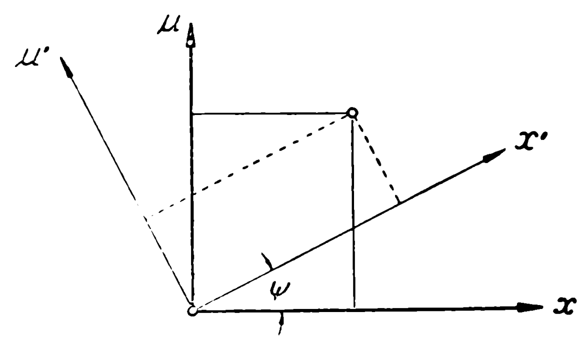


Fig. 69. — Rotación de ejes.

45. **Representación de Minkowski con tiempo imaginario.** — Si hacemos girar los ejes rectangulares xu en su plano, en el ángulo ψ (figura 69) se tiene:

[80] $$x' = x \cos\psi + u \operatorname{sen}\psi$$

[81] $$u' = u \cos\psi - x \operatorname{sen}\psi$$

Consideremos ahora que

[82] $$u = ict \quad ; \quad u' = ict' \quad ; \quad i = \sqrt{-1}.$$

En este caso, a cada punto del universo real, a cada acontecimiento $x\,y\,z\,t$, le hacemos corresponder un punto imaginario de la variedad de cuatro dimensiones $x\,y\,z\,u$. El invariante de

* Véase E. LOEDEL, *Aberración y relatividad*, Anales de la Sociedad Científica Argentina, tomo 145, pág. 3, 1948, y también E. LOEDEL, *Enseñanza de la Física*, Editorial Kapelusz, Bs. As., 1949.

Minkowski que da la distancia cronotópica entre dos acontecimientos y cuya expresión en el universo real es

[83] $$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2$$

adquiere la forma pitagórica

[84] $$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 + \Delta u^2$$

que representa una distancia común, pero no entre dos puntos del universo real, sino entre los puntos representativos de esos acontecimientos, en una variedad compleja de cuatro dimensiones.

Llevando los valores [82] a [80] y [81] tenemos:

[85] $$x' = x \cos\psi + ict \operatorname{sen}\psi \quad ;$$

[86] $$t' = t \cos\psi - x \frac{1}{ic} \operatorname{sen}\psi .$$

Deseamos hallar el valor de este ángulo ψ para que estas fórmulas sean idénticas a las de *Lorentz*:

[87] $$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad ; \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad ;$$

para lo cual deberá ser

[88] $$x \cos\psi + ict \operatorname{sen}\psi = \frac{x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . t .$$

La identificación de los coeficientes nos da:

[89] $$\cos\psi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad ; \quad \operatorname{sen}\psi = i \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad ;$$

[90] $$\operatorname{tg}\psi = i \frac{v}{c} .$$

Al mismo resultado se llega utilizando la [86] y la segunda de [87]. Las [89] y [90] definen un ángulo imaginario ψ (obsérvese que el coseno es mayor que uno) y las ecuaciones de *Lorentz* aparecen, formalmente, como una rotación de los ejes en un ángulo imaginario.

El teorema de adición de velocidades se presenta, de este modo, como formalmente idéntico a la fórmula que da la tangente de una suma de arcos:

[91] $$\operatorname{tg}\psi_1 = i\frac{v_1}{c} \quad ; \quad \operatorname{tg}\psi_2 = i\frac{v_2}{c}$$

[92] $$\operatorname{tg}(\psi_1 + \psi_2) = i\frac{W}{c} = \frac{\operatorname{tg}\psi_1 + \operatorname{tg}\psi_2}{1 - \operatorname{tg}\psi_1 \operatorname{tg}\psi_2}$$

de donde la velocidad resultante W es:

[93] $$W = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c_2}} .$$

Con esta representación se consigue que los ejes de todos los sistemas sean ortogonales, que valga en todos ellos la geometría euclídea, y que el pasaje de uno a otro sistema consista en una simple rotación de ejes, pero a condición de utilizar un tiempo imaginario y hacer que las rotaciones que se efectúan en los planos *xu*, *yu*, *zu*, sean definidas por un ángulo también imaginario.

CAPÍTULO IV

DINAMICA RELATIVISTA

46. Impulso y energía en la física clásica. — Si sobre una partícula de masa m actúa la fuerza F, le comunica una aceleración dv/dt, en su misma dirección y sentido, tal que

[1] $$F = m \frac{dv}{dt}.$$

Ésta es la expresión del principio de masa, o de la segunda ley de movimiento de Newton. En un tiempo dt la partícula recorrerá el camino vdt si v es su velocidad en el instante considerado, por lo cual, el trabajo elemental dA efectuado por la fuerza, será:

[2] $$dA = F \cdot vdt = mvdv.$$

La energía cinética de la partícula, igual al trabajo necesario para comunicarle la velocidad v, a partir del reposo, será

[3] $$E_{cin} = \int_0^v mvdv = \tfrac{1}{2}mv^2.$$

Como en la mecánica newtoniana la masa es constante, la [1] puede escribirse también en la forma siguiente:

[4] $$F = \frac{d}{dt}(mv)$$

donde mv es la cantidad de movimiento cuya variación es igual al producto de la intensidad de la fuerza por el tiempo de actuación de la misma, o más precisamente

[5] $$Fdt = d(mv)$$

e integrando

[6] $$\int Fdt = \int_{v_1}^{v_2} d(mv) = mv_2 - mv_1.$$

Al primer miembro de esta expresión se le suele llamar impulso o impulsión y resulta ser igual a la variación total de la cantidad de movimiento.

Pero también se denomina impulso al producto de la masa

por la velocidad, o sea a lo que antes habíamos denominado cantidad de movimiento.

En lo sucesivo, cuando hablemos de impulso nos referiremos al vector cuyas componentes, según los ejes $x\ y\ z$, son

[7] $$mv_x \quad ; \quad mv_y \quad ; \quad mv_z .$$

De este modo, siendo X, Y, Z las componentes de la fuerza según los tres ejes, a la ecuación vectorial [4] corresponden las tres ecuaciones siguientes:

[8] $$\mathrm{X} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv_x) \quad ; \quad \mathrm{Y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv_y) \quad ; \quad \mathrm{Z} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv_z).$$

Si se tiene un sistema constituído por un número cualquiera de partículas, el impulso total del sistema está representado por un vector que es igual a la suma vectorial de los impulsos de cada una de ellas, o sea:

[9] $$\mathrm{I}_x = \Sigma mv_x \quad ; \quad \mathrm{I}_y = \Sigma mv_y \quad ; \quad \mathrm{I}_z = \Sigma mv_z .$$

Si el sistema es aislado, o sea, si sobre él sólo actúan fuerzas internas, llamadas así las fuerzas que unas partículas puedan ejercer sobre las otras, el impulso total se mantiene constante. Se comprende de inmediato que debe ser así, pues en virtud del principio de la igualdad de la acción y la reacción, la resultante de las fuerzas internas debe ser cero. Se tiene, pues, que, para un sistema aislado de puntos materiales, el vector impulso se mantiene constante, lo mismo que la energía interna del conjunto. Pero debe tenerse presente que tanto la energía como el impulso se mantienen constantes para un determinado sistema de referencia, y que para otro sistema esas constantes son distintas. Si se trata de una partícula, respecto de un sistema en que aquélla está en reposo, tanto la energía cinética como las componentes del impulso son nulas. Respecto de otro sistema, la energía cinética y las componentes del impulso se mantienen constantes, pero estas constantes serán, en general, distintas de cero.

47. **El cuadrivector impulso de la mecánica relativista.** — Si se admite que la masa de una partícula es constante, o sea que su valor no depende de la velocidad, se comprende que, en tal caso, la [1] no puede ser rigurosamente válida, pues si lo fuera, por la acción de una fuerza constante podríamos hacer que un cuerpo material alcanzara y hasta sobrepasara la velocidad de la luz. La masa de un cuerpo, su coeficiente de inercia, o sea la resistencia que ofrece al cambio de velocidad, debe depender entonces, de algún modo, de la velocidad misma. En tal caso, las ecuaciones [1] y [4] no pueden ser equivalentes.

Las nuevas ecuaciones de la dinámica relativista deben satisfacer estas dos condiciones:

1) Conservar su forma si se pasa de un sistema a otro aplicando las ecuaciones de transformación de Lorentz, así como la ecuación de Newton conserva su forma cuando en el pasaje se aplican las ecuaciones de transformación de Galileo. Esta condición general, llamada de *covariancia* de las leyes naturales, es simplemente una exigencia que impone la validez del principio de relatividad.

2) Las nuevas ecuaciones deben coincidir con las newtonianas para velocidades que sean pequeñas en comparación con la velocidad de la luz.

Para cumplir con estas exigencias podemos pensar que las nuevas ecuaciones serán del tipo de la ecuación [4], pero considerando a la masa como una función, todavía incógnita, de la velocidad. En dicha ecuación o en las [8] aparecen las componentes de la fuerza como las derivadas con respecto al tiempo de las componentes del vector impulso *. Estas ecuaciones conservan su forma si se considera la masa constante y se aplica a las mismas la transformación de Galileo (§ 3). Pero en las nuevas ecuaciones debemos considerar a la masa variable y de tal modo que aquéllas conserven su forma si se aplica la transformación de Lorentz. Como en éstas aparece el tiempo, o la coordenada $u = ct$, transformándose de igual modo que una coordenada espacial, comenzaremos por reemplazar al vector impulso de la mecánica clásica por un cuadrivector que tendrá cuatro componentes: tres espaciales y una temporal, dirigida según el eje u.

Para las componentes espaciales de este cuadrivector seguiremos tomando los valores [7], y para la componente temporal, ¿qué valor tomamos?

Para que las cuatro componentes tengan las mismas dimensiones físicas, será necesario que la componente temporal sea también igual al producto de una masa —que no puede ser otra que la masa de la partícula— por una velocidad. Consideraremos, entonces, que las cuatro componentes son:

[10]					
	ejes:	x	y	z	u
	componentes:	mv_x	mv_y	mv_z	$m\mathrm{V}$

siendo m y V funciones desconocidas de la velocidad v de la partícula,

[11] $$m = f(v) \quad ; \quad \mathrm{V} = \varphi(v) \quad ;$$

que determinaremos de modo que el ente cuyas componentes hemos dado, resulte ser, efectivamente, un cuadrivector en el espacio-tiempo.

Un vector del espacio común es un ente cuyas componentes

* Es importante hacer notar que el enunciado original de Newton corresponde a la ecuación [4] y no a la [1].

se transforman, al pasar de un sistema de coordenadas a otro, de manera exactamente igual que las coordenadas. El vector OH (fig. 70) tiene en el sistema xOy las componentes X é Y, y en el sistema $x'Oy'$ las componentes X′ é Y′.

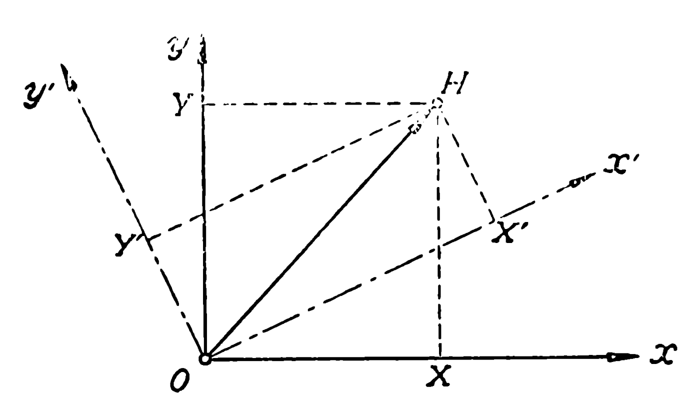


Fig. 70. — Las componentes de un vector se transforman como las coordenadas.

Las mismas fórmulas que permiten hallar x', y' en función de x, y, son las que permiten calcular X′, Y′ en función de X, Y.

Consideremos ahora una partícula que en el sistema S de coordenadas se mueva sobre una recta r con la velocidad v. La componente espacial del cuadrivector impulso será mv, y la componente según el eje del tiempo u, mV. Consideremos ahora otro sistema S′ que se mueva junto con la partícula, o sea con la velocidad v y sobre la recta r. Este sistema S′ es, en-

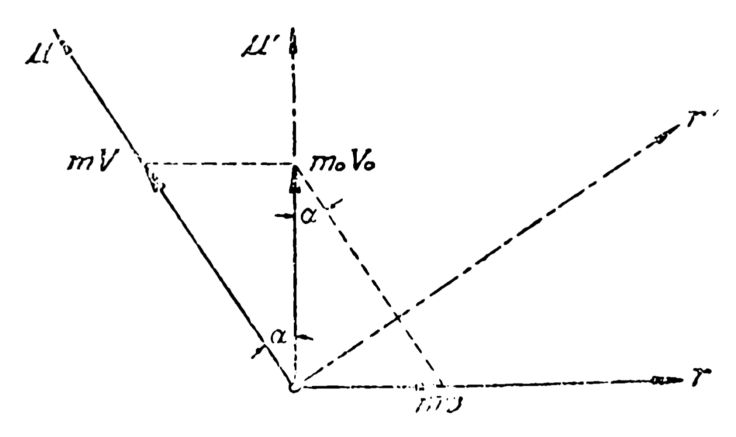


Fig. 71. — El cuadrivector impulso.

tonces, el sistema propio de la partícula respecto del cual la misma se encuentra en reposo. La componente espacial del cuadrivector impulso en S′ es entonces cero y la componente, según el eje u', será m_0V_0, llamando m_0 y V_0 a los valores que

toman las funciones [11] para $v = 0$. Nada impide que tomemos los orígenes de coordenadas, de ambos sistemas, coincidiendo con la partícula en el instante cero. De este modo, los ejes ru y $r'u'$ estarán dispuestos como indica la fig. 71, siendo

[12] $$\operatorname{sen} \alpha = \frac{v}{c}$$

pues de esta manera, las fórmulas que permiten pasar de un sistema al otro coinciden con las de Lorentz. Basta observar la figura para ver que debe cumplirse:

[13] $$mV = \frac{m_0 V_0}{\cos \alpha}$$

[14] $$mv = m_0 V_0 \operatorname{tg} \alpha$$

de donde

[15] $$\frac{v}{V} = \operatorname{sen} \alpha = \frac{v}{c} .$$

Se deduce de aquí que

[16] $$V = c$$

y, por lo tanto, ya que este valor resulta constante, será también

[17] $$V_0 = c$$

por lo cual la [13], considerando [16] y [17], da de inmediato:

[18] $$m = \frac{m_0}{\cos \alpha} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} .$$

Si la velocidad v de la partícula en el sistema S tiene por componentes $v_x v_y v_z$, las componentes del cuadrivector impulso en dicho sistema son:

[19]

ejes:	x	y	z	u
componentes:	$\frac{m_0}{\cos \alpha} v_x$	$\frac{m_0}{\cos \alpha} v_y$	$\frac{m_0}{\cos \alpha} v_z$	$\frac{m_0}{\cos \alpha} c$.

Analíticamente se llega, claro está, al mismo resultado. Las ecuaciones de Lorentz pueden escribirse así:

[20] $$r' = \frac{r - u \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \quad ; \quad u' = \frac{u - r \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} .$$

Las componentes del cuadrivector impulso son:

[21] en el sistema S' $\begin{cases} \text{según el eje } u' \ldots\ldots m_0 V_0 \\ \quad \text{,, \ ,, \ ,, } r' \ldots\ldots 0 \end{cases}$

[22] en el sistema S $\begin{cases} \text{según el eje } u \ldots\ldots mV \\ \quad \text{,, \ ,, \ ,, } r \ldots\ldots mv \end{cases}$

Para que este ente sea, efectivamente, un cuadrivector, es necesario que sus componentes se transformen igual que las coordenadas, para lo cual bastará sustituir en las [20]

r por mv
r' ,, 0
u ,, mV
u' ,, $m_0 V_0$

para obtener

[23] $$mv = mV \operatorname{sen} \alpha \quad ;$$

[24] $$m_0 V_0 = \frac{mV - mv \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} .$$

De la [23] se obtiene:

[25] $$v = V \operatorname{sen} \alpha = V \frac{v}{c} \quad ; \quad V = c = V_0 \quad ;$$

y llevando este valor a [24] resulta:

[26] $$m_0 = m \frac{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}{\cos \alpha} = m \cos \alpha .$$

Hemos encontrado que la masa m de una partícula debe aumentar con la velocidad de acuerdo con la [18], tendiendo a un valor infinito para $v = c$, si se quiere que el ente de componente espacial mv y componente temporal mc sea, efectivamente, un cuadrivector en el espacio-tiempo. El significado físico de esto, sólo podrá verse después de haber definido la fuerza. En cuanto al módulo del cuadrivector impulso de una partícula (fig. 72), se ve

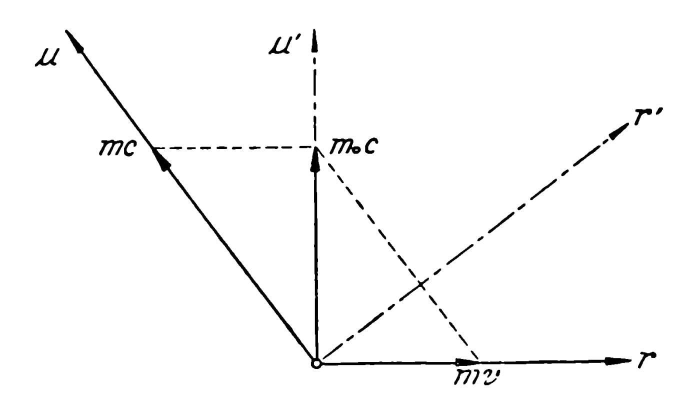


Fig. 72. — Módulo del cuadrivector impulso.

que dicho módulo es igual a la componente temporal m_0c en el sistema propio, donde las componentes espaciales del impulso son nulas. Se ve, también, que para otro sistema diferente al propio, dicho módulo está dado por

$$[27] \quad m_0c = \sqrt{m^2c^2 - m^2v^2} = \sqrt{m^2c^2 - m^2(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}$$

o sea que es igual a la raíz cuadrada de la *diferencia* de los cuadrados de las componentes temporal y espacial.

48. **Definición de fuerza.** — La [4], con el valor de m dado en [18], es la ecuación fundamental de la dinámica relativista y puede ser considerada como una *definición* de lo que se ha de entender por *fuerza*. Según esta definición, se tiene:

$$[28] \quad F_x = \frac{d}{dt}(mv_x) \quad ; \quad F_y = \frac{d}{dt}(mv_y) \quad ; \quad F_z = \frac{d}{dt}(mv_z)$$

siendo, de acuerdo con [18]

$$[29] \qquad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

y $F_x\, F_y\, F_z$ las componentes espaciales de un vector en el espacio común de tres dimensiones.

Puede considerarse también la componente temporal de la fuerza definida por analogía en la forma

$$[30] \qquad F_u = \frac{d}{dt}(mc).$$

Pero advirtamos ya desde ahora que el ente de componentes $F_x\, F_y\, F_z\, F_u$ *no es* un cuadrivector, puesto que, como veremos, dichas componentes no se transforman como las coordenadas. Se ve que las [28] coinciden con las fórmulas newtonianas cuando la velocidad v es pequeña con respecto a c.

49. **Energía cinética.** — Conservando la definición clásica para el trabajo mecánico, se tiene:

$$dA = F \times v dt = \frac{d}{dt}(mv) \times v dt = v d(mv) =$$

$$= v d\left(\frac{m_0}{\cos\alpha} v\right) = m_0c^2 \frac{v}{c} d\left(\frac{1}{\cos\alpha} \cdot \frac{v}{c}\right) =$$

$$= m_0c^2 \operatorname{sen}\alpha\, d(\operatorname{tg}\alpha) = m_0c^2 \frac{\operatorname{sen}\alpha\, d\alpha}{\cos^2\alpha} =$$

$$[31] \qquad = -\, m_0c^2 \frac{d(\cos\alpha)}{\cos^2\alpha} = m_0c^2 d\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right).$$

De aquí, el trabajo A, igual a la energía cinética de la partícula que parte con velocidad cero ($\cos\alpha = 1$) y alcanza la velocidad v, es:

$$A = E_c = m_0 c^2 \int_{\cos\alpha = 1}^{\cos\alpha} d\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right) = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right)$$

o sea

[32] $$E_c = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2$$

que también puede escribirse

[33] $$E_c = mc^2 - m_0 c^2 = (m - m_0)\, c^2.$$

La energía cinética aparece, así, como igual al producto del aumento de masa que experimenta la partícula al pasar de la velocidad cero a la velocidad v, por el cuadrado de la velocidad de la luz.

Si desarrollamos la [32] por la fórmula del binomio, obtenemos:

[34] $$E_c = m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \frac{15}{48}\frac{v^6}{c^6} + \ldots\right) - m_0 c^2$$

o sea

[35] $$E_c = \frac{1}{2} m_0 v^2 \left(1 + \frac{3}{4}\operatorname{sen}^2\alpha + \frac{15}{24}\operatorname{sen}^4\alpha + \ldots\right),$$

que coincide con la fórmula clásica para valores de v pequeños con respecto a c.

50. **Significado de la componente temporal del impulso y de la fuerza.** — La fórmula [33], en la que aparece la energía cinética de una partícula como igual a la diferencia de dos términos, hace que se pueda considerar al producto mc^2 como igual a la energía total, y a $m_0 c^2$ como a la energía correspondiente al reposo:

[36] $$E = mc^2 \quad ; \quad E_0 = m_0 c^2.$$

De este modo, la componente temporal del impulso mc resulta igual a la energía total dividida por la velocidad de la luz:

[37] $$\frac{m_0}{\cos\alpha} c = mc = \frac{E}{c},$$

y la componente de la fuerza según el eje u es, entonces,

[38] $$F_u = \frac{d}{dt}\left(\frac{E}{c}\right) = \frac{1}{c}\frac{dE}{dt}$$

que representa la potencia, dE/dt, dividida por la velocidad de la luz.

Introduciendo la energía E en los valores que dan las componentes del cuadrivector impulso, se obtiene, en lugar de [19], teniendo en cuenta [37]:

$$x \quad ; \quad y \quad ; \quad z \quad ; \quad u$$

[39] $$\frac{E}{c} \cdot \frac{v_x}{c} \; ; \; \frac{E}{c} \cdot \frac{v_y}{c} \; ; \; \frac{E}{c} \cdot \frac{v_z}{c} \; ; \; \frac{E}{c} \; ;$$

o sea:

[40] $$\text{componente espacial} = \frac{E}{c} \cdot \frac{v}{c}$$

$$\text{„ temporal} = \frac{E}{c}$$

Para v, tendiendo a c, se hacen iguales ambas componentes y para un haz luminoso en que $v = c$, dichas componentes resultan iguales. *El módulo del cuadrivector impulso es, entonces, para un haz luminoso, igual a cero.*

51. Necesidad de que la energía y la masa se puedan transformar una en otra para que se conserve el cuadrivector impulso. — En lugar de los tres principios de la física clásica de *conservación de la masa*, de *conservación de la energía* y de *conservación del impulso*, se tiene, en la física relativista, un solo principio que engloba a los tres y que puede enunciarse así:

El cuadrivector impulso de un sistema físico aislado es invariable.

En la física clásica, la masa y la energía son escalares y el impulso un vector en el espacio común de tres dimensiones. Para un sistema físico aislado y con respecto a un determinado sistema de coordenadas, el escalar energía es una constante y las componentes del vector también lo son. Al referir el mismo sistema físico a otro sistema de coordenadas, siguen siendo constantes la masa, y la energía y las componentes del impulso, pero estas constantes, salvo la de la masa, son ahora otras.

El nuevo enunciado es más económico desde el punto de vista lógico, pues se tiene un solo principio en lugar de tres y al pasar de un sistema de coordenadas a otro, cambian sólo las componentes del cuadrivector que permanece invariable en el espacio-tiempo.

Daremos a continuación algunos ejemplos, que servirán para aclarar y precisar lo que antecede.

Sean dos cuerpos idénticos que se mueven sobre una misma recta (eje x), con igual velocidad y en sentido opuesto, acercándose entre sí. Siendo m_0 la masa en reposo de cada uno de

los cuerpos cuya velocidad es v, las componentes del cuadrivector impulso, antes del choque, para el sistema formado por los dos cuerpos, son:

$$\begin{array}{lccccc} & x & y & z & u \\ [41] & mv - mv = 0 & 0 & 0 & 2mc = \dfrac{2m_0c}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}. \end{array}$$

Si los cuerpos fueran perfectamente plásticos, las dos masas quedarían en reposo en el lugar del encuentro y las componentes espaciales del impulso seguirían siendo nulas. Si la masa de cada uno de los cuerpos después del choque siguiera siendo m_0, la componente temporal del impulso sería $2m_0c$ y, por lo tanto, diferente del valor [41]. Para que se conserve el impulso es necesario admitir que, después del choque, la masa de los cuerpos se incrementó en cierto valor μ, de tal modo que se cumpla

$$[42] \qquad 2m_0c + \mu c = \frac{2m_0c}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$$

de donde

$$[43] \qquad \mu = 2m_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} - 1\right).$$

Por otra parte, la energía cinética de ambos cuerpos antes de chocar es, de acuerdo con [32]:

$$[44] \qquad \mathrm{E} = 2m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} - 1\right).$$

Por lo tanto, entre la energía cinética E desaparecida y la masa μ que aparece después del choque, existe la relación:

$$[45] \qquad \mathrm{E} = \mu c^2.$$

Como segundo ejemplo, consideraremos (fig. 73) que sobre un cuerpo A en reposo con respecto a un determinado sistema, inciden dos haces luminosos idénticos y que se propagan en sentido opuesto sobre el eje x. Supongamos que la energía de ca-

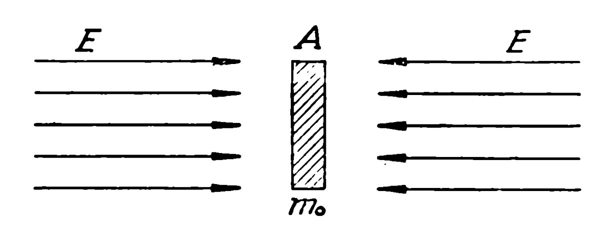


Fig. 73. — Transformación de energía en masa.

da uno de los haces es E. Si el cuerpo tiene una masa m_0, las componentes del impulso del sistema formado por el cuerpo, son, de acuerdo con [39]:

	x	y	z	u
Cuerpo:	0	0	0	m_0c
Haces de luz:	$\frac{E}{c} - \frac{E}{c} = 0$	0	0	$\frac{2E}{c}$
Total:	0	0	0	$m_0c + \frac{2E}{c}$

Si se supone que el cuerpo absorbe por completo la luz que sobre él incide, se comprende que, por razones de simetría, el cuerpo seguirá en reposo después de haber absorbido la luz, pero su masa ya no podrá ser m_0 sino algo mayor. El aumento μ de la masa para que el impulso, antes y después de la absorción de la luz, sea el mismo, será tal que:

$$(m_0 + \mu)c = m_0c + \frac{2E}{c}$$

con lo cual encontramos nuevamente la [45].

Si en lugar de absorber el cuerpo irradia energía, su masa disminuirá y dicha disminución estará también vinculada a la energía irradiada, por la ecuación [45].

Esta notable relación entre la masa y la energía fué hallada por Einstein en septiembre de 1905, tres meses después de haber publicado, en junio de 1905, su memoria fundamental sobre la teoría restringida de la relatividad.

El trabajo fué titulado: "Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energiegehalt abhängig?" ("¿Depende la inercia de un cuerpo de su provisión de energía?"), y en él se puede leer textualmente: "Es posible que en los cuerpos cuyo contenido de energía sea muy variable (por ejemplo, las sales de radio), se encuentre una prueba de la teoría". En el capítulo siguiente veremos que dicha predicción teórica se ha podido comprobar efectivamente en los procesos de las transmutaciones de los núcleos atómicos.

Históricamente cabe hacer notar que, para el caso particular de una radiación electromagnética (luz) encerrada en un cuerpo hueco y que se supone que se refleja en forma perfecta sobre las paredes interiores del mismo, debido a la presión que la radiación debe ejercer sobre dichas paredes, el físico austríaco HASENOHRL había podido deducir en 1904, que si la energía de la radiación es E el cuerpo se comporta mecánicamente como si su masa se acrecentara en un valor proporcional a E/c^2. Este incremento de la masa coincide con la relación de Einstein, si se supone igual a 1 la constante de proporciona-

lidad, no determinada por Hasenohrl. Además, la relación de Einstein vincula masa y energía en una forma general que, de ser válida, tendrá que ser *necesariamente válida en todos los casos*, cualquiera sea la forma de energía que se considere.

52. **Valores numéricos.** — De la relación de Einstein [45] o [36] se deduce que la equivalencia en energía de un gramo masa de materia es:

$$E = mc^2 = 1 \text{ gramo} \times \left(3 \times 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{seg}}\right)^2 = 9 \times 10^{20} \text{ ergios} =$$

$$= 9 \times 10^{13} \text{ julios} = \frac{9 \times 10^{13}}{36 \times 10^5} \text{ k. W. H.} = 2{,}5 \times 10^7 \text{ k. W. H.} =$$

$$= \frac{9 \times 10^{13}}{9{,}8} \text{ kilográmetros} = \frac{9 \times 10^{13}}{9{,}8 \times 427} \text{ kilocalorías} =$$

$$= 2{,}15 \times 10^{10} \text{ kilocalorías.}$$

Según esto, como un kilogramo de carbón al quemarse origina, aproximadamente, 8 000 kilocalorías, un gramo de cualquier substancia encierra en sí una energía total igual a la energía de combustión de 2 700 toneladas de carbón. De la relación masa-energía se desprende también, entre otras cosas, que la masa de un cuerpo debe aumentar si se lo calienta y que un reloj cualquiera debe tener mayor masa, y pesar, por lo tanto, algo más, cuando se le acaba de dar cuerda.

53. **Transformación de la energía de un haz luminoso.** — Consideremos un haz de rayos paralelos que en el sistema S se propaga formando un ángulo θ con el eje de las x y cuya energía total, medida por los observadores del sistema S, sea E. Las componentes del cuadrivector impulso en este sistema serán, de acuerdo con [39]:

$$[46] \qquad \overset{x}{\frac{E}{c}\cos\theta} \quad ; \quad \overset{y}{\frac{E}{c}\operatorname{sen}\theta\cos\varphi} \quad ; \quad \overset{z}{\frac{E}{c}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi} \quad ; \quad \overset{u}{\frac{E}{c}} .$$

En otro sistema S′ que se traslada, respecto de S, con la velocidad v dirigida según el eje x, la energía del mismo haz es E′ y las componentes del cuadrivector impulso en S′ serán:

$$[47] \qquad \overset{x'}{\frac{E'}{c}\cos\theta'} \quad ; \quad \overset{y'}{\frac{E'}{c}\operatorname{sen}\theta'\cos\varphi'} \quad ; \quad \overset{z'}{\frac{E'}{c}\operatorname{sen}\theta'\operatorname{sen}\varphi'} \quad ; \quad \overset{u'}{\frac{E'}{c}} .$$

Como estas componentes se transforman igual que las coordenadas, sustituyendo en las fórmulas de Lorentz los valores

de las coordenadas por las componentes correspondientes, se obtiene:

[48] $(y = y')$; $\frac{E}{c}$ sen θ cos φ = $\frac{E'}{c}$ sen θ' cos φ' ;

[49] $(z = z')$; $\frac{E}{c}$ sen θ sen φ = $\frac{E'}{c}$ sen θ' sen φ' ;

y de aquí, dividiendo [49] por [48]:

[50] $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\varphi' \quad ; \quad \varphi = \varphi'$;

y, en consecuencia,

[51] $E \operatorname{sen}\theta = E' \operatorname{sen}\theta'$.

Además, para las componentes según los ejes x y u, se tendrá:

[52] $\left(x' = \frac{x - u \operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right)$; $\frac{E'}{c}\cos\theta' = \frac{\frac{E}{c}\cos\theta - \frac{E}{c}\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$;

[53] $\left(u' = \frac{u - x \operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right)$; $\frac{E'}{c} = \frac{\frac{E}{c} - \frac{E}{c}\cos\theta \operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$.

De la [53] se obtiene:

[54] $$E' = E \frac{1 - \frac{v}{c}\cos\theta}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} .$$

De ésta y la [51] obtenemos:

[55] $$\operatorname{sen}\theta' = \operatorname{sen}\theta \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c}\cos\theta} ;$$

y de la [52] y la [54]:

[56] $$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}\cos\theta} .$$

Obtenemos así, nuevamente, las fórmulas de la aberración de la luz (III, [28]; III, [29]), resultando, además, que *la energía de un haz luminoso se transforma exactamente igual*

que la frecuencia (III, [36]). Esta coincidencia, calificada por Einstein, ya en su primera memoria, de *notable*, debe vincularse a la hipótesis del mismo Einstein de los *cuantos de luz*, llamados después *fotones*.

Transformándose la energía igual que la frecuencia, se deduce que el cociente

[57] $$\frac{\varepsilon}{\nu} = \frac{\varepsilon'}{\nu'} = h = \text{invariante};$$

invariantes si ε y ε′ representan la energía del mismo fotón medida desde dos sistemas diferentes. Pero dicho cociente es igual a la *constante h de Planck* que *resulta ser un invariante*.

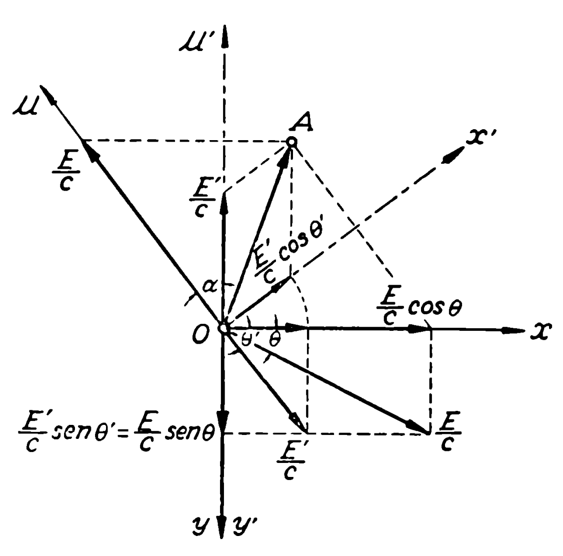


Fig. 74. — Componentes del cuadrivector impulso de un haz luminoso.

En la fig. 74 se ha representado al cuadrivector impulso OA del haz luminoso y a sus componentes en ambos sistemas. Si el ángulo θ = 0, resulta también θ′ = 0 y la representación gráfica es la indicada en la fig. 75.

El vector impulso está representado por OA, pero debe tenerse presente que el módulo no se mide por la longitud OA, sino por la diferencia de los cuadrados de las componentes temporal y espacial [27], resultando dicho módulo, para la luz, como ya lo hicimos notar (§ 51), igual a cero, lo mismo que la distancia cronotópica entre dos puntos de universo de un rayo de luz.

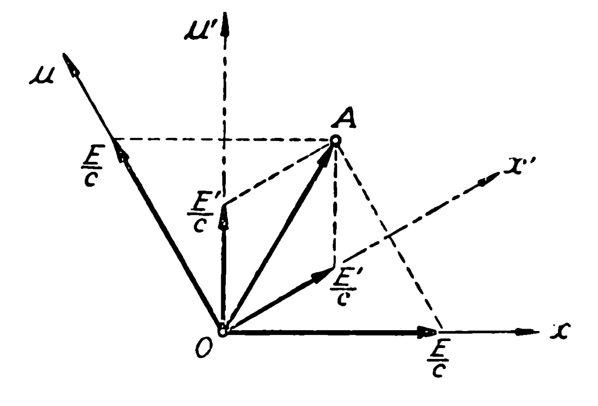


Fig. 75. — El módulo del cuadrivector impulso de un haz luminoso es igual a cero.

54. **Presión de la luz.** — Imaginemos que un haz de rayos paralelos se refleja normalmente sobre un espejo fijo y perfecto. Si la energía total del haz es E (referida al sistema en que el espejo se encuentra fijo), la componente espacial del impulso, antes de llegar el haz al espejo, es E/c, cuya dirección y sentido coincide con el de propagación de la luz. Después de la reflexión, como el espejo permanece fijo (debe suponerse que la masa del espejo es infinita en comparación con E/c^2, que sería la masa del haz luminoso), el impulso del haz será igual pero de sentido opuesto, por lo cual, la variación total de la componente espacial del impulso, es:

[58] $$\frac{E}{c} - \left(-\frac{E}{c}\right) = \frac{2E}{c} .$$

La fuerza F que el haz de luz ejerce normalmente sobre el espejo, la hallamos, de acuerdo con [4], dividiendo la variación total del impulso [58] por el tiempo Δt en que ocurre dicha variación:

[59] $$F = \frac{2E}{c \,.\, \Delta t} = \frac{2E}{l} ,$$

si llamamos l a la longitud total del haz considerado. La presión P la hallamos dividiendo la fuerza por la sección S del haz, y así resulta:

[60] $$P = \frac{2E}{Sl} = 2U ,$$

siendo **U** la densidad de la energía del haz luminoso. Si la luz, en lugar de ser reflejada es totalmente absorbida, la presión es igual a U. Cuando los rayos forman con la normal al espejo un ángulo φ (fig. 76), la variación total del impulso, en el sentido de la normal N al espejo, es

$$\frac{2E}{c} \cos \varphi ,$$

en tanto que la componente tangencial al espejo no varía. La fuerza F que se ejerce normalmente al espejo, será

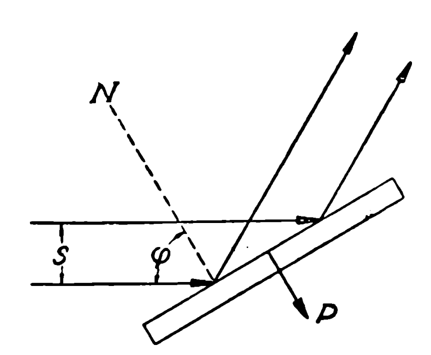


Fig. 76. — Presión de la luz.

[61] $$F = \frac{2E}{c \,.\, \Delta t} \,.\, \cos \varphi$$

y la presión la hallamos dividiendo esta fuerza por la superfi-

cie del espejo, donde inciden los rayos igual a $S/\cos\varphi$, si S es la sección del haz luminoso. Resulta, así,

$$P = 2U\cos^2\varphi. \quad [62]$$

Si el espejo está en movimiento, bastará considerar las cosas con respecto a un sistema que se mueve junto con el espejo, o sea un sistema respecto del cual el espejo se encuentra en reposo. En dicho sistema valdrán, naturalmente, las fórmulas anteriores (principio de relatividad), y la presión P′ observada en el sistema del espejo será

$$P' = 2U'\cos^2\varphi' \ , \quad [63]$$

donde U′ es la densidad de la energía y φ' el ángulo de incidencia, medidas ambas magnitudes en el mismo sistema. Consideremos, en particular, que los rayos inciden normalmente, o sea $\varphi' = 0$, y que el espejo se mueve con la velocidad v en la dirección de la normal a la superficie con respecto a otro sistema S. La relación entre las presiones que el mismo haz ejercería sobre espejos colocados normalmente, uno en el sistema S y otro en el S′, será:

$$\frac{P}{P'} = \frac{U}{U'} = \frac{E}{Sl} \div \frac{E'}{S'l'} \ . \quad [64]$$

Las secciones S y S′ son iguales y como la energía de un haz luminoso se transforma igual que la frecuencia (§ 54), en tanto que las longitudes del haz en ambos sistemas están en razón inversa de las mismas frecuencias, resulta:

$$\frac{P}{P'} = \frac{E}{E'} \cdot \frac{l'}{l} = \frac{\nu}{\nu'} \cdot \frac{\nu}{\nu'} = \frac{\nu^2}{\nu'^2} \ , \quad [65]$$

y de acuerdo con (III, [38]), si el espejo se aleja de la fuente, o sea si respecto del sistema S se mueve en el mismo sentido de la luz incidente, se tendrá

$$\frac{P}{P'} = \frac{c+v}{c-v} \ ,$$

o sea:

$$P' = P\frac{c-v}{c+v} \ . \quad [66]$$

Esto muestra que la nave sideral de nuestro ejemplo del § 43, que hacíamos mover con una velocidad próxima a la de la luz, encontraría, al moverse con movimiento uniforme y en el espacio vacío, una resistencia bien apreciable debida a la presión de la luz. Para que la resistencia sea nula, el espacio debe estar totalmente desprovisto de radiación.

55. Transformación de la aceleración y la fuerza. — Consideremos una partícula que se encuentra en reposo en el sistema S′, el cual, como siempre, se mueve con respecto al sistema S con una velocidad v que coincide en dirección y sentido con el eje x. El sistema S′ es, entonces, el sistema propio de la partícula. Como ésta se halla en reposo respecto de S′, vale:

[67] $$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dz'}{dt'} = 0 \quad ,$$

y respecto de S:

[68] $$\frac{dx}{dt} = v \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0 .$$

Si la partícula experimenta una aceleración cuyas componentes en el sistema S′ son

[69] $$\frac{d^2x'}{dt'^2} = a'_x \quad ; \quad \frac{d^2y'}{dt'^2} = a'_y \quad ; \quad \frac{d^2z'}{dt'^2} = a'_z \quad ;$$

se trata de averiguar las componentes a_x, a_y, a_z de la aceleración en el sistema S. Por las ecuaciones de Lorentz se tiene:

[70] $$dx = \frac{1}{\cos\alpha}(dx' + v dt') \quad ;$$

[71] $$dy = dy' \quad ; \quad dz = dz' \quad ;$$

[72] $$dt = \frac{1}{\cos\alpha}\left(dt' + \frac{v}{c^2} dx' \right) .$$

Dividiendo [70] y [72], resulta:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\dfrac{dx'}{dt'} + v}{1 + \dfrac{v}{c^2}\dfrac{dx'}{dt'}}$$

y derivando respecto de t y teniendo en cuenta [67]:

[73] $$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt'^2} \cdot \frac{dt'}{dt} \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) .$$

Por ser de acuerdo con [72]:

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{1}{\cos\alpha}\left(1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'} \right)$$

teniendo en cuenta [67], resulta:

[74] $$\frac{dt}{dt'} = \frac{1}{\cos\alpha} .$$

Con esto, la [73] se convierte en

$$[75] \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt'^2} \cdot \cos^3 \alpha .$$

Análogamente, dividiendo las [71] por [72] y derivando luego respecto de t, se obtiene:

$$[76] \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y'}{dt'^2} \cdot \cos^2 \alpha \quad ; \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z'}{dt'^2} \cdot \cos^2 \alpha .$$

Las fórmulas obtenidas [75] y [76], son:

$$[77] \quad a_x = a'_{x'} \cos^3 \alpha \quad ; \quad a_y = a'_{y'} \cos^2 \alpha \quad ; \quad a_z = a'_{z'} \cos^2 \alpha .$$

Estas expresiones pueden obtenerse de inmediato pensando que la partícula comienza a moverse en el sistema S′ con movimiento acelerado partiendo del reposo. Su desplazamiento sobre el eje x' será

$$dx' = \frac{1}{2} a'_{x'} \cdot dt'^2 .$$

Respecto del sistema S, el recorrido de la partícula dentro de S′ (lo que se aleja, por ejemplo, del origen O′ si inicialmente estaba en ese punto), será

$$dx = \frac{1}{2} a_x \cdot dt^2$$

y de aquí, por la contracción de las longitudes y la dilatación del tiempo:

$$a_x = \frac{2dx}{dt^2} = \frac{2dx' \cos \alpha}{(dt'/\cos \alpha)^2} = a'_{x'} \cos^3 \alpha .$$

Para las componentes transversales no hay contracción de longitudes, y el $\cos^2 \alpha$ proviene sólo de la dilatación del tiempo.

Para las componentes de la fuerza en el sistema propio S′, se tiene:

$$[78] \qquad F'_{x'} = \frac{d}{dt'}\left(m \frac{dx'}{dt'} \right) = \frac{d}{dt'}\left(m_0 \frac{dx'}{dt'} \right) = m_0 \frac{d^2x'}{dt'^2} \quad ;$$

$$[79] \qquad F'_{y'} = \frac{d}{dt'}\left(m \frac{dy'}{dt'} \right) = \frac{d}{dt'}\left(m_0 \frac{dy'}{dt'} \right) = m_0 \frac{d^2y'}{dt'^2} \quad ;$$

$$[80] \qquad F'_{z'} = \frac{d}{dt'}\left(m \frac{dz'}{dt'} \right) = \frac{d}{dt'}\left(m_0 \frac{dz'}{dt'} \right) = m_0 \frac{d^2z'}{dt'^2} \quad .$$

En cambio, en el sistema S:

$$F_x = \frac{d}{dt}\left(m \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot v \right) = \frac{m_0}{\cos^3 \alpha} \frac{dv}{dt}$$

o sea:

[81] $$F_x = \frac{m_0}{\cos^3 \alpha} \frac{d^2x}{dt^2} .$$

Para las componentes transversales, resulta:

[82] $$F_y = \frac{d}{dt}\left(m \frac{dy}{dt}\right) = \frac{m_0}{\cos \alpha} \frac{d^2y}{dt^2} ;$$

[83] $$F_z = \frac{d}{dt}\left(m \frac{dz}{dt}\right) = \frac{m_0}{\cos \alpha} \frac{d^2z}{dt^2} .$$

Teniendo ahora en cuenta las fórmulas [77], que relacionan la aceleración medida desde uno u otro sistema, se obtiene:

[84] $$F_x = \frac{m_0}{\cos^3 \alpha} a_x = m_0 a'_{x'} = F'_{x'} ;$$

[85] $$F_y = \frac{m_0}{\cos \alpha} a_y = m_0 a'_{y'} \cos \alpha = F'_{y'} \cos \alpha ;$$

[86] $$F_z = \frac{m_0}{\cos \alpha} a_z = m_0 a'_{z'} \cos \alpha = F'_{z'} \cos \alpha .$$

Obsérvese que estas fórmulas han sido halladas calculando la fuerza en ambos sistemas por la misma fórmula, pues en ambos rige la misma ley, como lo exige el principio de relatividad. Por otra parte, las fórmulas que vinculan la aceleración medida en ambos sistemas, se calcularon aplicando las ecuaciones de transformación de Lorentz, por lo cual puede decirse que la expresión

$$F = \frac{d}{dt}(mv)$$

es covariante (conserva su forma) con respecto al grupo de transformación de Lorentz.

La fuerza que estamos considerando es, para cada sistema, un vector en el espacio común, pero ni aun agregando la cuarta componente F_u, se convierte en un cuadrivector, pues las componentes no se transforman como las coordenadas. Para que este ente fuera un cuadrivector sería necesario, por ejemplo, que F_y fuera igual a $F'_{y'}$, pues $y = y'$, y aquí nos encontramos con que la componente de la fuerza normal a la velocidad experimenta una contracción y queda, en cambio, invariable la componente longitudinal.

Si se introduce la masa como factor de la velocidad, tal como lo hemos hecho, se encuentra que dicha masa depende de la velocidad en la forma dada por [18], pero si se introduce la masa como coeficiente de la aceleración, es necesario distinguir,

de acuerdo con [81], [82] y [83], una masa longitudinal y otra transversal, que estarían dadas por las expresiones:

[87] $$\text{masa longitudinal} = \frac{m_0}{\cos^3 \alpha} ;$$

[88] $$\text{masa transversal} = \frac{m_0}{\cos \alpha} .$$

En el primer trabajo de Einstein la masa fué introducida como coeficiente de la aceleración, y por eso se hablaba en él de masa longitudinal y masa transversal. Hoy se prefiere considerar a la masa como factor que interviene en la medida del impulso, mv, y procediendo así ya no es necesario distinguir entre masa longitudinal y transversal. Pero si se piensa en la masa como en la resistencia que opone un cuerpo al cambio de velocidad, es necesario tener presente que dicha resistencia es diferente, según que la variación de velocidad se produzca en la dirección del movimiento o perpendicular a él.

Puede definirse la fuerza en otra forma para lograr que la misma sea un cuadrivector del espacio-tiempo. Esto se logra derivando el impulso respecto del tiempo propio τ, que es un invariante. Se tienen, así, para las componentes de esta *cuadrifuerza*, las expresiones:

[89] $$K_x = \frac{d}{d\tau}(mv_x) \quad ; \quad K_y = \frac{d}{d\tau}(mv_y)$$

$$K_z = \frac{d}{d\tau}(mv_z) \quad ; \quad K_u = \frac{d}{d\tau}(mc).$$

Para el formalismo matemático puede tener cierta ventaja esta definición, pero los resultados experimentales se interpretan en forma mucho más directa con la [4] (estando m dado por la [18]). La expresión [4] ya había sido utilizada por Lorentz para calcular la trayectoria de un electrón en un campo eléctrico o magnético, y en el capítulo siguiente se verá que los resultados experimentales concuerdan, así, perfectamente con los teóricos.

56. **Invariancia de la presión.** — Si en el sistema S′ la fuerza $F'_{x'}$ se aplica sobre una superficie σ' colocada normalmente al eje x', la presión será

[90] $$P'_{x'} = \frac{F'_{x'}}{\sigma'}$$

y esta presión medida desde el sistema S, es:

[91] $$P_x = \frac{F_x}{\sigma}$$

y por ser de acuerdo con [84], $F_x = F'_{x'}$ y, además, $\sigma = \sigma'$ (pues por las fórmulas de Lorentz es $y = y'$; $z = z'$), resulta

[92] $$P_x = P'_{x'}.$$

Si se trata, en cambio, de una fuerza $F'_{y'}$ aplicada sobre una superficie normal a la misma y, por lo tanto, paralela a los ejes x', z', la presión es

[93] $$P'_{y'} = \frac{F'_{y'}}{\sigma'}.$$

Medida desde S, de acuerdo con [85], y a causa de la contracción de las longitudes en la dirección del eje x, esa presión será:

[94] $$P_y = \frac{F_y}{\sigma} = \frac{F'_{y'} \cos \alpha}{\sigma' \cos \alpha} = P'_{y'}.$$

En este último caso, la contracción de la fuerza y la contracción de la superficie se compensan, resultando así que, en todos los casos, la presión es un invariante.

57. **Cuplas sin poder rotatorio.** — Sea una palanca acodada como la de la figura 77, que puede girar alrededor del eje O, y supongamos que en los extremos A y B de los brazos de igual longitud se aplican las fuerzas F_1 y F_2, también iguales entre sí. En estas condiciones, la palanca estará en equilibrio. Si se miden los brazos de esta palanca y las fuerzas aplicadas en sus extremos desde otro sistema respecto del cual la palanca se mueve con la velocidad v, paralela a OB, el brazo OB resultará más corto y la fuerza F_2 más pequeña, en tanto que OA y F_1 no varían. Respecto de ese sistema, existe un momento rotatorio igual a

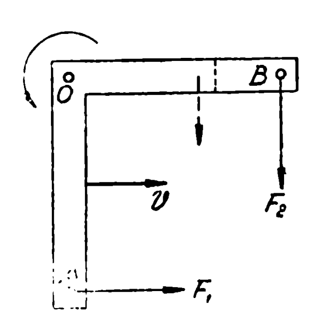


Fig. 77. — Palanca acodada y cuplas sin poder rotatorio.

[95] $$Fl - F \cos \alpha \, . \, l \cos \alpha = Fl(1 - \cos^2 \alpha) = Fl \, . \frac{v^2}{c^2},$$

siendo F y l los valores de la fuerza y la longitud de los brazos medidos desde el sistema propio. Este momento rotatorio corresponde a una giración de sentido inverso al movimiento de las agujas de un reloj, si se mira la palanca tal como vemos a la figura 77. Para otro sistema, respecto del cual el aparato se moviera paralelamente al brazo OA, resultaría un momento rotatorio de sentido opuesto. De modo análogo, las fuerzas F_1

y F_2 (fig. 78) son iguales y opuestas y desde un sistema en que se vea moverse al aparato con la velocidad v, las fuerzas ya no actúan sobre la misma recta de acción y aparece una cupla que, como en el caso anterior, no da lugar a rotación alguna. No tiene esto nada de extraño. Si nos colocamos frente al tablero de la figura 77 y medimos con un catetómetro el brazo vertical OA y, mediante un anteojo que se deslice horizontalmente, el brazo OB, constataremos que ambos brazos son iguales y, por ser las fuerzas también iguales, no nos asombra que el sistema esté en equilibrio. Pero si nos alejamos del tablero y efectuamos la medida desde un lugar en que la vertical que pasa por el observador forme cierto ángulo no despreciable, β, con la vertical que pasa por el tablero, el resultado de la medición será diferente.

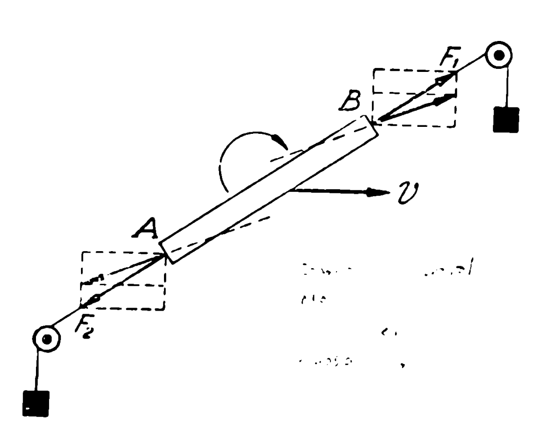


Fig. 78. — Fuerzas iguales y opuestas en un sistema forman una cupla consideradas desde otro sistema.

En este caso, si suponemos que las medidas de las fuerzas no se alteran con el alejamiento, aparecerá también un momento rotatorio que no produce giración y cuyo valor será:

$$Fl - Fl\cos\beta = Fl(1 - \cos\beta).$$

Lo importante es que, por las medidas efectuadas desde cualquier sistema, podamos saber las medidas que obtendrían los observadores de cualquier otro y en particular los observadores del sistema propio. Y *la condición para que la palanca no gire es que el momento rotatorio, medido desde un sistema respecto del cual la palanca no se traslada, sea nulo.*

58. **Movimiento uniformemente acelerado y movimiento hiperbólico.** — Sea una partícula que, respecto de un sistema inercial S, se mueva sobre el eje x con movimiento uniformemente acelerado:

$$[96] \qquad x = \frac{1}{2}\,gt^2 = \frac{1}{2}\,\frac{g}{c^2}\,(c^2t^2) = \frac{1}{2}\,\frac{g}{c^2}\,u^2 \quad ;$$

$$[97] \qquad v = gt = \frac{g}{c}\,u.$$

La aceleración de la partícula respecto de S es la constante g. Para el valor $u = c^2/g$, la partícula alcanzaría la velocidad

de la luz al pasar por el punto $x = c^2/2g$. La trayectoria de universo correspondiente a este movimiento está representada (fig. 79) por la parábola OQ. En el punto Q la tangente a la parábola es paralela a la recta OL, bisectriz del ángulo xOu, siendo OL la línea de universo del extremo de un rayo de luz que partió de O, en el sentido del eje de las x, en el instante cero. Para valores de u mayores que c^2/g se obtendrían (parte punteada de la parábola) valores de la velocidad superiores a la velocidad de la luz. La aceleración propia de la partícula, g', es, de acuerdo con [77]:

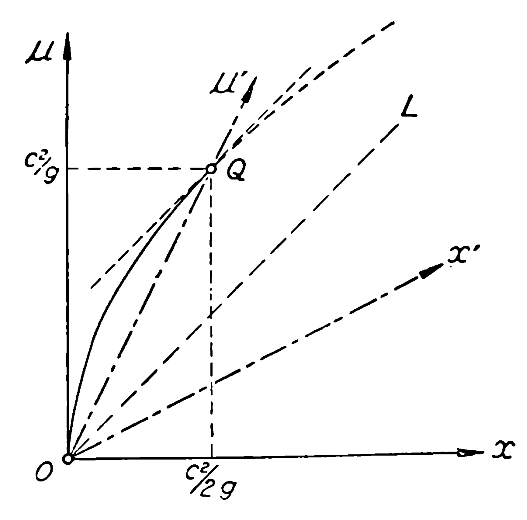


Fig. 79. — Movimiento uniformemente acelerado: aceleración respecto de S constante y aceleración propia variable.

[98] $$g' = \frac{g}{\cos^3 \alpha} = g\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}.$$

Esta aceleración propia es variable y adquiere valores imaginarios para $v > c$, haciéndose infinita si $v = c$. La aceleración propia g' es la que se mediría desde un sistema inercial S', respecto del cual la partícula estuviera en reposo en el instante considerado. Para esto, el sistema S' debería moverse, respecto de S, con una velocidad igual a la de la partícula.

Así, por ejemplo, el sistema $x'Ou'$ sería el sistema propio de la partícula en el instante correspondiente a un punto de la parábola cuya tangente fuera paralela al eje u'. La fuerza que debe actuar sobre la partícula para que el movimiento sea uniformemente acelerado es variable y su valor, de acuerdo con [81] y [84], es:

[99] $$F_x = F'_{x'} = m_0 \frac{g}{\cos^3 \alpha}$$

y tiende a un valor infinito para v tendiendo a c. Observemos, desde ahora, lo que nos será de gran utilidad al tratar del campo gravitatorio, que si se supone que lo que se mueve con respecto a S con movimiento uniformemente acelerado es, en lugar de una partícula, otro sistema de referencia, por ejemplo, una gran caja en la cual puede suponerse que existen observadores que relacionan el movimiento a las paredes de la misma, este sistema no será, desde luego, un sistema inercial, y

los observadores del interior de la caja observarían, como aceleración de caída en el sentido negativo del eje x, una aceleración variable e igual precisamente a lo que hemos llamado aceleración propia.

Consideremos, ahora, que la partícula se mueva de tal modo que su aceleración propia sea constante. En este caso se tendrá:

$$[100] \qquad g' = \frac{g}{\cos^3 \alpha} = \text{constante} = k$$

si designamos por k a la aceleración propia de este movimiento. La ecuación anterior se integra fácilmente:

$$[101] \quad g = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = k\cos^3\alpha \quad ; \quad c\mathrm{d}\left(\frac{v}{c}\right) = k\cos^3\alpha\,\mathrm{d}t \quad ,$$

o sea

$$\frac{\mathrm{d}(\operatorname{sen}\alpha)}{\cos^3\alpha} = \frac{k}{c^2}\,\mathrm{d}u \quad ; \quad \frac{\cos\alpha\,\mathrm{d}\,\alpha}{\cos^3\alpha} = \frac{k}{c^2}\,\mathrm{d}u \quad ,$$

de donde

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\cos^2\alpha} = \mathrm{d}(\operatorname{tg}\alpha) = \frac{k}{c^2}\mathrm{d}u$$

y de aquí

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{k}{c^2}u + \mathrm{C} \quad ,$$

o lo que es lo mismo:

$$[102] \qquad \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{k}{c^2}u + \mathrm{C}.$$

Si tomamos la constante de integración de tal modo que sea $v = 0$ para $u = 0$ $(\mathrm{C} = 0)$, y despejamos v, obtenemos:

$$[103] \qquad v = \frac{ku}{\sqrt{c^2 + \frac{k^2}{c^2}u^2}} = \frac{k}{\sqrt{\frac{c^2}{u^2} + \frac{k^2}{c^2}}} \quad ,$$

por lo cual se ve que la velocidad tiende a c para u (o el tiempo) tendiendo a infinito.

La [103] permite hallar x en función del tiempo, pues por ser $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ y $u = ct$, resulta:

[104] $$dx = k\frac{tdt}{\sqrt{1+\frac{k^2t^2}{c^2}}} = \frac{c^2}{k}\,d\sqrt{1+\frac{k^2}{c^2}t^2} \quad ,$$

de donde

[105] $$x = \frac{c^2}{k}\sqrt{1+\frac{k^2t^2}{c^2}} + C.$$

Comencemos por hacer igual a cero la constante de integración, lo que significa que la partícula inicia su movimiento en el punto $x = c^2/k$. Se tiene, en este caso:

[106] $$\frac{k^2}{c^4}(x^2 - c^2t^2) = 1 \quad ,$$

o sea

[107] $$\frac{k^2}{c^4}(x^2 - u^2) = 1,$$

que representa la hipérbola equilátera H_1 de la fig. 80.

Si el punto inicia su movimiento en el origen, es $x = 0$ para $t = 0$ y la constante de integración de [105] debe hacerse igual a $-c^2/k$, resultando, así:

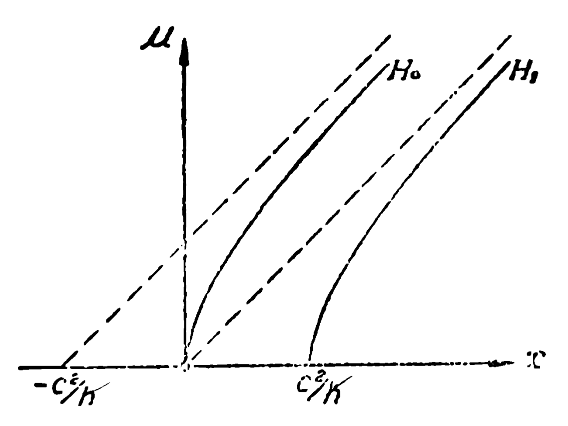


Fig. 80. — Movimiento hiperbólico: aceleración propia constante y aceleración respecto de S variable.

[108] $$\frac{k^2}{c^4}\left[\left(x+\frac{c^2}{k}\right)^2 - u^2\right] = 1 \quad ,$$

que corresponde a la hipérbola H_0 de la fig. 80.

En este movimiento hiperbólico se conserva constante la aceleración propia, o sea la referida a un sistema cuyo eje del tiempo es, en cada punto, paralelo a la tangente de la trayectoria de universo de la partícula.

Si una caja se moviera con respecto a un sistema inercial, con un movimiento de esta clase, los observadores del interior de la misma observarían que los cuerpos caen en ella con una aceleración constante, pero los observadores del sistema inercial verían, en cambio, que la "aceleración de caída" se hace cada vez menor, pues el movimiento de la caja tiende a ser uniforme. Hagamos notar, finalmente, que si sobre un cuerpo material se aplica una fuerza constante F, su movimiento será hiperbólico, estando dada la aceleración propia k por la relación

[109] $$k = \frac{F}{m_0},$$

en tanto que la aceleración g, referida al sistema inercial, sería

[110] $$g = k \cos^3 \alpha = \frac{F}{m_0} \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3}.$$

59. **El campo electromagnético.** — Para determinado sistema de coordenadas S, el comportamiento electromagnético de una pequeña región libre de materia queda determinado si se conocen en todo instante los valores del campo eléctrico y del campo magnético que actúan en la misma. Si llamamos X, Y, Z, a las componentes del campo eléctrico según los ejes $x\,y\,z$, y L, M, N, a las componentes, según los mismos ejes, del campo magnético, las ecuaciones de Maxwell para el vacío son:

[111] $$\begin{cases} \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial X}{\partial t} = \dfrac{\partial N}{\partial y} - \dfrac{\partial M}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial Y}{\partial t} = \dfrac{\partial L}{\partial z} - \dfrac{\partial N}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial Z}{\partial t} = \dfrac{\partial M}{\partial x} - \dfrac{\partial L}{\partial y} \end{cases}$$

[112] $$\begin{cases} \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial L}{\partial t} = \dfrac{\partial Y}{\partial z} - \dfrac{\partial Z}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial M}{\partial t} = \dfrac{\partial Z}{\partial x} - \dfrac{\partial X}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial N}{\partial t} = \dfrac{\partial X}{\partial y} - \dfrac{\partial Y}{\partial x} \end{cases}$$

cumpliéndose, además:

[113] $$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0,$$

[114] $$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0.$$

Se trata de ver cómo se transforman estas ecuaciones al referir los mismos acontecimientos a otro sistema de coordenadas S′ que se traslade, respecto del primero, con cierta velocidad v. Supondremos, como siempre, que los ejes x y x' se toman en coincidencia con la dirección de la velocidad relativa de ambos sistemas, con lo cual las fórmulas de transformación serán las de Lorentz (II, [16]) y en las cuales, para abreviar, haremos:

[115] $$\beta = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} .$$

Si se tiene una función φ de las coordenadas $x\, y\, z\, t$ y se quieren expresar sus derivadas parciales respecto de cualquiera de estas variables, en función de las nuevas variables $x'\, y'\, z'\, t'$, se tendrá:

[116] $$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} ,$$

con lo cual, de acuerdo con (II, [16]), se tendrá:

[117] $$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \beta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x'} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t'} \right) ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y'} ;$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial z'} ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \beta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t'} - v \frac{\partial \varphi}{\partial x'} \right) .$$

De aquí, la primera ecuación de [111] se convierte en:

$$\frac{\beta}{c} \frac{\partial X}{\partial t'} - \beta \frac{v}{c} \frac{\partial X}{\partial x'} = \frac{\partial N}{\partial y'} - \frac{\partial M}{\partial z'}$$

y como de la [113] resulta

$$\beta \frac{\partial X}{\partial x'} = \beta \frac{v}{c^2} \frac{\partial X}{\partial t'} - \frac{\partial Y}{\partial y'} - \frac{\partial Z}{\partial z'} ,$$

aquélla se transforma en la primera de las ecuaciones que escribimos a continuación, habiéndose calculado las restantes en forma enteramente análoga:

[118] $$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial X}{\partial t'} &= \frac{\partial}{\partial y'} \beta \left(N - \frac{v}{c} Y \right) - \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial z'} \beta \left(M + \frac{v}{c} Z \right) ; \\ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \beta \left(Y - \frac{v}{c} N \right) &= \frac{\partial L}{\partial z'} - \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x'} \beta \left(N - \frac{v}{c} Y \right) ; \\ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \beta \left(Z + \frac{v}{c} M \right) &= \frac{\partial}{\partial x'} \beta \left(M + \frac{v}{c} Z \right) - \\ &\quad - \frac{\partial L}{\partial y'} ; \end{aligned} \right.$$

$$
[119] \left\{
\begin{aligned}
\frac{1}{c}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial t'} &= \frac{\partial}{\partial z'}\beta\left(\mathrm{Y}-\frac{v}{c}\mathrm{N}\right)- \\
&\quad -\frac{\partial}{\partial y'}\beta\left(\mathrm{Z}+\frac{v}{c}\mathrm{M}\right) \; ; \\
\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}\beta\left(\mathrm{M}+\frac{v}{c}\mathrm{Z}\right) &= \frac{\partial}{\partial x'}\beta\left(\mathrm{Z}+\frac{v}{c}\mathrm{M}\right)- \\
&\quad -\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial z'} \; ; \\
\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}\beta\left(\mathrm{N}-\frac{v}{c}\mathrm{Y}\right) &= \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y'} - \\
&\quad -\frac{\partial}{\partial x'}\beta\left(\mathrm{Y}-\frac{v}{c}\mathrm{N}\right) .
\end{aligned}
\right.
$$

En el nuevo sistema S′ deben valer las mismas ecuaciones que en el sistema S, por lo cual, si designamos por X′ Y′ Z′ a las componentes del campo eléctrico y por L′ M′ N′ a las del campo magnético, medidas desde S′, deberán tenerse ecuaciones idénticas a las [111] y [112], pero con las letras acentuadas:

$$
[120] \left\{
\begin{aligned}
\frac{1}{c}\frac{\partial \mathrm{X}'}{\partial t'} &= \frac{\partial \mathrm{N}'}{\partial y'} - \frac{\partial \mathrm{M}'}{\partial z'} \\
\frac{1}{c}\frac{\partial \mathrm{Y}'}{\partial t'} &= \frac{\partial \mathrm{L}'}{\partial z'} - \frac{\partial \mathrm{N}'}{\partial x'} \\
\frac{1}{c}\frac{\partial \mathrm{Z}'}{\partial t'} &= \frac{\partial \mathrm{M}'}{\partial x'} - \frac{\partial \mathrm{L}'}{\partial y'}
\end{aligned}
\right.
$$

$$
[121] \left\{
\begin{aligned}
\frac{1}{c}\frac{\partial \mathrm{L}'}{\partial t'} &= \frac{\partial \mathrm{Y}'}{\partial z'} - \frac{\partial \mathrm{Z}'}{\partial y'} \\
\frac{1}{c}\frac{\partial \mathrm{M}'}{\partial t'} &= \frac{\partial \mathrm{Z}'}{\partial x'} - \frac{\partial \mathrm{X}'}{\partial z'} \\
\frac{1}{c}\frac{\partial \mathrm{N}'}{\partial t'} &= \frac{\partial \mathrm{X}'}{\partial y'} - \frac{\partial \mathrm{Y}'}{\partial x'}
\end{aligned}
\right.
$$

Pero el grupo de ecuaciones [118] y [119] debe expresar lo mismo que las [120] y [121], que sólo difieren en los símbolos empleados, por lo cual podrán identificarse los valores que ocupen el mismo lugar en ambos grupos, teniéndose, así:

$$
[122] \left\{
\begin{aligned}
\mathrm{X}' &= \mathrm{X} \\
\mathrm{Y}' &= \beta\left(\mathrm{Y}-\frac{v}{c}\mathrm{N}\right) \\
\mathrm{Z}' &= \beta\left(\mathrm{Z}+\frac{v}{c}\mathrm{M}\right)
\end{aligned}
\right.
$$

[123] $$\begin{cases} L' = L \\ M' = \beta\left(M + \frac{v}{c} Z\right) \\ N' = \beta\left(N - \frac{v}{c} Y\right) \end{cases}$$

La identidad de los grupos de fórmulas [118] y [119] con [120] y [121], se logra también si se multiplican los segundos miembros de [122] y [123] por una constante que podría ser, eventualmente, cierta función, $\varphi(v)$, de la velocidad. Pero aplicando la transformación inversa y razonando como se ha hecho para establecer la (II, [7]), se encuentra que esta constante debe ser necesariamente igual a uno.

Con los valores [122] y [123] se encuentra que, además de ser válidas la [120] y la [121], valen también fórmulas idénticas a las [113] y [114]. De este modo, queda demostrado que las fórmulas fundamentales del campo electromagnético son covariantes respecto del grupo de transformación de Lorentz y satisfacen, por lo tanto, los principios de relatividad y de constancia de la velocidad de la luz. Observemos que, con respecto al grupo de Galileo, no se obtiene dicha covariancia por resultar, cuando se aplica dicha transformación, una velocidad c de la luz variable de sistema a sistema.

Las ecuaciones [122] y [123] muestran claramente que los campos eléctricos y magnéticos no pueden considerarse como entes de existencia propia, independientes uno del otro. Respecto de un sistema puede existir sólo un campo eléctrico y aparecer en el otro un campo eléctrico y magnético. Si respecto de S se tiene

$$X = Z = L = M = N = 0 \quad ; \quad Y \neq 0$$

respecto de S′ resultaría:

$$X' = Z' = L' = M' = 0 \quad ;$$

$$Y' = \beta Y \quad ; \quad N' = -\beta \frac{v}{c} Y \quad ;$$

lo que nos dice que en S′ tenemos un campo eléctrico en el sentido del eje y' y un campo magnético cuyas líneas tienen la dirección del eje z'.

Si se tienen en cuenta las corrientes de convección originadas por el movimiento de cargas eléctricas, las ecuaciones de Maxwell-Lorentz, para ese caso, escritas en forma vectorial, son:

[124] $$\frac{1}{c}\left(\frac{\partial E}{\partial t} + 4\pi\varrho V\right) = \operatorname{rot} H \quad ; \quad -\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t} = \operatorname{rot} E \quad ;$$

$$\operatorname{div} E = 4\pi\varrho \quad ; \quad \operatorname{div} H = 0 \quad ;$$

donde V es la velocidad con que se mueven las cargas cuya densidad de volumen es ϱ. Si se pasa a otro sistema S′, aplicando las fórmulas de Lorentz y calculando exactamente igual a como lo hicimos en el caso anterior, se obtienen en el nuevo sistema fórmulas idénticas a las [124] (con las letras acentuadas), estando vinculadas las componentes de E′ y H′ a las de E y H por las mismas fórmulas [122] y [123], siendo las componentes de V′, velocidad de las cargas en el nuevo sistema,

[125] $$V'_{x'} = \frac{V_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} V_x} \quad ; \quad V'_{y'} = \frac{V_y \cos \alpha}{1 - \frac{v}{c^2} V_x} \quad ;$$

$$V'_{z'} = \frac{V_z \cos \alpha}{1 - \frac{v}{c^2} V_x} \quad ;$$

de acuerdo con el teorema de adición de velocidades (III, [9], [14] y [15]). En cuanto a la densidad ϱ' en el nuevo sistema, resulta

[126] $$\varrho' = \frac{1 - \frac{v}{c^2} V_x}{\cos \alpha} \varrho .$$

Se tiene, así, que las ecuaciones fundamentales del electromagnetismo no experimentan modificación alguna en la física relativista, no ocurriendo lo mismo, como ya sabemos, con las ecuaciones de la mecánica clásica. Por esta razón, Einstein estableció su dinámica basándose en las ecuaciones del electromagnetismo que, establecidas por Maxwell cuarenta años antes, eran, sin que se lo advirtiera, ecuaciones relativistas. Lo único que altera en estas ecuaciones es su interpretación que, ahora sabemos, valen para cualquier sistema inercial y antes se creía que sólo eran válidas para el sistema del éter en reposo.

60. **Invariancia de la carga eléctrica.** — Consideremos un campo eléctrico cuyas líneas de fuerza sean paralelas al eje x en el sistema S. Se tiene, entonces:

$$X = X \quad ; \quad Y = 0 \quad ; \quad Z = 0 \quad ;$$

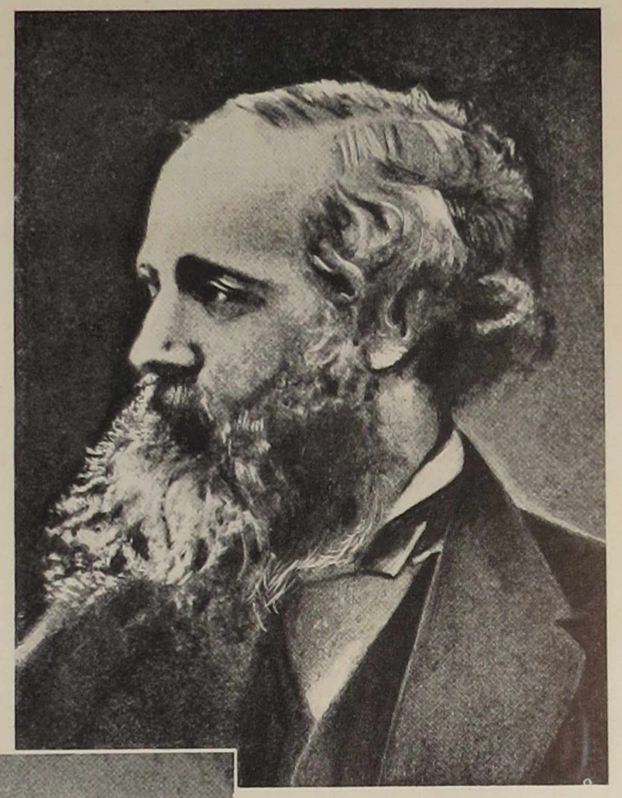
y supongamos, además, que el campo magnético en este sistema sea nulo:

$$L = M = N = 0 .$$

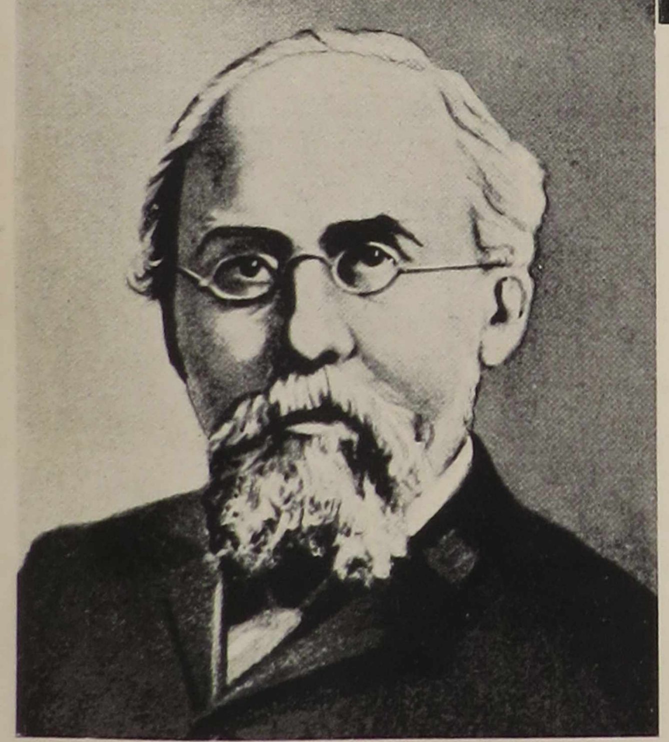
Si se tiene una carga eléctrica e en reposo en el sistema S estará sometida a la fuerza:

$$F_x = eX \quad ; \quad F_y = F_z = 0 .$$

Respecto del sistema S′, que se traslada con velocidad v di-



J. C. Maxwell
(1831-1879).



H. A. Lorentz (1853-1928).

rigida según el eje de las x, se tendrá un campo cuyas componentes serán, de acuerdo con [122] y [123]:

$$X' = X \quad ; \quad Y' = Z' = 0 \quad ; \quad L' = M' = N' = 0.$$

Si llamamos e' a la carga eléctrica medida desde el sistema S', la fuerza actuante medida desde ese sistema será

$$F'_{x'} = e'X' \quad ,$$

pero ya sabemos por [84] que $F_x = F'_{x'}$ y como, además, $X = X'$, debe ser necesariamente

[127] $$e = e' \quad ,$$

lo que significa que la carga eléctrica es un invariante.

En cuanto a la densidad eléctrica de volumen, llamando ϱ_0 a la densidad propia, o sea a la densidad medida desde el sistema en que las cargas están en reposo, y ϱ a la densidad de las mismas cargas, medidas desde otro sistema respecto del cual dichas cargas se mueven con velocidad v, se tendrá, siendo V_0 y V los volúmenes respectivos con la carga e:

$$\varrho_0 = \frac{e}{V_0} \quad ; \quad \varrho = \frac{e}{V}$$

y por ser $V = V_0 \cos \alpha$, resulta:

[128] $$\varrho = \frac{\varrho_0}{\cos \alpha} \quad ,$$

lo que nos dice que, a causa de la contracción del volumen, la densidad aumenta con la velocidad. Obsérvese que la [128] es un caso particular de [126] donde si $V_x = 0$, es $\varrho = \varrho_0$.

61. **Representación gráfica de las ecuaciones de transformación del campo.** — Las ecuaciones [122] y [123] pueden escribirse:

[129] $$X' = X \quad ; \quad L' = L.$$

[130] $$\begin{cases} Y' = \dfrac{Y - N \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \\ N' = \dfrac{N - Y \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \end{cases}$$

[131] $$\begin{cases} Z' = \dfrac{Z + M \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \\ M' = \dfrac{M + Z \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \end{cases}$$

Se advierte, así, que las ecuaciones [130] son formalmente idénticas a las (II, [43]), y las [131] corresponden a una transformación inversa, por lo cual pueden representarse las mismas en la forma indicada en la figura 81 (a) y (b). Para representar también las [129] bastará tomar coordenadas rectangulares y representar sobre el mismo eje de las abscisas (parte c de la figura) a las componentes X y X' del campo

eléctrico y, sobre el eje de las ordenadas, a las componentes L y L′ del campo magnético. De este modo, en un sistema determinado, las tres componentes del campo eléctrico y las tres del campo magnético constituyen las seis componentes de un ente único R llamado *hexavector* del campo. Para representar un vector de seis componentes tendríamos que utilizar un espacio de *configuración* de seis dimensiones, pero también se puede

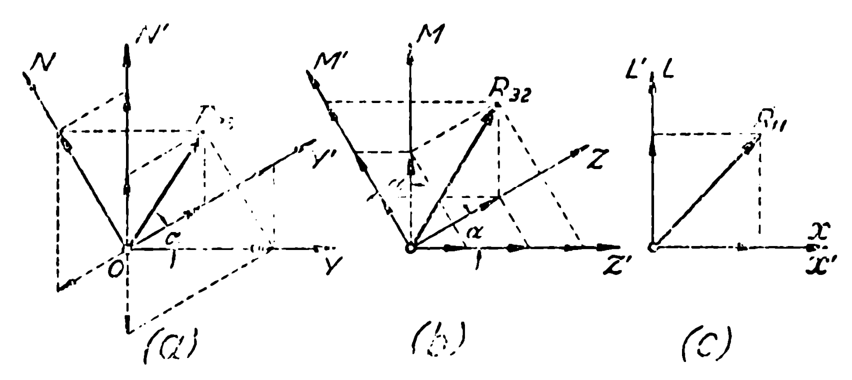


Fig. 81. — Representación gráfica de las fórmulas de transformación de las componentes del campo electromagnético.

representar al mismo por sus proyecciones en tres planos diferentes; y eso es lo que hemos hecho. En el cálculo vectorial común se distingue entre vectores *polares* y *axiales*. Un vector polar, que representa, por ejemplo, una traslación, tiene infinitos planos de simetría, que son todos los que pasan por el vector mismo. En cambio, un vector axial que representa, por ejemplo, una rotación, tiene un único plano de simetría, que es el plano perpendicular al mismo (y todos los paralelos a él).

Los vectores polares se refieren a los ejes; los vectores axiales a los planos. En el espacio común de tres dimensiones, $x\ y\ z$, tenemos tres ejes y también tres planos fundamentales: xy; xz; yz. Por eso, en el espacio común, tanto los vectores polares como los axiales tienen tres componentes. Pero en un espacio de cuatro dimensiones $x\ y\ z\ u$, un vector polar, como el vector impulso, tendrá sólo cuatro componentes, en tanto que un vector axial tiene seis: xy; xz; xu; yz; yu; zu. Estas seis componentes de un vector axial pueden identificarse con las seis componentes del campo en la forma siguiente:

$$\begin{array}{llll} yz \text{ con } H_x = L & ; & xu \text{ con } E_x = X & ; \\ zx \quad ,, \quad H_y = M & ; & yu \quad ,, \quad E_y = Y & ; \\ xy \quad ,, \quad H_z = N & ; & zu \quad ,, \quad E_z = Z & . \end{array}$$

En cuanto al módulo del hexavector, se ve de inmediato, observando la fig. 81 y comparándola con las análogas que he-

mos utilizado para representar las fórmulas de Lorentz, que debe cumplirse:

$$\begin{aligned} N^2 - Y^2 &= N'^2 - Y'^2 \\ M^2 - Z^2 &= M'^2 - Z'^2 \\ L^2 - X^2 &= L'^2 - X'^2 \end{aligned}$$

de donde, sumando, se tiene:

$$|R| = \sqrt{H^2 - E^2} = \sqrt{H'^2 - E'^2}$$

lo que, naturalmente, se puede obtener también de las fórmulas [129] a [131].

Si el módulo de este hexavector es nulo, será $H = E$ respecto de cualquier sistema de coordenadas, que es lo que ocurre al propagarse una onda electromagnética.

62. Acción de un campo sobre una carga eléctrica móvil. — Una carga eléctrica e, puntual, se mueve con velocidad v, referida a un sistema S y respecto del cual existe un campo eléctrico E y un campo magnético H.

Se desea saber la acción de ese campo sobre la carga móvil. Lo más simple es considerar un sistema S′, móvil con la partícula cargada, de modo que la carga se encuentra en reposo en dicho sistema. Tomamos como siempre el eje x del sistema S en coincidencia con la velocidad v y el eje x' de S′ superpuesto al eje x. En el sistema S′ existirá un campo eléctrico E′ y un campo magnético H′ pero como la partícula está en reposo, las únicas fuerzas que actuarán sobre la misma serán las provenientes del campo eléctrico, o sea

$$[133] \qquad F'_{x'} = eX' \quad ; \quad F'_{y'} = eY' \quad ; \quad F'_{z'} = eZ'.$$

Respecto del sistema S, de acuerdo con la ley de transformación de la fuerza [84], [85] y [86], ésta será:

$$[134] \qquad F_x = eX' \quad ; \quad F_y = eY' \cos\alpha \quad ; \quad F_z = eZ' \cos\alpha.$$

Además, es, por las fórmulas de transformación [129] a [131]:

$$[135] \qquad X' = X \quad ; \quad Y' = \frac{Y}{\cos\alpha} - N \operatorname{tg}\alpha \quad ; \quad Z' = \frac{Z}{\cos\alpha} + M \operatorname{tg}\alpha \quad ;$$

con lo cual, las [134] se convierten en:

$$[136] \qquad \begin{cases} F_x = eX \\ F_y = eY - eN \operatorname{sen}\alpha = eY - e\dfrac{v}{c} N \\ F_z = eZ + eM \operatorname{sen}\alpha = eZ + e\dfrac{v}{c} M \end{cases}$$

La fuerza actuante resulta de la superposición de la fuerza eléctrica y magnética, y como las componentes de la velocidad, según los ejes $x\ y\ z$, son v, 0, 0, se ve de inmediato que las fórmulas anteriores, vectorialmente, pueden escribirse:

[137] $$\mathrm{F} = e\left(\mathrm{E} + \frac{v}{c}\wedge\mathrm{H}\right).$$

El segundo término de esta fórmula da la fuerza electromotriz, lo que ilustraremos con el ejemplo siguiente. En el sistema S (fig. 82) se tiene un campo magnético cuyas líneas de fuer-

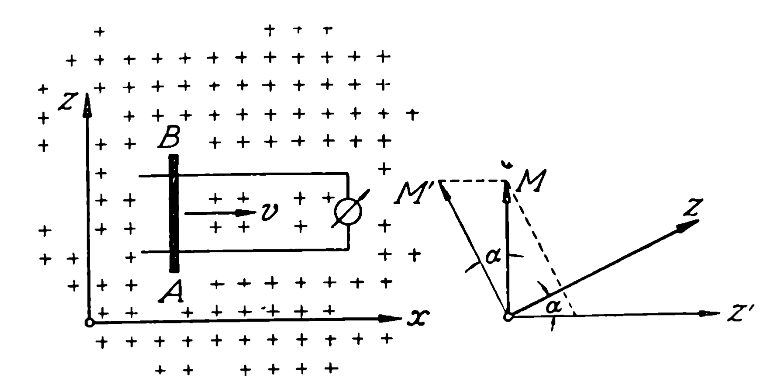


Fig. 82. — Fuerza electromotriz.

za, representadas por cruces, son paralelas al eje y, que debe pensarse perpendicular al plano del dibujo y dirigido hacia atrás. La única componente no nula del campo es, pues:

[138] $$\mathrm{M} = \mathrm{H}.$$

Debe imaginarse entonces que el polo norte del imán que genera el campo está delante de la figura y el polo sur detrás, estando el imán fijo en el sistema S. Sea ahora una varilla AB que se desplaza con velocidad v en el sentido del eje x, manteniéndose paralela al eje z. Respecto del sistema propio de la varilla actúa un campo magnético también paralelo al eje y' cuyo valor, de acuerdo con la segunda de [131], es:

[139] $$\mathrm{M'} = \frac{\mathrm{M}}{\cos\alpha}$$

y un campo eléctrico paralelo a Z', que, por la primera de [131], es:

[140] $$\mathrm{Z'} = \mathrm{M}\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Las cargas eléctricas positivas de la varilla tienden a moverse, entonces, de A hacia B, y las negativas en sentido inverso. Sobre un ion positivo de carga e, se ejercería la fuerza:

[141] $$F'_{z'} = eZ' = e\frac{v}{c}\frac{H}{\cos\alpha},$$

fuerza que, medida desde el sistema S es, de acuerdo con [86]:

[142] $$F_z = e\frac{v}{c}H$$

y la fuerza electromotriz inducida F_i o diferencia de potencial entre A y B, si l es la longitud de la varilla, será:

[143] $$F_i = \frac{F_z}{e}.\,l = \frac{vl}{c}H.$$

Siendo $v = dx/dt$ y $l dx$ la disminución que experimenta la superficie total del circuito, introduciendo la variación del flujo Φ, se tiene:

[144] $$F_i = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}$$

que es la ley de inducción de Faraday.

63. **Deducción directa de las fórmulas de transformación del campo.** — Las fórmulas [122] y [123], escritas en otra forma en [129], [130] y [131], fueron deducidas en el párrafo 60, exactamente igual a como lo hizo Einstein en su memoria original. Después de hallar las fórmulas de transformación para las componentes del campo, se encuentran las fórmulas de transformación de las fuerzas y la mecánica aparece así fundamentada en el electromagnetismo. Pero desde el punto de vista lógico se hace difícil introducir la noción de intensidad de campo eléctrico y magnético sin disponer antes de la noción de fuerza. Después de la memoria original de Einstein apareció el trabajo de Minkowski y su interpretación geométrica de las fórmulas de Lorentz, en que el tiempo aparece como una cuarta coordenada de una variedad espacio-tiempo de cuatro dimensiones. Esto permite generalizar la noción de impulso y definir la fuerza de un modo puramente mecánico, tal como lo hemos hecho en párrafos precedentes de este mismo capítulo. Disponiendo, entonces, de la noción de fuerza, pueden definirse los campos eléctrico y magnético sin dificultad alguna y fundamentar la electrodinámica después de la mecánica.

Adoptando como *ley fundamental* del electromagnetismo la [137], dicha expresión puede considerarse, así, como una *definición* de lo que debe entenderse por intensidad de campo eléctrico E y magnético H. Si esa es la ley fundamental, deberá ser válida respecto de cualquier sistema inercial. Por lo pronto, la sola estructura de la ley adoptada muestra la invariancia de la carga eléctrica e, pues dicha carga, para que la fórmula

tenga sentido, *no debe depender de la velocidad v*. En particular si $v = 0$, respecto de un sistema de coordenadas, la fuerza que actúa sobre la carga, en reposo en dicho sistema, estará dada por el producto del escalar e por el vector E. La dirección del campo magnético está dada por la dirección en que debe moverse la carga para que la fuerza magnética sea nula. Si la carga se mueve en dirección normal al campo, la fuerza será máxima y así se podría definir la unidad de intensidad de campo magnético después de tener las unidades de carga y fuerza.

Supongamos ahora que respecto del sistema S actúe un campo eléctrico cuyas componentes son XYZ y un campo magnético H de componente LMN. Respecto del sistema S′ las componentes serán X′Y′Z′ y L′M′N′. Como siempre, S′ se mueve con velocidad v respecto de S y en la dirección del eje x, y coinciden los orígenes y los ejes de ambos sistemas en el instante considerado, que se toma para los dos (en el origen) igual a cero. Si la carga está fija en el origen de S′, la fuerza que actúa sobre la misma y referida a dicho sistema será, de acuerdo con [137]:

[145] $$F'_{x'} = eX' \quad ; \quad F'_{y'} = eY' \quad ; \quad F'_{z'} = eZ'.$$

Respecto de S, como las componentes de la velocidad con que se mueve la carga son, según los ejes, x, y, z; v, 0, 0, las componentes de la fuerza magnética las hallamos utilizando el esquema

$$\frac{v}{c} \wedge H = \frac{1}{c} \begin{vmatrix} i & j & k \\ v & 0 & 0 \\ L & M & N \end{vmatrix}$$

y así resulta, por la [137]:

[146] $$F_x = eX \quad ; \quad F_y = eY - e\frac{v}{c} N \quad ;$$

$$F_z = eZ + e\frac{v}{c} M.$$

De [145] y [146], teniendo en cuenta las fórmulas de transformación de la fuerza dadas en [84], [85] y [86], resulta:

[147] $$X' = X \quad ; \quad Y' = \frac{Y - \frac{v}{c} N}{\cos \alpha} \quad ; \quad Z' = \frac{Z + \frac{v}{c} M}{\cos \alpha}.$$

Por el principio de relatividad, valdrán fórmulas idénticas para pasar de S′ a S, y como S se mueve respecto de S′ con la velocidad $-v$, se tendrá:

[148] $$Y = \frac{Y' + \frac{v}{c} N'}{\cos \alpha} \quad ; \quad Z = \frac{Z' - \frac{v}{c} M'}{\cos \alpha} .$$

Eliminando Y′ y Z′ entre el par de fórmulas de [147] y [148], donde intervienen esas magnitudes, se tiene:

[149] $$N' = \frac{N - \frac{v}{c} Y}{\cos \alpha} \quad ; \quad M' = \frac{M + \frac{v}{c} Z}{\cos \alpha} .$$

Con esto sólo nos falta hallar cómo se transforma la componente longitudinal del campo magnético. Si suponemos que la carga se mueve sobre el eje z' con velocidad q', la fuerza actuante sobre la misma y medida en el sistema S′ proveniente de la componente L′ del campo, es

[150] $$F'_{y'} = e \frac{q'}{c} L' .$$

En el sistema S, si llamamos q a la componente de la velocidad de la carga según el eje z, se tendrá:

[51] $$F_y = e \frac{q}{c} L$$

y como debe ser $F_y = F'_{y'} \cos \alpha$, se obtiene

[152] $$qL = q'L' \cos \alpha .$$

Como, además, es $q = q' \cos \alpha$ resulta, como era de esperar,

[153] $$L = L' .$$

64. **Campo magnético de una corriente rectilínea.** — Consideremos un cilindro de longitud infinita, de sección constante σ y cargado positivamente con la densidad ϱ_0. El número de líneas que salen de una porción de longitud l será $4 \pi \varrho_0 \sigma l$, y el campo eléctrico E′ a la distancia R del eje del cilindro, lo obtenemos dividiendo aquel número de líneas por la superficie $2 \pi R l$, obteniendo, así:

[154] $$E' = \frac{2 \sigma \varrho_0}{R} .$$

Si suponemos que el eje del cilindro cargado coincide con el eje x' (fig. 83), las componentes del campo eléctrico en un sistema S′, respecto del cual aquél está en reposo, son:

[155] $$X' = 0 \quad ; \quad Y' = E' \frac{y'}{R} \quad ; \quad Z' = E' \frac{z'}{R} .$$

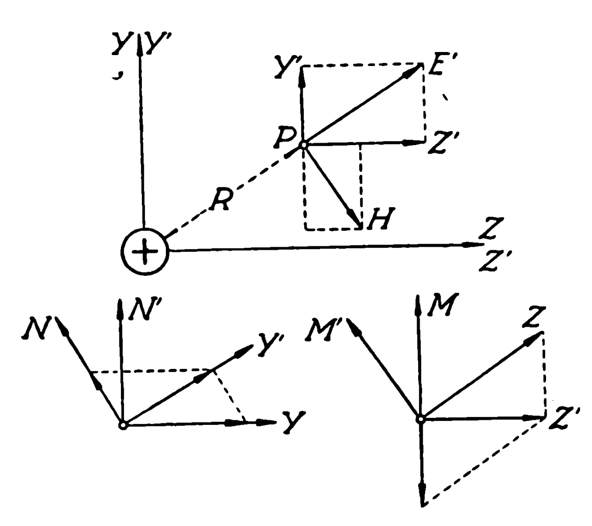


Fig. 83. — Campo magnético originado por el movimiento de un conductor cargado.

Consideremos ahora otro sistema S, con los ejes dispuestos paralelamente a los de S′, tal que, respecto de S, el sistema S′ se mueva con velocidad v en el sentido del eje de las x. Respecto del sistema S, nuestro cilindro cargado se mueve entonces hacia la parte de atrás del plano del dibujo. Las componentes del campo eléctrico y del campo magnético respecto de S se calculan fácilmente aplicando las fórmulas de transformación [129] a [131], y teniendo en cuenta [128], resulta:

[156] $$X = 0 \quad ; \qquad L = 0 \quad ;$$

$$Y = \frac{Y'}{\cos\alpha} = \frac{2\sigma\varrho}{R}\frac{y}{R}; \quad M = -Z'\,\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{v}{c}\frac{2\sigma\varrho}{R}\frac{z}{R};$$

$$Z = \frac{Z'}{\cos\alpha} = \frac{2\sigma\varrho}{R}\frac{z}{R}; \quad N = Y'\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{v}{c}\frac{2\sigma\varrho}{R}\frac{y}{R};$$

siendo ϱ la densidad eléctrica medida desde el sistema S. De las componentes M y N obtenemos el módulo del campo magnético H, cuyo valor es:

[157] $$H = \frac{v}{c}\frac{2\sigma\varrho}{R} = \frac{1}{c}\frac{2i}{R}$$

llamando i a la intensidad de la corriente medida en el sistema S y que es igual a $\sigma\varrho v$. En la figura se ha representado al vector H y se ve que su sentido coincide con el dado por la regla del tirabuzón.

Pero, además del campo magnético tenemos un campo eléctrico cuyo módulo es:

[158] $$E = \sqrt{Y^2 + Z^2} = \frac{E'}{\cos\alpha}$$

o sea superior al que se observa en el sistema en que el conductor está en reposo. Si por el eje x del sistema S circulara una corriente común de intensidad i, se observaría el campo H,

pero no el campo eléctrico E. Por eso, no es del todo cierto que el comportamiento de un conductor cargado, en movimiento, sea idéntico al de una corriente eléctrica. La razón es muy simple. En un cable por el que circula una corriente se desplazan los electrones negativos con una velocidad, de sentido opuesto al de la corriente, que en promedio es muy pequeña, en tanto que los iones positivos, también en promedio, permanecen prácticamente en reposo. El conductor está, entonces, en estado neutro (o *casi*), y al campo eléctrico de las cargas móviles se le superpone el campo eléctrico de sentido opuesto de las cargas fijas. El campo eléctrico resultante está dirigido hacia el cable porque las cargas móviles son negativas, siendo su intensidad

[159] $$E'' = -\frac{E'}{\cos\alpha} + E' = -\frac{2\sigma}{R}\varrho_0\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right).$$

El producto de ϱ_0 por el paréntesis da la densidad eléctrica total, igual a la diferencia entre la densidad de las cargas móviles y fijas. El cable por el cual circula la corriente debe aparecer cargado, para los observadores en reposo respecto del mismo, con electricidad negativa, pues la densidad eléctrica de las cargas móviles es algo mayor que la de las fijas. Claro está que el campo eléctrico así generado es absolutamente irrevelable experimentalmente, debido a su extremada pequeñez. El desarrollo de la [159] permite escribir en primera aproximación:

$$E'' = -\frac{\sigma\varrho_0}{R}\frac{v^2}{c^2}$$

donde v es la velocidad con que se desplazan los electrones en el interior del cable. Para el caso del cobre, por ejemplo, admitiendo que cada átomo suministra sólo un electrón y un ion positivo, la densidad ϱ_0 de las cargas (igual para las positivas que para las negativas) sería del orden de 10^4 coulombios por centímetro cúbico, y si σ fuera igual a 1 cm^2, para una intensidad de corriente de 10^4 amperios, la velocidad de los electrones sería —a pesar del enorme valor de la intensidad— de sólo 1 cm/seg, y el campo eléctrico a la distancia de R cm del eje del cable, en unidades electroestáticas C. G. S., valdría:

$$E'' = -\frac{1}{3R}10^{-7}.$$

Si al cilindro cargado de nuestro ejemplo lo recubrimos con una camisa metálica unida a tierra, y fija, y hacemos mover en el sentido del eje sólo a la armadura interior de este condensador, entonces sí que el dispositivo se comportaría exactamente igual que una corriente eléctrica.

Si se tienen dos corrientes paralelas dirigidas en el mismo sentido, las corrientes se atraen, pero si se tienen dos largos cilindros paralelos cargados con electricidad del mismo signo y se les hace mover en el sentido de sus propios ejes, los cilindros se rechazan, como se rechazan también dos haces de electrones paralelos del interior de un tubo de rayos catódicos.

65. Ley de Biot y Savart. — Sea un conductor tal como el AOB representado en la fig. 84 y por el cual circula una corriente eléctrica estacionaria de intensidad i. Se desea saber el campo magnético originado en un punto cualquiera P por la acción de un elemento de corriente de longitud dl. Tomaremos un sistema de coordenadas cuyo origen coincida con dl, dándole al eje x la dirección del elemento considerado y el sentido de la corriente.

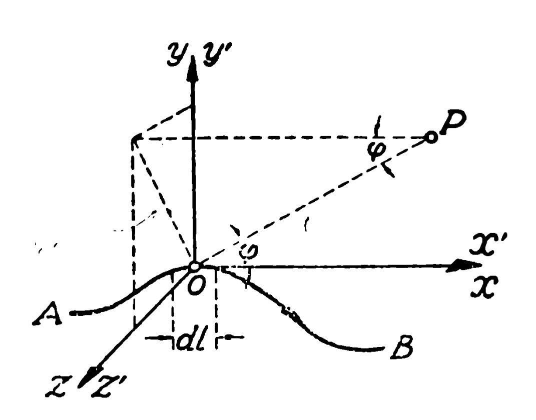


Fig. 84. — Ley de Biot y Savart.

Consideraremos ahora que esta corriente está originada por el movimiento de cargas positivas de densidad propia igual a ϱ_0 y llamaremos σ a la sección del elemento de conductor. Si las cargas se mueven con la velocidad v, tomaremos otro sistema de coordenadas S′, respecto del cual las cargas del elemento dl estén en reposo. En el sistema S′ el elemento considerado tendrá la longitud dl' y el punto P las coordenadas x' y' z'. Como respecto de S′ las cargas de dl' están en reposo, dichas cargas producirán en P sólo un campo eléctrico dado por la ley de Coulomb y cuyas componentes serán:

$$X' = E'\frac{x'}{r'} \quad ; \quad Y' = E'\frac{y'}{r'} \quad ; \quad Z' = E'\frac{z'}{r'} \quad ;$$

siendo

$$E' = \frac{\sigma\,\varrho_0\,dl'}{r'^2} \, .$$

Pasando ahora al sistema S, encontramos para las componentes del campo magnético:

$$L = 0 \quad ; \quad N = Y'\,\mathrm{tg}\,\alpha \quad ; \quad M = -\,Z'\,\mathrm{tg}\,\alpha \quad ;$$

en tanto que el campo eléctrico será nulo por las cargas eléctricas de signo contrario existentes en el conductor. Sin cometer error apreciable podemos hacer $\cos\alpha = 1$, lo que significa

despreciar términos en v^2/c^2 frente a aquellos en que aparece v/c. De este modo, será $\varrho = \varrho_0$, $dl = dl'$, $r = r'$, con lo cual, por ser $i = \sigma \varrho v$, resulta

$$N = \frac{i}{cr^2} dl . \frac{y}{r} \ ; \quad M = - \frac{i}{cr^2} dl . \frac{z}{r}$$

y el módulo que llamaremos dH, es:

[161] $$dH = \frac{i}{cr^2} \frac{\sqrt{y^2 + r^2}}{r} dl = \frac{i \operatorname{sen} \varphi . dl}{cr^2} ,$$

que es la expresión de la ley de Biot y Savart.

66. **Experimento de Trouton y Noble.** — Comencemos por calcular la fuerza con que se atraen las dos placas de un condensador plano, en el caso en que las dimensiones de las mismas sean grandes en comparación con la distancia que las separa. En este caso, si el campo eléctrico entre las placas es E, la carga eléctrica de cada una de ellas e, la diferencia de potencial V y la distancia que las separa d_0, la fuerza F_0 valdrá:

[162] $$F_0 = Ee = \frac{V}{d_0} e = \frac{2U_0}{d_0} ,$$

si llamamos U_0 a la energía del condensador igual a $eV/2$. Supongamos ahora que este condensador fijo en el sistema S_0 se mueve respecto de otro sistema S con la velocidad v que forma con las líneas de fuerza del campo, un ángulo θ_0 medido por los observadores del sistema en que el condensador se encuentra en reposo. En la fig. 85 se han representado la parte central de cada placa y las fuerzas F_0 aplicadas a los puntos A y B de las mismas. Respecto del sistema en que el condensador se mueve con la velocidad v, existirá un momento rotatorio (§ 58)

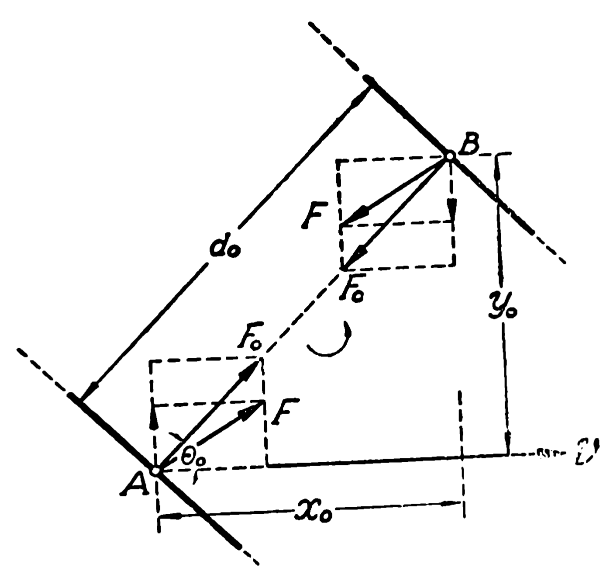


Fig. 85. — Experimento de Trouton y Noble.

originado por la circunstancia de que las componentes transversales de las fuerzas se contraen y las longitudinales se conservan. Las componentes de las fuerzas según los ejes x e y, medidas desde el sistema S, serán, de acuerdo con [84] y [85]:

[163] $$F_x = F_0 \cos\theta_0 \quad ; \quad F_y = F_0 \operatorname{sen}\theta_0 . \cos\alpha .$$

Además, es:

[64] $$x = x_0 \cos\alpha = d_0 \cos\theta_0 \cos\alpha \quad ; \quad y = y_0 = d_0 \operatorname{sen}\theta_0 .$$

El momento rotatorio respecto del sistema S, es:

[165] $$M = F_x y - F_y x = F_0 d_0 \operatorname{sen}\theta_0 \cos\theta_0 (1 - \cos^2\alpha) \quad ;$$

y teniendo en cuenta la [162], resulta

[166] $$M = U_0 . \operatorname{sen} 2\,\theta_0 . \frac{v^2}{c^2} .$$

Este momento rotatorio no origina, naturalmente, como ya lo hicimos notar en el caso de la palanca acodada, ninguna giración. Es digno de mención el hecho de que la [166], que hemos obtenido por consideraciones puramente relativistas, fué deducida por MAX ABRAHAM basándose en las ecuaciones del campo de Maxwell. Por eso no extraña la coincidencia, dado que las ecuaciones de Maxwell se conservan sin cambio alguno en la física relativista.

La diferencia estriba únicamente en la interpretación de las mismas.

En la física prerrelativista, aquellas ecuaciones eran válidas sólo en el sistema del éter en reposo y, por tal circunstancia, la v que figura en [166] representaba la velocidad absoluta del condensador, o sea su velocidad con respecto al éter fijo. Debido a ello, en el año 1903, los físicos TROUTON y NOBLE se propusieron revelar el movimiento absoluto de la Tierra mediante un condensador cargado, suspendido de un hilo, constituyendo el todo una sensibilísima balanza de torsión. De acuerdo con la fórmula, el efecto sería máximo cuando el ángulo formado por la corriente de éter y las líneas de fuerza del condensador fuera igual a 45°. Por eso se iba girando la balanza para observar el efecto en distintas posiciones y... ya sabemos: el condensador permanecía impasible e inmóvil, mostrando de ese modo su fidelidad inquebrantable al principio de relatividad.

67. Transformación del trabajo mecánico y de la cantidad de calor. — Si en el sistema S′ la fuerza F′ desplaza su punto de aplicación, realizará un trabajo que, medido en dicho sistema, será

[167] $$A' = F'_x \cdot dx' + F'_y \cdot dy' + F'_z \cdot dz' .$$

Este mismo trabajo, medido desde un sistema S, respecto del cual el sistema S′ se desplaza con la velocidad v, en el sentido del eje de las x, será:

[168] $$A = F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

Teniendo en cuenta que

$$dx = dx' \cos\alpha \quad ; \quad dy = dy' \quad ; \quad dz = dz' \quad ;$$
$$F_x = F'_{x'} \quad ; \quad F_y = F'_{y'} \cos\alpha \quad ; \quad F_z = F'_{z'} \cos\alpha \quad ;$$

resulta, llevando estos valores a [168], que

[170] $$A = A' \cos\alpha.$$

El trabajo A′ puede convertirse en el sistema S′ en la cantidad de calor Q′ y dicho calor podrá medirse por el trabajo que se ha realizado para producirlo. Por lo tanto, como en el sistema S también se mide la cantidad de calor por el trabajo que se ha realizado, el calor Q medido desde S estará relacionado con el medido en el propio sistema S′ por la relación

[171] $$Q = Q' \cos\alpha.$$

Calor y trabajo experimentan, pues, la misma contracción que las reglas colocadas en el sentido del movimiento.

68. **Invariancia de la entropía.** — Las relaciones fundamentales de la termodinámica deberán seguir siendo válidas si se las refiere a determinado sistema inercial y en particular valdrá, para un tal sistema, el segundo principio de la termodinámica, según el cual la entropía de un sistema aislado debe aumentar siempre al ir evolucionando de un modo que debe ser, necesariamente, irreversible. Aun cuando a cualquier sistema (de cuerpos) le corresponde en un instante dado (de determinado sistema de coordenadas) un valor determinado de la entropía, nos limitaremos a considerar un sistema que esté en equilibrio, y si se trata de un cuerpo homogéneo supondremos que el mismo está sometido a una presión constante en todos sus puntos. De este modo, el estado del cuerpo quedará determinado, en un sistema dado de referencia, por cinco parámetros: las tres componentes de la velocidad y, por ejemplo, su volumen y su temperatura, pues nos limitaremos a considerar movimientos de traslación.

Si el sistema aislado pasa de un estado 1 a un estado 2 en forma reversible, la entropía total de todo el sistema se mantiene constante y esto, en virtud del principio de relatividad, debe ser válido para cualquier sistema inercial. Pensemos ahora que nuestro cuerpo se encuentra en reposo en el sistema inercial K, siendo entonces su entropía igual a S_1. Pongamos al cuerpo en movimiento y hagamos que alcance la velocidad v sin suministrarle calor (adiabáticamente) y sin que varíe la

presión. El cuerpo habrá experimentado, durante cierto tiempo, una aceleración hasta alcanzar la velocidad v. En este segundo estado, digamos que su entropía es S_2. El proceso de la aceleración del cuerpo, en las condiciones supuestas, es, sin duda, reversible: puede pensarse que se dispone de un disparador fijo al sistema K provisto de un resorte y podemos pensar también que el disparador queda fijo después de lanzar al cuerpo. Esto último lo lograríamos trabando el resorte, después del disparo, en una de sus posiciones extremas de oscilación. Si todo el sistema consiste en el disparador y el cuerpo y llamamos S_1^* y S_2^* a las entropías del disparador antes y después del lanzamiento, deberá tenerse, en virtud de la reversibilidad de todo el proceso:

[172] $$S_1^* + S_1 = S_2^* + S_2 .$$

Pero el disparador lo único que ha hecho es suministrar un trabajo mecánico, y, de acuerdo con la termodinámica clásica, que debe conservarse para cuerpos en reposo, su entropía, en ese caso, no varía. Se tiene, así:

[173] $$S_1^* = S_2^*$$

y, en consecuencia, de acuerdo con [172], será

[174] $$S_1 = S_2 .$$

Con esto, sabemos que la entropía del cuerpo referida al sistema inercial K no ha variado. Consideremos ahora un segundo sistema de referencia K′ que se mueva respecto de K con la misma velocidad v del cuerpo. Respecto de K′ el cuerpo está en reposo y se encuentra con relación a este sistema exactamente igual a como se encontraba el cuerpo en el estado 1 respecto del sistema K. Su entropía, referida a K′ será, entonces,

$$S' = S_1$$

y por [174],

$$S' = S_2$$

y, en general,

[175] $$S = S'$$

o sea que la entropía es un invariante, como lo demostró PLANCK por primera vez.

La demostración ha sido hecha para estados de equilibrio, pero es fácil ver que es válida en cualquier caso, pues si un sistema físico cualquiera tiene, en un instante dado del sistema K, y respecto de ese sistema, la entropía S, puede considerarse siempre otro sistema en equilibrio que, también respecto de K, tenga la misma entropía S. Al pasar ahora a un segundo sistema de referencia K′, será necesario que la entropía S′ de

ambos sistemas físicos (el que está y el que no está en equilibrio) sean iguales entre sí, cumpliéndose así la [175] en cualquier caso.

69. **Transformación de la temperatura.** — En el sistema de referencia K′ se tiene una fuente térmica en reposo a la temperatura absoluta T′. Esta temperatura T′ es la temperatura propia de la fuente, pues se supone medida desde el sistema donde la misma se encuentra en reposo. Tomemos un cuerpo cuya temperatura sea también T′ y poniéndolo en contacto con la fuente, hagamos que se dilate isotérmicamente en forma *reversible*. El cuerpo sacará de la fuente la cantidad de calor Q′ y su entropía aumentará en

[176] $$S' = \frac{Q'}{T'}$$

que es igual, por la reversibilidad supuesta, a lo que disminuye la entropía de la fuente.

Juzgando este proceso desde otro sistema K con respecto al cual el sistema K′ se mueve con la velocidad v, la entropía del cuerpo aumenta en

[177] $$S = \frac{Q}{T}.$$

Por la invariancia de la entropía, y de acuerdo con [171], se tiene:

[178] $$\frac{Q}{T} = \frac{Q'}{T'}\ ;\quad \frac{Q' \cos\alpha}{T} = \frac{Q'}{T'}$$

de donde

[179] $$T = T' \cos\alpha.$$

Esta notable relación nos indica que la temperatura se transforma igual que la cantidad de calor, "contrayéndose" con el movimiento o, para decirlo brevemente: *los cuerpos se enfrían a medida que aumenta su velocidad.* Esto está en relación, naturalmente, con la dilatación del tiempo: los relojes en movimiento marchan más despacio y las moléculas de los cuerpos, en consonancia con ellos, se agitan también más perezosamente. En el ejemplo de los párrafos 24 y 29, los jefes del tren y de la estación podrían haberse reprochado, recíprocamente, que tomaban la sopa demasiado fría, y en cuanto a los personajes aquellos que resultaban más jóvenes que sus nietos (§ 43), debe tenerse en cuenta que, si se habían conservado tan frescos, es porque durante casi todo el viaje su temperatura fué, de acuerdo con nuestras medidas, efectuadas desde la Tierra, de unos 240 grados centígrados bajo cero.

A. A. Michelson
(1852-1931).



H. Minkowski (1864-1909).

CAPÍTULO V

PRUEBAS EXPERIMENTALES DE LA TEORÍA RESTRINGIDA

70. **Composición de velocidades. Experimento de Fizeau.** — Además de los experimentos realizados con el objeto de revelar el movimiento absoluto de la Tierra "en el espacio" o "con respecto al éter", tales como el de Michelson (§ 14) y el de Trouton y Noble (§ 67), cuyo resultado negativo constituye ya una prueba experimental favorable a la teoría de la relatividad, otros experimentos, que se habían realizado mucho antes de la aparición de la teoría, y que se explicaban con dificultad o artificiosamente, resultaron ser, a la postre, pruebas concluyentes que, con el irrefutable lenguaje de los hechos, hablaban, en la forma más elocuente posible, a favor de la nueva concepción einsteiniana. Entre ellos y en primerísimo lugar, se encuentra el experimento llevado a cabo por FIZEAU en 1859 y repetido luego innumerables veces, hasta época reciente, por otros destacados físicos, introduciendo sólo pequeñas variaciones de carácter experimental.

Fizeau, con su experimento, se propuso determinar la velocidad de la luz en una corriente de agua para saber si el éter era o no arrastrado por la misma. En el seno del agua en reposo, la luz de índice de refracción n se propaga, de acuerdo con la teoría ondulatoria, y, como lo comprobó FOUCAULT experimentalmente por primera vez, con una velocidad igual a c/n, siendo c la velocidad de la luz en el vacío. Si el agua, en lugar de estar en reposo, se mueve en el interior de un tubo con velocidad q, ¿cuál será la velocidad resultante de la luz en el seno de ese medio móvil? De acuerdo con la regla de composición de velocidades de la mecánica clásica, parecería que dicha velocidad resultante W tendría que ser

$$[1] \qquad W = \frac{c}{n} \pm q \ ,$$

correspondiente el signo más al caso en que el rayo luminoso y la corriente tengan el mismo sentido, y el menos a cuando avanzan en sentido opuesto. Pero de acuerdo con las ideas de la época, la luz se propaga en el éter y cabían entonces dos posibilidades extremas:

1) El éter contenido entre las moléculas de agua es totalmente arrastrado por la misma, y en este caso, y únicamente en éste, vale la [1], pues si se piensa en observadores que se mueven junto con la corriente, para ellos todo ocurrirá como en el agua en reposo y, respecto de los mismos, la velocidad de propagación sería c/n, por lo cual la velocidad resultante, respecto de las paredes del tubo, se obtendría de la simple adición escrita más arriba.

2) A pesar del movimiento del agua, el éter permanece en reposo sin participar del movimiento de la misma. En este caso, el movimiento del agua no influiría para nada en el valor de la velocidad de la luz, que siempre sería igual a c/n.

Entre estas dos posiciones extremas cabía la posibilidad de un *arrastre parcial* del éter, o, lo que era lo mismo, de la luz, tal como lo había sugerido FRESNEL en 1818, de modo que, siendo k un coeficiente numérico mayor que cero y menor que uno, se tendría en lugar de [1]:

[2] $$W = \frac{c}{n} \pm kq.$$

Si $k = 0$, no hay arrastre, y si $k = 1$, el arrastre es total. A este coeficiente se le llamó coeficiente de arrastre de Fresnel, y el mismo Fresnel, basado en consideraciones que estudiaremos en el párrafo próximo, le atribuyó el valor

[3] $$k = 1 - \frac{1}{n^2},$$

siendo n el índice de refracción del medio móvil.

Fizeau se propuso, con su experimento, verificar esta hipótesis del arrastre parcial y utilizó para ello un método interferométrico que no difiere más que en detalles del utilizado con el mismo fin por MICHELSON y MORLEY en 1886, y que es el que describimos a continuación. Un rayo de luz R (fig. 86) incide en la placa de vidrio de caras paralelas y semiazogadas P, dividiéndose allí en otros dos rayos. De éstos, el que después de reflejarse en la placa incide en el espejo E_1 recorre el trayecto PE_1GHE_2PA, siendo G y H los puntos donde se refleja

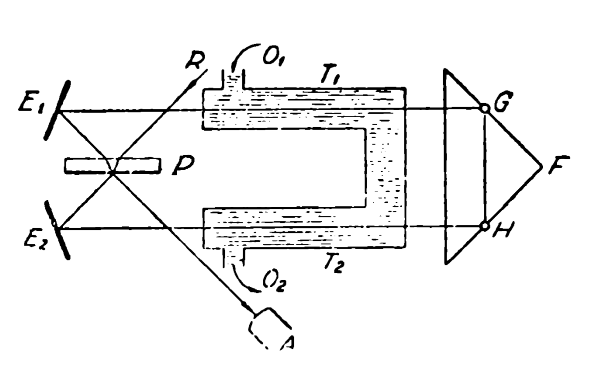


Fig. 86. — Experimento de Fizeau.

en el prisma de reflexión total F. El otro rayo sigue el camino PE_2HGE_1PA, llegando así ambas ondas al anteojo A, donde interfieren. Si por los tubos T_1 y T_2 se hace circular una corriente de agua que, como en la figura, entra por O_1 y sale por O_2, el primer rayo se propaga en los dos tubos en el sentido de la corriente, en tanto que el otro marcha en ambos con "corriente en contra".

El recorrido de ambos rayos en el aire es idéntico, de modo que interesa calcular el tiempo que invierten al recorrer la corriente de agua, propagándose los dos en el seno de la misma en sentido opuesto. Llamando L a la longitud total de los dos tubos, el tiempo t_1 que emplea el rayo que avanza en contra de la corriente es, de acuerdo con [2]:

$$[4] \qquad t_1 = \frac{L}{W_1} = \frac{L}{\dfrac{c}{n} - kq} ,$$

en tanto que el otro rayo empleará un tiempo menor t_2, dado por la expresión

$$[5] \qquad t_2 = \frac{L}{\dfrac{c}{n} + kq} .$$

La diferencia de estos tiempos es:

$$[6] \qquad \Delta t = \frac{2Lkq}{\dfrac{c^2}{n^2}\left(1 - \dfrac{k^2n^2q^2}{c^2}\right)} .$$

La diferencia de los caminos ópticos entre ambos rayos, o sea la ventaja que el rayo que marcha con corriente a favor saca al que avanza con corriente en contra, es $c \,.\, \Delta t$. Esta diferencia de camino entre los dos rayos permite calcular lo que deben correrse las franjas de interferencia, si se observa primero con el agua en reposo y después con el agua en movimiento.

Pero es más preciso observar el corrimiento de las franjas invirtiendo el sentido de la corriente de agua. En este caso, el corrimiento que debe esperarse de las franjas será, llamando λ a la longitud de onda de la luz empleada:

$$[7] \qquad N = \frac{2c \,.\, \Delta t}{\lambda} = \frac{4Ln^2}{\lambda c}\, q \,.\, k ,$$

despreciando los términos de grado superior al primero en q/c, pues q, la velocidad de la corriente de agua, es de sólo unos pocos metros por segundo.

En los experimentos de Fizeau, la longitud L era de 3,30 metros (cada tubo 1,65 m aproximadamente), y la velocidad

del agua, en los mismos, de unos 7 metros por segundo. De este modo, para λ igual a 5 900 angstrom (luz amarilla) si k fuera igual a 1, como $n = 4/3$, las franjas debían correrse en 0,93. Si se adopta para k el valor de Fresnel dado por la [3], el corrimiento a esperarse debía ser igual a 0,41, y el realmente observado fué de 0,46.

Como la determinación exacta de la velocidad del agua en la parte central de los tubos ofrece serias dificultades, la concordancia es plenamente satisfactoria, por lo cual se dió por probada la hipótesis de Fresnel del arrastre parcial del éter.

En los experimentos llevados a cabo por Michelson y Morley se obtuvo una concordancia mucho mejor, pues de acuerdo con los mismos, el coeficiente de arrastre k determinado experimentalmente, resultó igual a 0,434, en tanto que el calculado por la fórmula de Fresnel, da el valor 0,437.

Puede admitirse, entonces, que los experimentos dan, para el corrimiento de las franjas, el valor

$$[8] \qquad N = \frac{4Ln^2}{\lambda c} q \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Calculemos ahora este corrimiento aplicando el teorema de adición de velocidades de Einstein (§ 35, fórmula [4]). De acuerdo con el principio de relatividad, para observadores que se desplazan junto con la corriente, el agua está inmóvil y la velocidad de la luz en su seno, que ellos determinarían, sería c/n. En cambio, observadores del sistema respecto del cual están fijas las paredes de los tubos, encontrarían para la velocidad de la luz en la corriente de agua, los valores:

$$[9] \qquad W_1 = \frac{\frac{c}{n} - q}{1 - \frac{q}{nc}} \; ; \quad W_2 = \frac{\frac{c}{n} + q}{1 + \frac{q}{nc}} \; ;$$

que corresponden a los dos casos del experimento.

Con estos valores, la diferencia de tiempo Δt que emplean los dos rayos en efectuar el recorrido L resulta ser, en lugar de la [6], la siguiente:

$$[10] \qquad \Delta t = L \frac{2q\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}{\frac{c^2}{n^2}\left(1 - \frac{q^2 n^2}{c^2}\right)} ,$$

y de aquí, para el corrimiento de las franjas a esperarse, cuando se invierte el sentido de la corriente, limitándose a considerar los términos de primer grado en q/c, resulta de inmediato la [8].

Segunda aproximación. — H. A. LORENTZ, con su teoría electrónica, logra explicar también los resultados del experimento de Fizeau, sin necesidad de admitir que la materia arrastra al éter en su movimiento. En esta teoría el éter permanece fijo, a pesar de lo cual se obtiene con ella la [8] y puede demostrarse que todos los resultados de la teoría de la relatividad en que aparecen sólo potencias de primer grado en v/c (efectos de primer orden), coinciden con los que resultan de la teoría de Lorentz. En cambio, se presentan discrepancias en los efectos de segundo orden, términos en v^2/c^2, como es el caso del experimento de Michelson. La coincidencia entre ambas teorías proviene de la circunstancia de que, en la teoría de Lorentz, se utilizan las fórmulas de Maxwell-Lorentz que satisfacen, como hemos visto, al principio de relatividad.

Pero Lorentz no se limitó tan sólo a obtener la fórmula [8], sino que agregó a la misma un término correctivo (naturalmente también de primer grado en q/c), para tener en cuenta el poder dispersivo de la substancia en movimiento. Este término proviene del efecto Doppler, que hasta ahora no hemos tenido en cuenta.

Supongamos que la fuente de luz utilizada tenga una longitud de onda λ_0 medida por observadores respecto de los cuales aquella fuente está en reposo. Sea, además, n_0 el índice de refracción de la luz de la substancia utilizada en el experimento, correspondiente a λ_0 y cuando la substancia se encuentra en reposo respecto de la fuente. Si la substancia (el agua de los tubos) se acerca a la fuente de luz, o sea, si el rayo corre en sentido opuesto al de la corriente, la frecuencia de la luz que percibirían observadores móviles con la substancia, sería, por el efecto Doppler, algo mayor, y la longitud de onda λ_1 medida por ellos, menor que λ_0. A esta longitud de onda λ_1 corresponde un índice de refracción n_1 diferente de n_0. Si la substancia se aleja de la fuente, la longitud de onda λ_2 que percibirían los observadores móviles sería mayor, y a esta longitud de onda corresponderá otro índice de refracción n_2 (fig. 87). Según esto, las velocidades W_1 y W_2 de los rayos que marchan, respectivamente, en sentido opuesto o igual al de la corriente, serán, en lugar de [9]:

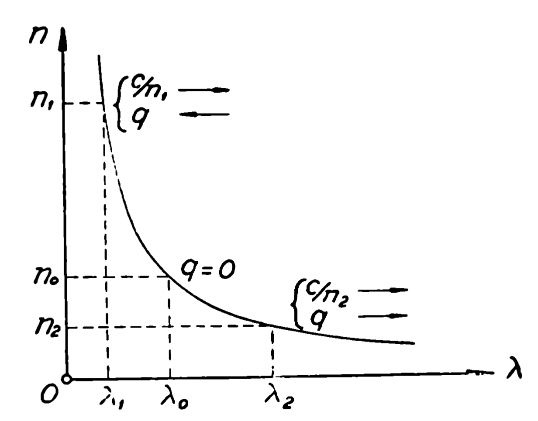


Fig. 87. — Sobre el término correctivo de Lorentz.

[11] $$W_1 = \frac{\frac{c}{n_1} - q}{1 - \frac{q}{n_1 c}} \; ; \quad W_2 = \frac{\frac{c}{n_2} + q}{1 + \frac{q}{n_2 c}} .$$

Si se calcula, utilizando estos valores, la diferencia de tiempo Δt que emplean los dos rayos en recorrer el trayecto L, se obtiene, en lugar de la [10]:

[12] $$\Delta t = \frac{L}{c} \frac{\frac{2q}{c}(n_1 n_2 - 1) + (n_1 - n_2)\left(1 + \frac{q^2}{c^2}\right)}{1 - \frac{q}{c}(n_1 - n_2) - n_1 n_2 \frac{q^2}{c^2}} .$$

Además, es:

[13] $$n = n_0 + \left(\frac{dn}{d\lambda}\right)_{n = n_0} . \Delta\lambda$$

y por el efecto Doppler,

[14] $$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{q}{c}$$

y para los dos casos considerados:

[15] $$\frac{\Delta\lambda_1}{\lambda_0} = - \frac{q}{c} \; ; \quad \frac{\Delta\lambda_2}{\lambda_0} = \frac{q}{c} .$$

Llevando estos valores a la [13], se obtiene:

[16] $$n_1 = n_0 - \lambda_0 \frac{q}{c} \frac{dn_0}{d\lambda} \; ;$$

[17] $$n_2 = n_0 + \lambda_0 \frac{q}{c} \frac{dn_0}{d\lambda} .$$

Por brevedad se ha indicado la derivada de n respecto de λ en el punto n_0 en esa forma. Obsérvese que, en general, en los medios dispersivos corrientes, dicha derivada es negativa, pues al aumentar λ disminuye el índice de refracción. De [16] y [17] se obtiene:

[18] $$n_1 - n_2 = - \frac{2q}{c} \lambda_0 \frac{dn_0}{d\lambda} ,$$

y despreciando términos de orden superior

[19] $$n_1 n_2 = n_0^2 .$$

Llevando estos valores a la [12] y limitándonos a considerar términos de primer grado en q/c, obtenemos:

[20] $$\Delta t = \frac{L}{c} . \frac{2q}{c} \left(n_0^2 - 1 - \lambda_0 \frac{dn_0}{d\lambda} \right) .$$

Para el corrimiento de las franjas, a esperarse cuando se invierta el sentido de la corriente, se tendrá:

$$[21] \quad N = \frac{2c \, . \, \Delta t}{\lambda_0} = \frac{4Ln_0^2}{\lambda_0 c} q \left(1 - \frac{1}{n_0^2} - \frac{\lambda_0}{n_0^2} \frac{dn_0}{d\lambda} \right) ,$$

en sustitución de la [8]. Al factor entre paréntesis se le llama "coeficiente de arrastre" de Lorentz, que es algo mayor (pues la derivada es negativa) que el coeficiente de arrastre de Fresnel.

P. ZEEMANN realizó una serie de experimentos de gran precisión entre los años 1914 y 1915, en que comprobó la [21]. Entre otros valores, obtuvo los siguientes:

λ_0 (Ångstrom)	k (experimental)	k (Fresnel)	k (Lorentz)
4500	0,465	0,443	0,464
4580	0,463	0,442	0,463
5461	0,451	0,439	0,454
6870	0,445	0,435	0,447

La fórmula [21] de Lorentz, que, como se ha visto, se obtiene directamente del teorema de adición de velocidades de la cinemática relativista, se ha comprobado también en cuerpos sólidos de mayor poder dispersivo que el agua.

Zeemann utilizó al efecto el dispositivo que esquemáticamente se indica en la figura 88. A la barra de vidrio V se le imprime un rápido movimiento de vaivén entre los puntos A

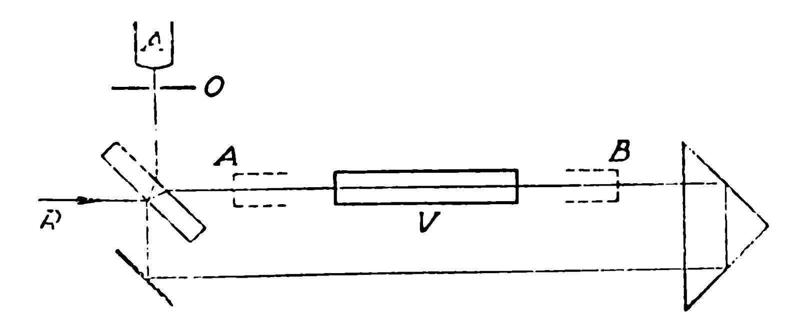


Fig. 88. — Experimento de Zeemann.

y B y se observa la interferencia de los rayos que marchan en el interior de la misma en sentido opuesto mediante el anteojo A, delante del cual se coloca un obturador O que, automáticamente, se abre cuando la barra pasa por la parte central de su

recorrido marchando en determinado sentido, por ejemplo, de A hacia B o de B hacia A. Comparando la posición de las franjas en ambos casos, se mide su corrimiento, dado, como ya dijimos, por la [21].

71. **Experimento de Boscovich-Airy.** — Unos cuarenta años después del descubrimiento de BRADLEY (§ 6), R. J. BOSCOVICH, en 1766, propuso medir el ángulo de aberración de la luz mediante un anteojo lleno de agua. Como de acuerdo con la teoría ondulatoria la luz se propaga en el agua con una velocidad menor que en el aire, el ángulo de aberración debería resultar, medido de ese modo, mayor que el que resulta de las medidas corrientes en que el anteojo está lleno de aire, pues si el rayo tarda más tiempo en ir del objetivo al ocular, la Tierra hará, entretanto, un recorrido mayor. Si, en cambio, fuera cierta la teoría de Newton, la luz se propagaría en el agua con velocidad mayor que en el aire y, en tal caso, el ángulo de aberración resultaría, al parecer, menor. Boscovich no llegó a realizar su experimento, con el cual pensaba que se podría decidir acerca de la validez de una u otra de las teorías entonces en boga.

Fresnel consideró teóricamente la idea de Boscovich y —sin realizar el experimento— creyó que el ángulo de aberración debía resultar siempre el mismo, cualquiera fuera la substancia que llenara el anteojo. Su creencia se apoyaba en ciertos experimentos realizados por ARAGO y según los cuales la luz proveniente de las estrellas se refleja y se refracta exactamente igual que la luz proveniente de fuentes terrestres. Partiendo, entonces, de la suposición de que el experimento daría un resultado negativo, se propuso obtener una explicación del mismo, buscando algo que compensara el mayor tiempo que emplea la luz en recorrer el anteojo cuando éste se llena de agua. Y ese algo compensador debía ser el arrastre que experimentaba el rayo de luz al viajar en el seno del agua en movimiento. Así surgió el famoso coeficiente de arrastre que mencionamos en el párrafo anterior. Para encontrar la expresión del mismo, consideremos el fenómeno con mayor detenimiento. La fig. 89 representa un vagón de tren dividido en dos compartimientos, y se supondrá que el de delante está totalmente lleno de agua u otra substancia de índice de refracción n, en tanto que el de detrás tiene sólo aire o, en rigor, está totalmente vacío. El vagón se desplaza con velocidad v (respecto del éter, estamos en el siglo pasado) y sobre el techo del mismo, que supondremos transparente, incide normalmente luz proveniente de una fuente lejana, tal como una estrella. El rayo de luz que penetra por el punto A, sigue, en el éter, el trayecto AB, que es su trayecto real, pero en el tiempo t que la luz tarda en

efectuar el recorrido AB, por el desplazamiento del vagón, el punto C del piso alcanza la posición B, de tal modo que AC es la trayectoria aparente del rayo en el interior del compartimiento posterior.

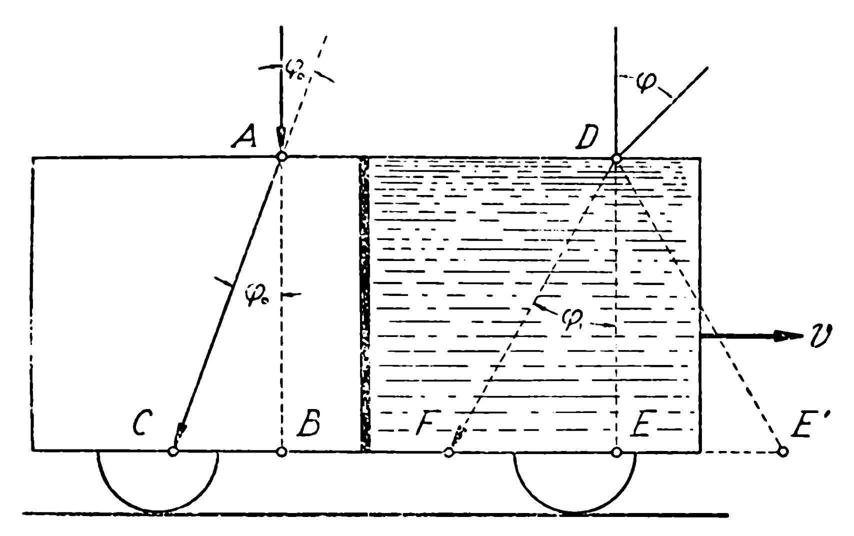


Fig. 89. — Sobre el experimento de Airy.

Se tiene, así:

[22] $$\operatorname{tg}\varphi_0 = \varphi_0 = \frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{AB}} = \frac{vt}{ct} = \frac{v}{c},$$

pues suponemos que v es pequeño con respecto a c. Obsérvese que la velocidad relativa, según el trayecto AC, se obtiene componiendo el vector c con el $-v$.

Consideremos ahora la luz que incide en un punto tal como el D del compartimiento de delante y comencemos por suponer que el éter no es arrastrado por el movimiento del agua. En este caso, la trayectoria real, en el éter inmóvil, seguirá siendo DE y la trayectoria aparente, en el interior del agua, será un camino tal como DF, de modo que si llamamos t' al tiempo que emplea la luz en recorrer el trayecto DE, se tendrá:

[23] $$\operatorname{tg}\varphi_1 = \varphi_1 = \frac{\mathrm{FE}}{\mathrm{DE}} = \frac{vt'}{\frac{c}{n}\,t'} = n\frac{v}{c} = n\varphi_0.$$

Pero si la luz, en el interior del agua del vagón, sigue un trayecto que forma con la normal a la superficie de entrada un ángulo φ_1, a ese rayo debe corresponder otro en el exterior, que forme con la misma normal un ángulo φ, tal que:

[24] $$\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\varphi_1} = \frac{\varphi}{\varphi_1} = n.$$

Al escribir esta relación, estamos haciendo uso de los resultados de los experimentos de Arago, y así obtenemos que el ángulo de aberración φ sería, de acuerdo con [24] y [23]:

[25] $$\varphi = n^2\varphi_0 .$$

Según esto, el valor de la constante de aberración, si el arrastre es nulo, medida con un anteojo lleno de agua, debería ser de unos 35″, puesto que la constante determinada con el anteojo lleno de aire, es, aproximadamente, igual a 20″.

Pero ¿qué pasaría si el éter contenido entre las moléculas del agua fuera totalmente arrastrado por ésta? En este caso y *respecto del éter exterior*, el rayo seguiría en el interior del vagón un trayecto tal como el que resultaría de la composición de las velocidades c/n y v. Durante el tiempo que tarda el rayo en atravesar el vagón, el punto E de éste alcanzaría la posición E′ y la trayectoria aparente, en el interior del vagón, sería DE. Por lo tanto, con un arrastre total, en que la trayectoria aparente resulta de componer los tres vectores c/n, v y $-v$, no se produce el fenómeno de la aberración de la luz, pues c/n tiene la misma dirección que c.

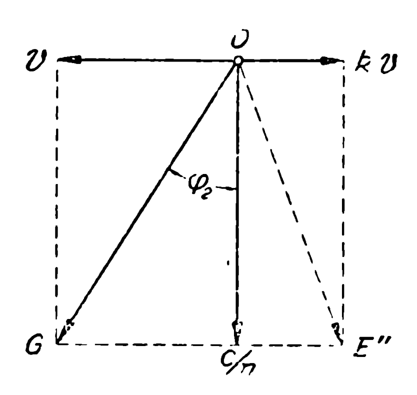


Fig. 90. — El arrastre parcial de Fresnel.

Consideremos ahora que el arrastre sea parcial e igual a kv, siendo k menor que uno. En tal caso (fig. 90), la trayectoria del rayo respecto del éter exterior tendría una dirección tal como OE″, que resulta de componer la velocidad c/n con kv. Pero respecto del vagón mismo la trayectoria se obtiene componiendo OE″ con $-v$, pues, respecto del vagón, todo se mueve con velocidad $-v$. El ángulo ω_2 valdrá, entonces,

[26] $$\operatorname{tg} \varphi_2 = \varphi_2 = \frac{v - kv}{c/n} = n \frac{v}{c}(1 - k).$$

Pero a este ángulo φ_2 corresponde, por la ley de refracción, que Fresnel sabía que debía cumplirse en todos los casos por los experimentos de Arago, un ángulo de incidencia Φ tal que

[27] $$\frac{\operatorname{sen} \Phi}{\operatorname{sen} \varphi_2} = \frac{\Phi}{\varphi_2} = n ,$$

y de aquí, teniendo en cuenta [26] y [22], obtenemos para el ángulo Φ de aberración:

[28] $$\Phi = n^2 \frac{v}{c}(1 - k) = n^2\varphi_0(1 - k).$$

Si postulamos ahora que este ángulo de aberración Φ, medido con el anteojo lleno de la substancia de índice de refracción n, debe ser igual al ángulo φ_0 que resulta midiendo con el anteojo vacío, deberá ser:

$$[29] \qquad n^2(1-k) = 1 \quad ; \quad k = 1 - \frac{1}{n^2} \quad ;$$

que es, precisamente, el valor del coeficiente de arrastre adoptado por Fresnel.

En el año 1871, G. B. AIRY llevó a cabo el experimento ideado por Boscovich y encontró que la constante de aberración medida con el anteojo lleno de agua, resultaba ser exactamente igual a la medida con el anteojo vacío. En otras palabras: si se supone que se tienen dos anteojos, el uno vacío y el otro lleno, los ejes de los mismos deben ser rigurosamente paralelos cuando apuntan a la misma estrella. Este resultado es precisamente el que cabe esperar de acuerdo con la teoría de la relatividad. Según ella, el vagón de la figura 88 se desplaza con velocidad v respecto de un sistema S que no goza de privilegio alguno. Respecto de S, la luz considerada se propaga perpendicularmente a la velocidad relativa v. Respecto del sistema S′, al sistema del vagón, la luz se propaga *realmente* formando un ángulo $\varphi_0 = \alpha$ con el plano normal a la velocidad relativa, siendo sen $\alpha = v/c$. El valor de este ángulo no puede depender de la naturaleza del instrumento que se emplee para medirlo, pues todo ocurre en el vagón como si estuviera en reposo. Por esta razón, el ángulo φ_1 que se observaría en el compartimiento de delante, lleno de agua, sería simplemente:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\varphi_1} = n$$

y de la observación de φ_1 obtendríamos el mismo valor de α.

En el caso de la aberración astronómica, el sistema inercial S es el sistema inercial constituído por el Sol y el conjunto de las estrellas fijas, y la velocidad v es la velocidad de traslación de la Tierra con respecto a ese sistema.

72. **Variación de la masa con la velocidad.** — La relación (IV [18]) se ha comprobado midiendo la carga específica e/m y la velocidad de los electrones emitidos espontáneamente por las substancias radiactivas, o artificialmente acelerados por diversos medios. En el método de J. J. THOMSON se mide la desviación que experimenta un haz de rayos catódicos en un campo eléctrico y en un campo magnético, y de esas medidas se puede conocer la masa de las partículas que constituyen esos rayos y su velocidad. Entre el ánodo A y el cátodo C de un

tubo de rayos catódicos (fig. 91), se establece cierta diferencia de potencial V que produce el campo eléctrico acelerador de los electrones que salen del cátodo. Cuanto mayor sea esta diferencia de potencial, mayor será también la velocidad de los

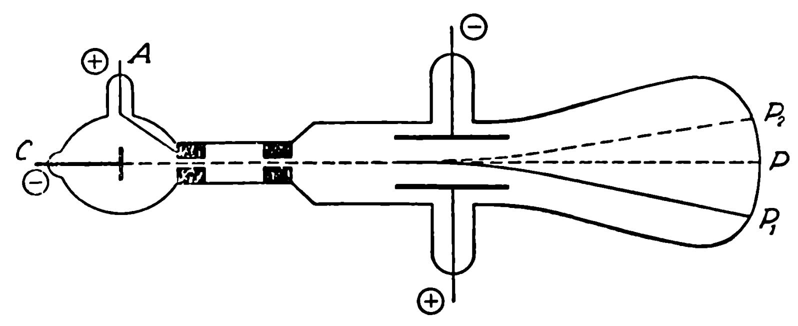


Fig. 91. — Dispositivo para estudiar la variación de la masa con la velocidad.

electrones que atraviesan los orificios del ánodo y se proyectan sobre le punto P de la pared anticatódica del tubo. Esta pared puede estar impregnada de una substancia fluorescente o estar constituída por una placa fotográfica que indicará el lugar de incidencia del haz de rayos. Si éstos pasan a través de las láminas de un condensador plano, entre las cuales actúa un campo eléctrico E, las partículas recorrerán en el interior del condensador, aproximadamente, un arco de parábola y seguirán luego en línea recta hasta incidir en un punto de la pantalla tal como el P_1. También pueden desviarse los rayos por la acción de un campo magnético y si éste es uniforme, en el interior del mismo las partículas recorren un arco de circunferencia cuyo radio puede determinarse conociendo las dimensiones del tubo. Para determinar la velocidad de las partículas, lo más sencillo, y experimentalmente lo más preciso, es hacer que el campo magnético y el eléctrico compensen sus desviaciones de modo que el haz de rayos siga incidiendo en el punto P. Supongamos que las líneas de fuerza del campo magnético H sean perpendiculares al plano del dibujo y dirigidas hacia adelante. En este caso, por la acción exclusiva del campo magnético, los rayos se desviarán hacia arriba e incidirán en un punto tal como el P_2, pues debe recordarse que las partículas de que se trata tienen carga negativa. Si se regula el valor de los campos eléctrico y magnético para que la desviación sea nula, ello indicará que las fuerzas actuantes sobre cada partícula, al atravesar esos campos cruzados y de igual extensión, son iguales y opuestas, por lo cual, de acuerdo con (IV, [137]), deberá ser:

$$[30] \qquad e\mathrm{E} = e\frac{v}{c}\mathrm{H} \quad ; \quad \frac{v}{c} = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{H}} .$$

Si se suprime ahora uno de los campos, se podrá determinar la masa de las partículas, teniendo en cuenta la desviación que experimentan. Si se suprime el campo eléctrico y se determina el radio R del arco de circunferencia que las partículas recorren en el interior del campo magnético, se tendrá:

$$[31] \qquad e\frac{v}{c}\mathrm{H} = \frac{mv^2}{\mathrm{R}} \quad ,$$

o sea que la fuerza centrípeta originada por la acción del campo magnético es igual a la fuerza centrífuga de las partículas. De [30] y [31] se obtiene:

$$[32] \qquad m = \frac{e}{c^2}\frac{\mathrm{H}^2}{\mathrm{E}}\mathrm{R}.$$

Se hacen sucesivas determinaciones variando el potencial acelerador V del tubo y se tiene, de esa manera, una serie de valores de m en correspondencia con los valores de v. Se observa que para valores de V inferiores a unos 2 000 voltios, la masa se mantiene prácticamente constante. Para una diferencia de potencial de unos 2 600 voltios, la masa aumenta en un 5 por mil, lo que está en el límite de los errores experimentales, necesitándose unos 10 000 voltios para que la masa de los electrones aumente en un 2 %. Si llamamos m_0 a la masa determinada utilizando potenciales bajos (masa en reposo), se tendrá:

$$[33] \qquad m_0 = \frac{e}{c^2}\frac{\mathrm{H}_0{}^2}{\mathrm{E}_0}\mathrm{R}_0 \quad ,$$

donde H_0, E_0 y R_0 son los valores de H, E y R, respectivamente, para cuando el potencial acelerador es pequeño. De [32] y [33] se obtiene:

$$[34] \qquad \frac{m}{m_0} = \frac{\mathrm{H}^2}{\mathrm{H}_0{}^2}\frac{\mathrm{E}_0}{\mathrm{E}}\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}_0}.$$

En el segundo miembro de esta expresión figuran sólo valores que se determinan experimentalmente y se encuentra así que, como corresponde a la predicción teórica, se cumple:

$$[35] \qquad \frac{m_0}{m} = \cos\alpha = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1-\frac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{H}^2}}.$$

Otro método sumamente ingenioso es el de BUCHERER (1909), en el cual se utilizan los rayos β emitidos por un preparado radiactivo que se coloca en la parte central P de un condensador plano, cuyas placas están muy próximas una de la otra (fig. 92). Sobre las paredes de un cilindro C, cuyo eje coincide con el eje del condensador, se coloca una película fotográfica y todo el aparato se encierra en el interior de un tubo, donde se

hace el vacío. Si no actúa campo alguno, en la parte central de la película queda impresa una línea que es tanto más fina cuanto más juntas se encuentren las placas. Si actúa un campo eléctrico, los electrones que salen del preparado radiactivo se desvían, y son capturados por la placa positiva del condensador, por lo cual no pueden llegar hasta la película.

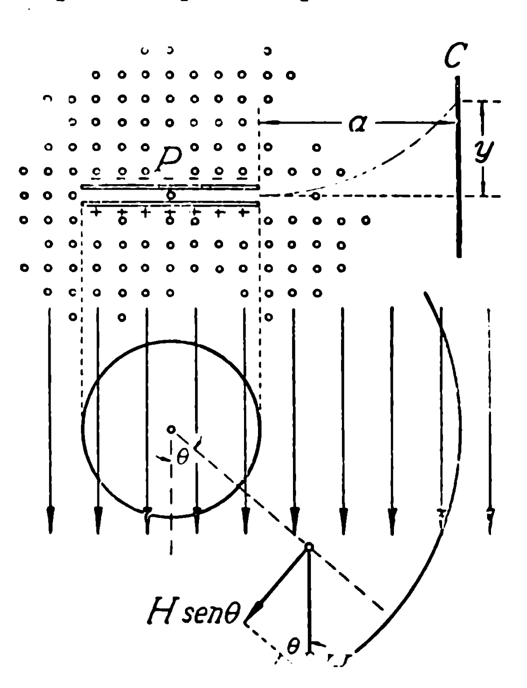


Fig. 92. — Método de Bücherer para estudiar la dependencia entre m y v.

Pero si además del campo eléctrico E, actúa un campo magnético H, cuyas líneas de fuerza son paralelas a los planos de las placas, y que en la parte superior del dibujo se han representado por puntos, considerándose que vienen hacia adelante, algunos electrones podrán escapar del interior del condensador. Se salvarán de ser atrapados aquellos para los cuales las fuerzas de ambos campos, sean iguales y opuestas, o sea:

[36] $$e \frac{v}{c} \mathrm{H} \operatorname{sen} \theta = \mathrm{E}e \quad ,$$

donde θ es el azimut de la dirección de escape, igual al ángulo que forma la velocidad de la partícula con las líneas de fuerza del campo magnético.

De este modo, a cada azimut θ corresponde una velocidad determinada:

[37] $$\frac{v}{c} = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{H} \operatorname{sen} \theta} \, .$$

Como el campo magnético actúa en todo el trayecto de la partícula, ésta incidirá en un punto de ordenada y, con respecto a la línea central (la impresa cuando no actúan los campos), de cuyo valor se puede deducir el radio R de la circunferencia descripta, pues es:

[38] $$(\mathrm{R} - y)^2 + a^2 = \mathrm{R}^2 \quad ; \quad \mathrm{R} = \frac{a^2 + y^2}{2y} \, .$$

Como, además, debe cumplirse

$$[39] \qquad e\frac{v}{c}\,\mathrm{H}\,\mathrm{sen}\,\theta = \frac{mv^2}{\mathrm{R}},$$

de [37] y [39], se obtiene:

$$[40] \qquad m = \frac{e}{c^2}\,\frac{\mathrm{H}^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}{\mathrm{E}}\,\mathrm{R}.$$

De este modo, a cada punto impreso de la película le corresponde un valor bien determinado de θ y R y, en consecuencia, se conocerá la velocidad v y la masa m de las partículas que han incidido allí, confirmándose también por este procedimiento la ley de dependencia entre la masa y la velocidad.

73. Comprobación de la fórmula de la energía cinética. — Al determinar la masa y la velocidad de un electrón que ha sido acelerado por un potencial V, conociendo este último se conoce la energía que el campo eléctrico suministró al electrón, energía que es igual al producto de la carga e por la diferencia de potencial V. Como esta energía se transforma en energía cinética, valdrá (IV, [32]):

$$[41] \qquad e\mathrm{V} = m_0c^2\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right),$$

o sea

$$[42] \qquad \mathrm{V} = \frac{m_0c^2}{e}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right),$$

y esta fórmula se ha verificado experimentalmente sin dejar lugar a duda alguna. Basándose precisamente en la fórmula anterior se acostumbra, en física atómica, medir la energía en "electrón-voltios", siendo un electrón-voltio igual al aumento de energía que experimenta un electrón al "caer" entre dos puntos de un campo eléctrico cuya diferencia de potencial es un voltio.

En la tabla de la página siguiente se dan diversos valores del potencial acelerador en voltios y los valores correspondientes de la velocidad del electrón, habiéndose tomado, a los efectos del cálculo, para las constantes que figuran en [42], los siguientes valores:

$m_0 = 9{,}107 \times 10^{-28}$ gramos

$e = 4{,}803 \times 10^{-10}$ (Sistema electroestático C. G. S.)

$c = 3 \times 10^{10}$ cm . seg^{-1}

y debe recordarse que la unidad electroestática C. G. S. de po-

tencial es igual a 300 voltios. En la tercera columna de la tabla se da el aumento relativo de la masa

$$\frac{m}{m_0} - 1 = \frac{m - m_0}{m_0} = \frac{\Delta m}{m_0},$$

que es proporcional a la energía y, por lo tanto, al potencial acelerador. En la cuarta columna se indican los valores del ángulo α de aberración, consignándose en la última la velocidad que se obtendría si se supusiera que la masa permanece constante y aceptando la fórmula prerrelativista de la energía cinética, con lo cual sería

[43] $$eV = \frac{1}{2} m_0 v^2.$$

V (Volt)	$\frac{v}{c} = \text{sen}\,\alpha$	$\frac{\Delta m}{m_0} = \frac{1}{\cos\alpha} - 1$	α °	′	″	$\frac{v}{c}$ (clásico)
0,2556	0,001	5×10^{-7}	0	3	26	0,001
1,0000	0,001978	$1{,}956 \times 10^{-6}$	0	6	48	0,001978
25,56	0,01	5×10^{-5}	0	34	23	0,010000
2581	0,1	$5{,}05 \times 10^{-3}$	5	44	30	0,1005
10540	0,2	0,0206	11	32	13	0,2031
24690	0,3	0,0483	17	27	30	0,3108
46570	0,4	0,0911	23	34	40	0,4269
79070	0,5	0,1547	30	0	0	0,5562
127800	0,6	0,2500	36	52	10	0,7071
204600	0,7	0,4003	44	25	40	0,8947
340800	0,8	0,6667	53	7	50	1,1547
511100	0,8660	1,0000	60	0	0	1,4141
661500	0,9	1,2942	64	9	30	1,6088
$10^6 = 1$ MeV	0,9410	1,956	70	13	37	1,978
10 „	0,9988	19,56	87	12	44	6,255
100 „	0,999987	195,6	89	42	31	19,78

De acuerdo con la [43], y como se ve en la tabla, para una energía de 10^6 electrón-voltio, igual a 1 MeV (megaelectronvolt), la velocidad del electrón tendría que ser casi igual al doble de la de la luz. La fórmula clásica [43] sólo puede aplicarse para potenciales relativamente pequeños, pues ya para 10 000 voltios se comete con ella un error de algo más del 1 %.

Si en lugar de tratarse de un electrón, la partícula que se acelera es un protón, un deuterón o cualquier otro ion "pesado", puede calcularse la velocidad de la misma utilizando la [43], aun tratándose de campos aceleradores del orden de los megavolt, pues ya la masa del protón es 1 840 veces mayor que la del electrón. Así, por ejemplo, un protón en un campo ace-

lerador de un megavolt adquiere, claro está, la energía de un megaelectronvolt, pero una velocidad que es igual a la que adquiriría un electrón en un campo 1 840 veces menor, o sea, en este caso, de 543 voltios.

En la tabla se llega hasta los 100 MeV, pues con el "betatrón" inventado en 1941 por D. W. KERST y construído en 1945 por la General Electric, se alcanza una energía equivalente a ese enorme valor del potencial. La longitud de onda de los rayos Roentgen generados por el choque de estos electrones es del orden de 0,12 X, siendo 1 X igual a 10^{-11} cm.

74. **La equivalencia masa-energía.** — A partir del año 1945, en que se hizo estallar la primera bomba atómica, anunciándose, así, en forma estruendosa y trágica, el nacimiento de una nueva era, la relación de Einstein (IV, [36] y § 53)

$$[44] \qquad \mathrm{E} = mc^2 \quad ,$$

ha pasado a enriquecer el acervo de los conocimientos populares. Pero la relación anterior ya había sido comprobada, en escala reducida, con bastante anterioridad a aquella fecha. Una de las primeras pruebas de la misma fué dada en 1932 por los físicos ingleses COCKROFT y WALTON, al estudiar los fenómenos que se producen cuando se bombardea un blanco constituído por algún elemento liviano, con protones dotados de alta velocidad. Así, por ejemplo, al hacer chocar un haz de protones de energía cinética igual a 250 000 electrón-voltios (velocidad = 7 000 km/seg) contra una delgada lámina de litio, se observó que, de tanto en tanto, se desprendían de la misma y en sentidos opuestos *, dos partículas alfa, siendo la energía de cada una de ellas muy superior a la de los protones incidentes. Estas partículas α podían efectuar en el aire un recorrido algo mayor de 8 centímetros y midiendo dicho recorrido, llamado alcance, es fácil deducir la energía cinética de las mismas. Se encontró de ese modo que cada una de las partículas α poseía una energía cinética igual a 8,6 megaelectronvolt, de donde resulta que su velocidad debía ser, al partir, de unos 20 000 kilómetros por segundo. Las partículas α emitidas en el proceso pueden detectarse de varios modos. Si se colocan dos pantallas P fluorescentes (fig. 93) a igual distancia

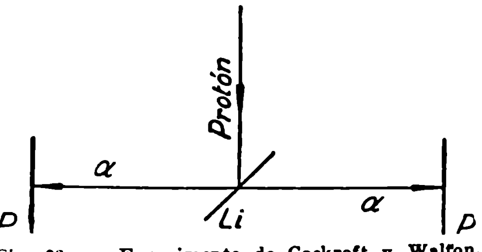


Fig. 93. — Experimento de Cockroft y Walton.

* En realidad, las trayectorias de las partículas alfa forman entre sí un ángulo de 175° y no de 180°, como podrá calcular el lector aplicando el principio de la conservación del impulso y utilizando los datos que se dan en el texto más adelante. La dirección del protón incidente es, naturalmente, bisectriz del ángulo de 175°.

del banco, se observa que, de tanto en tanto, se produce en ambas pantallas simultáneamente una chispita provocada por el choque de las partículas. En lugar de las pantallas pueden colocarse contadores Geiger y también pueden fotografiarse los rastros que dejan las partículas al pasar por la cámara de niebla de Wilson. Este fenómeno se interpreta admitiendo que el núcleo del isótopo del litio, de peso atómico 7 y carga eléctrica 3, absorbe al protón incidente, formándose un núcleo inestable de berilio de acuerdo con la ecuación

$$_3Li^7 + {}_1H^1 = {}_4Be^8.$$

Pero este núcleo de berilio estalla de inmediato, dando origen a dos partículas alfa:

$$_4Be^8 = {}_2He^4 + {}_2He^4.$$

De modo, pues, que lo observable sería:

$$_3Li^7 + {}_1H^1 = {}_2He^4 + {}_2He^4.$$

Trate el lector de imaginar un proceso semejante a éste en escala macroscópica: Una pequeña bolita de unos 100 gramos, a la velocidad de 7 m/seg, choca contra una bola en reposo 7 veces más pesada y, después del choque, vemos dos bolas iguales, de 400 gramos cada una, que marchan en sentidos opuestos con una velocidad de unos 20 m/seg. ¿Qué diríamos frente a un fenómeno de esa clase en que la energía cinética, después del choque, se hace 65 veces mayor? ¿De dónde sale esa energía cinética?

Hagamos un cuidadoso balance de las masas y de las energías que intervienen en el proceso y comencemos por las masas:

Antes del choque	masa en reposo del núcleo de Li	=	7,0180 — 3 m
	” ” ” ” protón	=	1,0081 — m
	Total	=	8,0261 — 4 m
Después del choque	masa en reposo de la partícula α	=	4,0039 — 2 m
	masa de 2 α	=	8,0078 — 4 m

Las masas se han expresado en *unidades físicas de masa atómica* (U M A). En esta unidad, el isótopo del oxígeno de peso atómico 16 tiene exactamente una masa atómica igual a 16. En cambio, la unidad química de masa atómica atribuye la masa 16 al oxígeno común, que es una mezcla de varios isótopos. De aquí que exista una pequeña diferencia entre los "pesos atómicos físicos" y los "pesos atómicos químicos". El peso atómico físico del átomo neutro del isótopo 7 del litio, determinado por el espectrógrafo de masas, es 7,0180, y como el litio neutro tiene 3 electrones planetarios, la masa del núcleo será

$$7{,}0180 - 3\ m$$

llamando m a la masa de un solo electrón. Del mismo modo, la masa de un protón es igual al peso atómico del hidrógeno, 1,0081, menos la masa de un electrón, y al peso atómico del helio neutro, 4,0039, habrá que descontarle 2 m para tener la masa del núcleo de helio que es la partícula alfa.

Se tiene, así, que la *masa desaparecida* en el proceso es:

$$\Delta m = 8{,}0261 - 4\text{ m} - (8{,}0078 - 4\text{ m}) =$$
$$= 8{,}0261 - 8{,}0078 = 0{,}0183\text{ UMA}.$$

Se ve que, aun cuando en estos procesos deben hacerse intervenir las masas de los núcleos y no las masas de los átomos neutros, pueden utilizarse estas últimas cuando se trata de hallar diferencias, pues las masas electrónicas se eliminan en esta operación.

El balance de la energía da:

Antes del choque	Energía cinética del protón	= 0,25 MeV
	Enérgica térmica del átomo del litio	= despreciable *
Después del choque	Energía cinética de las dos partículas α	= 8,6 × 2 = 17,2 MeV

De aquí, la *ganancia en energía* es:

$$\Delta E = 17{,}2 - 0{,}25 = 16{,}95\text{ MeV}.$$

Para ver si se verifica la relación de Einstein, comencemos por expresar en gramos la unidad de masa atómica. El número de Avogadro

$$N_A = 6{,}023 \times 10^{23}$$

da el número de átomos contenidos en un átomo-gramo. De modo, pues, que si se tuviera un elemento cuya masa atómica fuera exactamente igual a la unidad, en un gramo de esa substancia habrían N_A átomos, y la masa de cada uno de ellos seria:

$$1\text{ UMA} = \frac{1}{N_A} = 1{,}660 \times 10^{-24}\text{ gramos}.$$

Ésta es la masa en gramos que corresponde a la unidad física de masa atómica. Para encontrar su valor en ergios, multiplicamos por el cuadrado de la velocidad de la luz expresada en cm/seg y así obtenemos:

$$1\text{ UMA} = 1{,}660 \times 10^{-24} \times 9 \times 10^{20}\text{ erg} = 1{,}494 \times 10^{-3}\text{ erg}.$$

Para hallar la energía en electrón-voltios recordemos que un

---

* A la temperatura ambiente, la energía cinética media de los átomos es del orden de 0,04 electrón-voltios.

voltio es igual a 1/300 unidades electroestáticas C. G. S. de diferencia de potencial, por lo cual, teniendo en cuenta el valor de la carga del electrón, resulta:

$$1 \text{ electrón-Volt} = 4{,}803 \times 10^{-10} \times \frac{1}{300} = 1{,}601 \times 10^{-12} \text{ erg}$$

y de aquí

$$1 \text{ erg} = \frac{10^{12}}{1{,}601} \text{ eV} = 6{,}246 \times 10^{11} \text{ eV} = 6{,}246 \times 10^{6} \text{ Mev.}$$

Resulta, así:

$$1 \text{ UMA} = 1{,}494 \times 10^{-3} \times 6{,}246 \times 10^{5} = 933 \text{ MeV.}$$

Por lo tanto, la energía que se libera en el proceso que estamos estudiando, calculada de acuerdo con la relación de Einstein, a partir de la masa desaparecida, es

$$\Delta E \text{ (calculada)} = 0{,}0183 \times 933 = 17{,}07 \text{ MeV},$$

en tanto que la observada, según vimos, era:

$$\Delta E \text{ (observada)} = 16{,}95 \text{ MeV.}$$

La concordancia es, por cierto, bien satisfactoria.

Hoy día se conocen innumerables reacciones nucleares exoenergéticas y endoenergéticas en las que se ha verificado, sin dejar lugar a duda alguna, la conversión de masa en energía o inversamente, siempre de acuerdo con la fórmula de Einstein. Agregamos a continuación un cuadro donde se relacionan entre sí diversas unidades de masa y energía:

	gramos	g-calorías	ergios	UMA	MeV
1 gramo	1	$2{,}150 \times 10^{13}$	$9{,}000 \times 10^{20}$	$6{,}023 \times 10^{23}$	$5{,}621 \times 10^{26}$
1 g-caloría	$4{,}651 \times 10^{-14}$	1	$4{,}186 \times 10^{7}$	$2{,}801 \times 10^{10}$	$2{,}615 \times 10^{13}$
1 ergio	$1{,}111 \times 10^{-21}$	$2{,}389 \times 10^{-8}$	1	669,2	$6{,}246 \times 10^{5}$
1 UMA	$1{,}660 \times 10^{-24}$	$3{,}570 \times 10^{-11}$	$1{,}494 \times 10^{-3}$	1	933
1 MeV	$1{,}779 \times 10^{-27}$	$3{,}824 \times 10^{-14}$	$1{,}601 \times 10^{-6}$	$1{,}072 \times 10^{-3}$	1

Segunda parte

TEORÍA GENERAL DE LA RELATIVIDAD

CAPÍTULO VI

POSIBILIDAD DE GENERALIZAR LA TEORÍA RESTRINGIDA

75. El espacio vacío y los movimientos acelerados. — La teoría restringida de la relatividad se refiere a sistemas inerciales que se trasladan unos respecto de los otros con movimiento rectilíneo y uniforme. Todos esos sistemas son equivalentes entre sí, por lo cual los observadores pertenecientes a cualquiera de ellos pueden suponerse en reposo desde el momento que ningún experimento interno permite apreciar diferencia alguna entre uno y otro. No tiene, pues, sentido hablar del movimiento absoluto o movimiento en el espacio de un tal sistema y, por este motivo, el concepto del éter —como substancia que llena totalmente el espacio— deja de tener sentido físico, ya que ni siquiera puede hablarse con propiedad del movimiento con respecto a ese ente. Al perder el éter toda realidad física, se comprende perfectamente que no tenga sentido hablar de un movimiento con respecto a la nada, y se comprende así la *necesidad* de que sea válido el principio de relatividad. Pero lo que no se comprende es que este principio valga únicamente para sistemas que se muevan en línea recta y con movimiento uniforme. Y efectivamente, parece ser que, aun cuando no tenga sentido hablar de un movimiento rectilíneo y uniforme *en el espacio,* tendría, en cambio, un significado bien preciso, hablar de una rotación o de un movimiento acelerado en ese mismo espacio que concebimos —de acuerdo con la teoría restringida— como del todo vacío. Los observadores del interior de un sistema no pueden determinar su velocidad con respecto a ese espacio vacío; mejor dicho, no tiene sentido hablar siquiera de dicha velocidad y, en cambio, pueden —y esto es lo asombroso— determinar la *aceleración absoluta* de su sistema. El espacio absoluto de la mecánica newtoniana tendría que ser descartado como un ente metafísico en tanto nos refiramos a movimientos rectilíneos y uniformes, pero en cambio debe considerársele como a algo físicamente real si nos referimos a movimientos acelerados. Si un automóvil marcha con movimiento uniforme y rectilíneo, todo ocurre en el interior del mismo como en las casas situadas a la vera del camino, pero si se aplican los frenos al vehículo, o el mismo describe una curva, son los pasa-

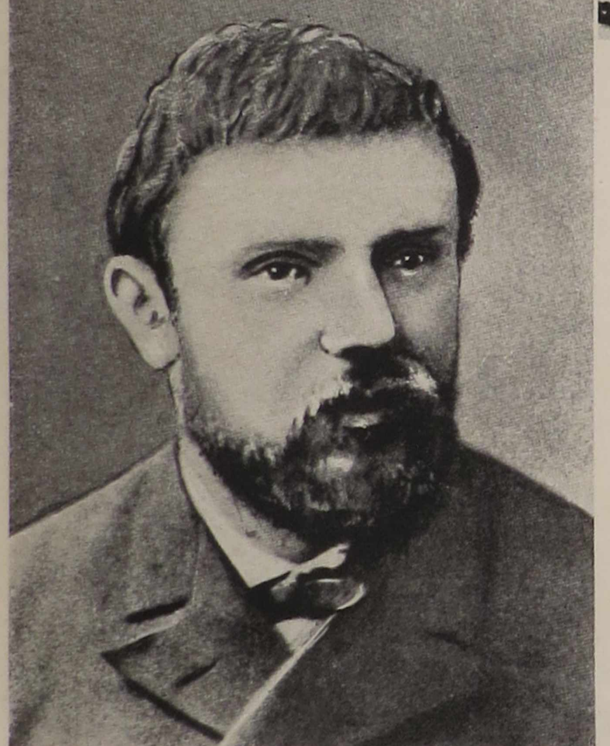
jeros de su interior los que experimentan los efectos de la aceleración, mientras que los habitantes de las casas no notan absolutamente nada. Ya Newton se sintió intrigado por este problema y efectuó su célebre experimento del balde. Consiste el mismo en un balde que contiene algo de agua, suspendido por una cuerda que se retuerce de modo que, al desenrollarse, el recipiente adquiere un movimiento de rotación. Al comienzo las paredes del balde giran con bastante velocidad y la superficie del agua sigue siendo casi plana, como en el reposo, pero poco a poco, debido a la fricción, el agua es arrastrada y al girar, su superficie se convierte en un paraboloide de revolución. Si en un momento dado se toma el balde con las manos y se lo frena, el agua sigue, durante cierto tiempo, mostrando la concavidad de su superficie y esto prueba que la fuerza centrífuga se origina por la rotación del agua, no con respecto a las paredes del balde, sino a la rotación de la misma *en el espacio.*

Si la concavidad del agua proviniera del movimiento relativo entre la misma y las paredes del balde, tendría que observarse dicha concavidad cuando el balde girara respecto del agua (o el agua respecto del balde), y lo que se observa es justamente lo contrario. Por eso Newton introduce el espacio absoluto, respecto del cual, por el principio de relatividad que también vale en la mecánica clásica, no es revelable la velocidad, la derivada primera del espacio respecto del tiempo, pero sí lo sería, en cambio, la derivada segunda de ese mismo espacio con respecto a ese mismo tiempo. Resulta, así, que la velocidad respecto de *eso* que Newton llama espacio absoluto, no es revelable, pero lo es el *cambio de velocidad.*

ERNESTO MACH (1838-1916) hizo resaltar este aspecto incomprensible de la mecánica newtoniana, indicando que lo único observable son siempre movimientos relativos de cuerpos materiales. El agua del balde del experimento de Newton cuya concavidad observamos, gira con respecto a las paredes de la habitación y del conjunto de las estrellas fijas. Con el experimento de Foucault se revela la rotación de la Tierra con respecto a esas mismas estrellas, pero no con respecto al espacio, y puede interpretarse dicho experimento suponiendo que son las masas de las estrellas las que arrastran consigo el plano de oscilación del péndulo. Según esto, de acuerdo con las ideas de Mach, la inercia de los cuerpos estaría producida por una especie de efecto gravitatorio del conjunto de todas las masas del universo. En otros términos: si imaginamos un espacio totalmente vacío y desprovisto en absoluto de materia, un cuerpo colocado en ese espacio carecería por completo de inercia. De modo que, según Mach, en lo que respecta al experimento de Newton, la *causa* que produce la concavidad del agua es el mo-



E. Mach (1838-1916).



H. Poincaré (1854-1912).

vimiento relativo de rotación de la misma con respecto al conjunto de todas las masas del universo. Según esto, si se hiciera girar rápidamente alrededor de un vaso de agua un enorme cilindro de espesas paredes (fig. 94), debería observarse que la superficie del agua se vuelve cóncava. Claro está que para llevar a cabo con éxito un experimento de esta clase tendría que disponerse de masas en rotación cuyo valor no fuera enteramente despreciable comparado con la masa total del universo entero*. Pero lo importante de la interpretación de Mach es que se hace aparecer en ella, como causa de fenómenos observables (fuerzas de inercia), otros fenómenos también observables (movimientos relativos) y no "un movimiento en el espacio" totalmente inobservable.

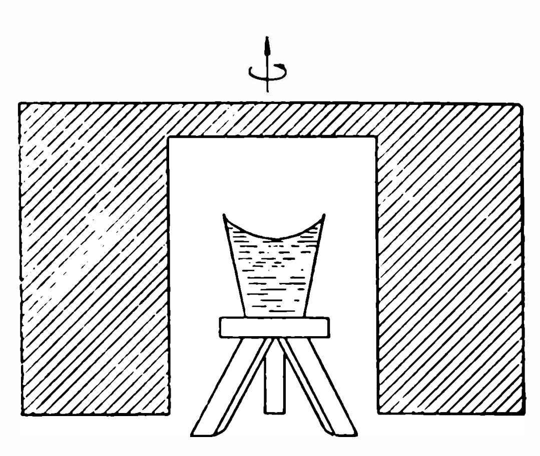


Fig. 94. — "Experimento de Mach".

76. Principio de equivalencia. — Consideremos una región galileana (§ 2) y en ella un sistema inercial K. Pensemos ahora en otro sistema K′ que se traslada respecto de K con movimiento acelerado y en línea recta.

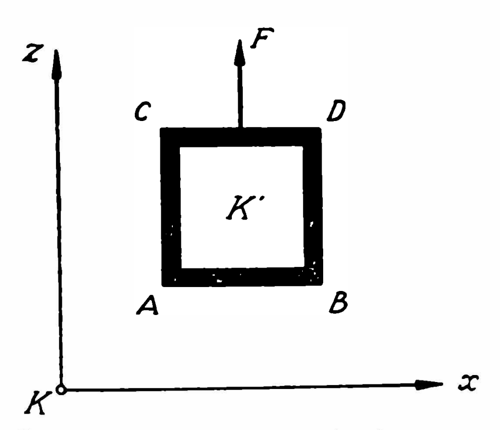


Fig. 95. — La caja de Einstein al moverse aceleradamente, produce en su interior efectos idénticos a los de un campo gravitatorio.

El sistema K′ no es, naturalmente, un sistema inercial. Para hacer más físico el ejemplo, piénsese que K′ (fig. 95) está constituído por una caja sobre la cual actúa una fuerza F en el sentido del eje Z, que hace que aquélla, llamada *ascensor de Einstein,* se mueva con movimiento uniformemente acelerado respecto de K.

---

* Un experimento de esta clase, empleando una balanza de torsión en lugar de un vaso de agua, y como cuerpo giratorio el volante de una gran máquina, fué llevado a cabo por los hermanos L. y J. Friedländer en 1894, pero el efecto de Mach no pudo revelarse, debido, sin duda, a la pequeñez de la masa puesta en rotación.

Nos supondremos ahora en el interior de la caja, provistos de resortes, balanzas, péndulos, etcétera, y dispuestos a efectuar una serie de sencillos experimentos. Lo primero que hacemos es soltar un cuerpo y vemos que, en lugar de permanecer en reposo en el lugar en que lo soltamos, se mueve con movimiento acelerado "hacia abajo", si convenimos en llamar abajo a la parte AB de la caja. Este cuerpo que se mueve verticalmente y hacia abajo respecto de las paredes del ascensor puede estar, en cambio, en reposo respecto del sistema K. Si lanzamos el cuerpo con cierta velocidad inicial, vemos que recorre una parábola respecto de K′ y una línea recta respecto de K. La aceleración de caída de los cuerpos observada en el interior de K′ es igual y de sentido opuesto a la aceleración de K′ con respecto a K. Por esta razón, *todos los cuerpos* —cualquiera sea su naturaleza y su masa— caen dentro de la caja con la misma aceleración. Si llamamos a a esta aceleración de caída igual y constante para todos los cuerpos —aplicando la mecánica newtoniana para no complicar las cosas desde el comienzo *—, un cuerpo de masa m se comportará como si tuviera un peso igual a ma. Tal como estamos considerando las cosas este peso es una *fuerza de inercia* y la masa m es la masa inerte del cuerpo considerado.

Comparemos ahora lo que pasa en el interior de nuestra caja con lo que ocurre en una pequeña región de un campo gravitatorio genuino o auténtico, tal como el que observamos en un lugar cualquiera de la superficie de la Tierra. También en este caso todos los cuerpos caen con la misma aceleración g y el peso de un cuerpo es igual también a su masa inerte m por la aceleración de caída g. De modo, pues, que en el interior del ascensor, todo ocurre como en una pequeña región de un campo gravitatorio auténtico, y es posible describir los fenómenos observados de dos maneras diferentes:

1) Nuestro sistema K′ (nuestra caja) se mueve respecto de un sistema inercial con la aceleración constante a. Por eso todos los cuerpos caen con la misma aceleración a, que es la aceleración de conjunto de toda la caja.

Sobre esta cuerda que vemos en la parte exterior del techo se aplica la fuerza que comunica a nuestro sistema la aceleración constante a.

2) Nuestro sistema K′ (nuestra caja) se encuentra en reposo en un campo gravitatorio constante. La cuerda que vemos atada en la parte exterior del techo de nuestra caja sirve para sostenerla y mantenerla suspendida en el campo gravitatorio.

Pero al considerar las cosas de este modo, la igualdad de la

* En la memoria de Einstein publicada en 1911 y titulada *Sobre la influencia de la gravitación en la propagación de la luz*, se aplica también al sistema K′ la mecánica newtoniana "para no complicar las cosas".

aceleración de caída de todos los cuerpos, cualquiera sea su naturaleza, se presenta como algo extraño, por lo cual trataremos este asunto con cierto detenimiento. El peso que manifiestan los cuerpos en el interior de la caja proviene entonces de la acción de ese campo gravitatorio G y es proporcional a la masa pesante M_P del cuerpo que se considera. La masa pesante de un cuerpo mide la propiedad del mismo de ser atraído por el campo. De modo, pues, que el peso P será:

Peso = P = $M_P \times G$ = masa pesante × intensidad de campo.

Este peso puede medirse por el estiramiento que el cuerpo produce al actuar sobre un resorte. Si el cuerpo se suelta, cae por la acción del campo y la aceleración de caída la obtenemos, de acuerdo con la segunda ley del movimiento de Newton, dividiendo la fuerza que actúa sobre el cuerpo por la masa inerte del mismo M_i. Esta masa inerte mide la resistencia que ofrece el cuerpo al cambio de movimiento. Se tiene, así, para la aceleración a de caída de determinado cuerpo en un campo gravitatorio de intensidad igual a G:

[1] $$a = \frac{M_P \times G}{M_i}.$$

Según esto, cabría esperar que la aceleración de caída fuera diferente de uno a otro cuerpo, de acuerdo con el valor del cociente de las masas pesante e inerte del mismo. Si en un campo eléctrico E se introducen pequeñas esferas de masas m_1, m_2, etcétera, con cargas eléctricas e_1, e_2, etcétera, las aceleraciones de caída en el campo son:

$$a_1 = \frac{e_1 E}{m_1} \; ; \quad a_2 = \frac{e_2 E}{m_2} \; ; \quad \ldots$$

y estas aceleraciones son, en general, diferentes entre sí, pues no existe ninguna proporcionalidad entre las cargas eléctricas y las masas de las esferas. En un campo gravitatorio, en cambio, se observa que existe rigurosa proporcionalidad entre las masas pesantes y las masas inertes. Otro cuerpo de masa pesante M'_P y masa inerte M'_i cae con una aceleración $a' = a$, por lo cual

[2] $$\frac{M_P}{M_i} = \frac{M'_P}{M'_i}.$$

Esta proporcionalidad surge de la primera ley de la caída enunciada por Galileo, y fué comprobada experimentalmente por Newton haciendo oscilar un péndulo hueco que llenaba sucesivamente con substancias diversas. Encontró que el tiempo de oscilación no dependía de la naturaleza de la substancia con que lo llenaba, por lo cual hubo de concluir que, *como resultado experimental*, debe admitirse que en todas las substancias, la

propiedad de las mismas de ser atraídas (masa pesante) es proporcional a la resistencia que ofrecen al cambio de movimiento (masa inerte). A principios del siglo pasado, BESSEL repitió los experimentos de Newton tomando toda clase de precauciones y llegó a la conclusión de que no era posible apreciar diferencia alguna entre los cocientes M_P/M_i de diferentes substancias, aun cuando hubiera podido revelarse, en caso de existir, una diferencia relativa del orden de $1{,}7 \times 10^{-5}$. Esto significa que si llamamos g a la aceleración de la gravedad determinada con la esfera pendular llena de determinada substancia (digamos mercurio), y g' a la aceleración que se encuentra cuando se llena la misma esfera con otra substancia cualquiera (digamos agua), se encuentra

$$\frac{g - g'}{g} < 1{,}7 \times 10^{-5} ,$$

y de acuerdo con la [1]

$$\frac{M_P/M_i - M'_P/M'_i}{M_P/M_i} < 1{,}7 \times 10^{-5} ,$$

por lo cual debe admitirse la validez de la [2]. En época más reciente y utilizando la balanza de torsión, R. VON EÖTVÖS (1890) llegó a la conclusión de que aquella diferencia relativa, en caso de existir, tendría que ser menor que 5×10^{-8}, y a un resultado análogo a éste llegó P. ZEEMANN (1917), experimentando con las substancias más diversas, algunas de ellas radiactivas, y también con cristales orientados de diferente modo.

En la mecánica newtoniana se presenta sin explicación esta rigurosa proporcionalidad entre las masas pesantes e inertes de todos los cuerpos y debe ser admitida simplemente como resultado experimental. En la ley de gravitación de Newton se utiliza esa proporcionalidad al estipular que la fuerza de atracción es proporcional a las *masas inertes* de los cuerpos en presencia. Si una esfera de masa M (la Tierra) atrae a un cuerpo de masa pesante M_P situado a la distancia R (radio de la Tierra), con la fuerza

$$F = k \frac{MM_P}{R^2}$$

la aceleración de caída g la hallamos dividiendo el valor de esta fuerza, que es el peso del cuerpo, por la masa inerte M_i del mismo y así se obtiene

$$g = \frac{F}{M_i} = \frac{kM}{R^2} \frac{M_P}{M_i} ,$$

que se convierte en una constante si se hace $M_P = M_i = m$.

El hecho de que exista rigurosa proporcionalidad entre las

masas pesantes e inertes de todos los cuerpos, permite establecer una equivalencia entre una pequeña región de un campo gravitatorio y un sistema que se mueve con movimiento uniformemente acelerado respecto de un sistema inercial. El principio de equivalencia de Einstein puede, entonces, ser enunciado del modo siguiente:

Una pequeña región Q *de un campo gravitatorio, donde los cuerpos caen con la aceleración* g, *es equivalente a un sistema* K′ *que se mueve con movimiento uniformemente acelerado y aceleración* g *respecto de un sistema inercial* K.

Llamaremos a este enunciado PRIMER ENUNCIADO del principio de equivalencia, para distinguirlo del segundo enunciado, del cual nos ocuparemos más adelante. El primer enunciado corresponde al trabajo de Einstein de 1911 que mencionamos líneas más arriba, y allí, la palabra equivalencia tiene el sentido de *comportamiento idéntico* entre la región Q y el sistema K′.

La necesidad de referirse a una *pequeña región* de un campo gravitatorio se comprende de inmediato. Si la región considerada tuviera cierta extensión, las verticales de los distintos puntos formarían entre sí cierto ángulo y tampoco podría hablarse de un único valor de g para toda la región.

No sólo es posible crear un campo gravitatorio por el movimiento acelerado de un sistema respecto de otro sistema inercial, sino que también puede anularse un campo gravitatorio auténtico —en una pequeña región— si se hace mover de modo adecuado el sistema de referencia. Si dejamos caer nuestra caja libremente en un campo gravitatorio, en el interior de la misma no se percibiría ninguna acción gravitatoria. Cuando JULIO VERNE describe su viaje a la Luna, supone que los efectos gravitatorios desaparecen al pasar el enorme proyectil, que contiene a los pasajeros, por una región en que la atracción terrestre es igual y opuesta a la lunar. Pero lo que en realidad ocurre es que, apenas la bala sale del cañón, los efectos gravitatorios en el interior de la misma son totalmente nulos, y esto durante todo el viaje, mientras aquélla va cayendo libremente en el campo generado por la Tierra, el Sol y la Luna. Si se cortan las cuerdas que sostienen a un ascensor cuando se encuentra en el último piso de un rascacielos, durante todo el tiempo que dure la caída, los pasajeros del interior del mismo se encontrarían en una región galileana donde el campo gravitatorio sería totalmente nulo. Respecto de un sistema de coordenadas fijo al ascensor en caída libre y cuyo origen se encuentre en un punto del interior del mismo, los cuerpos situados en las proximidades de dicho origen (es indiferente que estén dentro o fuera del ascensor) y que se encuentren totalmente libres, estarán en reposo o se moverán en línea recta y con movimiento uniforme. Pero este sistema de coordenadas no es en su totalidad un sis-

tema inercial, pues si bien la aceleración de caída, para los cuerpos situados *cerca* del origen, es cero, la aceleración observada para los cuerpos que caen en la región de los antípodas, por ejemplo, sería igual a $2g$.

Cuando en la relatividad restringida hablamos de un cuerpo que se mueve, con respecto a cierto sistema, con velocidad igual a v, podemos cambiar de sistema de referencia y hacer que con respecto al nuevo sistema el cuerpo se encuentre en reposo. Físicamente esto implica pasar, por ejemplo, del sistema de la vía al sistema del tren, y este pasaje se traduce, en el Universo de Minkowski, a un cambio en el sistema de coordenadas. Si nos referimos ahora a una pequeña región de un campo gravitatorio, será posible cambiar el sistema de referencia —esto es, el sistema de coordenadas—, de modo tal que en el nuevo sistema el campo, en dicha región, sea nulo. Pero obsérvese que, en general, no será posible anular la totalidad de un campo gravitatorio por un simple cambio del sistema de referencia, o expresándonos geométricamente, por un simple cambio de coordenadas.

Cuando se habla de los observadores situados en el interior de un ascensor que cae libremente y que hacen tales y cuales experimentos durante la caída, por más esfuerzos de abstracción que hagamos, no podemos dejar de pensar en el triste fin que les espera a aquellos esforzados físicos cuando la caja se estrelle contra el suelo firme. Por más que se trate de un experimento ideal, psicológicamente molesta el hecho de que se disponga de tan poco tiempo para efectuar los experimentos destinados a mostrarnos cómo aparecerían las cosas en una región galileana. Por esta razón, será mejor que el lector se considere a sí mismo instalado cómoda y confortablemente en una casa hecha expresamente para él y ubicada sobre la superficie de un insignificante planetoide *. Si lo prefiere, puede suponerse que ha sido nombrado jefe de alguno de los muchos satélites artificiales de la Tierra que algunos piensan que se pondrán a rodar dentro de poco. En uno y otro caso se habrá liberado por completo del peso de las cadenas gravitatorias. No necesitará de sillas ni de almohadones y podría dormir cómodamente flotando en el centro de su habitación. Le bastaría

* Si se supone un planetoide esférico de 1 km de radio y de densidad media igual a la de la Tierra, en él la aceleración de la gravedad sería de 0,154 cm/seg^2, y una persona, cuya masa fuera de unos 65 kilogramos, pesaría allí sólo unos 10 gramos-peso. En una habitación herméticamente cerrada y con aire a la presión atmosférica, un suave movimiento de las manos bastaría para evitar la caída y utilizando pantallas a modo de remos, o de alas, podríamos volar con sorprendente facilidad y sin esforzarnos mayormente. Si nuestro planetoide tuviera un movimiento de rotación, podríamos inclusive hasta tener en él un peso negativo en su ecuador y positivo en sus polos. En el planetoide de nuestro ejemplo la velocidad parabólica o de escape sería menor de 2 m/seg y sólo estando bajo techo podríamos vivir tranquilos. En el exterior, el más insignificante saltito haría que nos alejáramos sin remedio de nuestra morada, pues nuestro cuerpo se convertiría de ese modo en un planetoide más, que giraría en torno del Sol en su órbita propia.

ejercer una simple presión sobre una de las paredes para llegar rectamente volando hacia el extremo opuesto y, si por una circunstancia cualquiera, quedara en reposo en un lugar desde donde no pudiera alcanzar ni con las manos ni con los pies ningún objeto fijo a las paredes, sólo podría zafarse de esa desesperante inmovilidad, quitándose, por ejemplo, los pantalones y arrojándolos con fuerza hacia cualquier parte. Con los líquidos tendría dificultades especiales, pues necesitaría bombas a presión para sacar el agua de las botellas y no podría tomar baños de inmersión, pues un montón de agua, debido a la tensión superficial, adoptaría la forma de una esfera perfecta.

Esperamos que el lector se haya solazado con estos ejemplos, pero no nos quedaríamos satisfechos si sólo hubiéramos logrado divertirlo. Cuando SAGREDO, el amigo íntimo de Galileo y personaje de sus inmortales diálogos, le habla a SIMPLICIO de la larga trayectoria que sigue la punta de una pluma al efectuar un dibujo en un barco en marcha, o al escribir una carta, Simplicio se entusiasma con el ejemplo y llega a experimentar con él una viva satisfacción, pero sin vislumbrar el alcance del mismo. Del movimiento común experimentado por la pluma y el papel, no quedaba en este último huella alguna. Sólo se registraban las pequeñas diferencias de movimiento de derecha a izquierda o de arriba abajo y que, para un recorrido de centenares de millas, resultaban en verdad menores que *el ojo de una pulga*. El ejemplo de Sagredo apuntaba directamente hacia el principio de relatividad clásico que ya conocemos, y con él se buscaba, entre otras cosas, hacer que Simplicio comprendiera que la piedra que se deja caer desde lo alto de una torre describe también una larga trayectoria casi perpendicular a la vertical del lugar, trayectoria que, por ser común a la torre y a todos los cuerpos que la Tierra arrastra en su movimiento, no nos es dado percibir. Del mismo modo, *la aceleración común* experimentada por todos los cuerpos de la caja de Einstein que cae libremente, o que se mueve libremente en un campo cualquiera, hace que la misma no pueda ser revelada. He aquí el nexo que permitirá pasar del principio de equivalencia a un principio de relatividad válido para cualquier clase de movimientos.

77. **Trayecto de la luz en un campo gravitatorio.** — El trayecto de un rayo de luz referido a un sistema de coordenadas fijo a la caja K′ que se mueve con movimiento acelerado con respecto al sistema inercial K, no es, en general, rectilíneo. Dispongamos los ejes de los sistemas K y K′ como muestra la fig. 96 y supongamos que la caja se mueve con aceleración constante g en el sentido negativo del eje y. Aplicando la mecánica

newtoniana, las ecuaciones que permiten pasar de uno a otro sistema son:

[3] $x' = x \quad ; \quad y' = y + \frac{1}{2}gt^2 \quad ; \quad (t' = t) \quad ;$

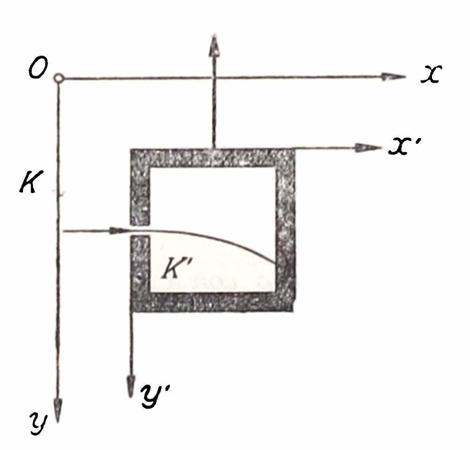


Fig. 96. — Curvatura de la luz en la caja de Einstein.

si se supone que los orígenes coinciden para $t = 0$. Si un rayo de luz recorre el eje x del sistema K y parte del origen en el instante cero, las ecuaciones del extremo de ese rayo serán:

[4] $x = ct \quad ; \quad y = 0 \quad ;$

y reemplazando estos valores en las [3], se obtendrán las ecuaciones del movimiento con respecto a K′:

[5] $x' = ct \quad ; \quad y' = \frac{1}{2}gt^2$

que muestran que el rayo recorre en ese sistema un arco de parábola. De acuerdo con el principio de equivalencia, todo ocurre en el interior de la caja como en un campo gravitatorio auténtico, donde la aceleración de caída fuera igual a g. Por esta razón, cabe esperar que un campo gravitatorio influya en el trayecto de un rayo de luz. En otras palabras: la luz tiene que comportarse como si tuviera peso. Se llega a la misma conclusión considerando la energía E de una parte de un haz luminoso a la cual corresponde una masa inerte igual a E/c^2 y, por la igualdad entre las masas pesante e inerte, si el rayo se propaga en un campo gravitatorio donde la aceleración es g, el *peso* de esa parte del haz tendrá que ser igual a Eg/c^2. En el campo gravitatorio terrestre, el efecto a esperarse es sumamente pequeño. En un campo uniforme, en el cual la aceleración fuera igual a 980 cm . seg^{-2}, un rayo de luz caería 490 cm en el primer segundo, o sea al recorrer 300 000 km. En un recorrido de 30 km empleará 10^{-4} seg, y en ese tiempo caería 490×10^{-8} centímetros, o sea algo así como la décima parte de la longitud de onda de la luz azul. Se ve, pues, que la pequeñez de este efecto hace que sea del todo imposible comprobarlo utilizando el campo gravitatorio terrestre. En el campo solar, aplicando la ley de gravitación de Newton, se encuentra que un rayo de luz que pasara rasante junto al borde del Sol, describiría una hipérbola cuyas asíntotas formarían un ángulo de 0″87. En la memoria de Einstein de 1911, que ya hemos citado, se efectúa este cálculo, pero cuatro años más tarde, el mismo Einstein calcula nuevamente la trayectoria del rayo de luz aplicando su propia ley de gravitación y encuentra, así, que la

desviación del rayo debe ser doble de la hallada anteriormente, todo lo cual se verá, con el detenimiento debido, más adelante.

78. La geometría de un disco giratorio. — Respecto de un sistema inercial K, un disco plano gira alrededor del eje O con cierta velocidad angular ω. Desde el sistema K (fig. 97) podemos medir la circunferencia L y el diámetro D del disco giratorio. Puede pensarse que en el sistema K se tiene otro disco en reposo, que se coloca en un plano paralelo al del disco que gira. Las medidas de la circunferencia L y del diámetro D del disco en movimiento, llevadas a cabo desde K, coinciden con las medidas de L y D, efectuadas también desde K, sobre el disco en reposo y que se ve que cubre exactamente la superficie del disco móvil. Por esa circunstancia, se tendrá

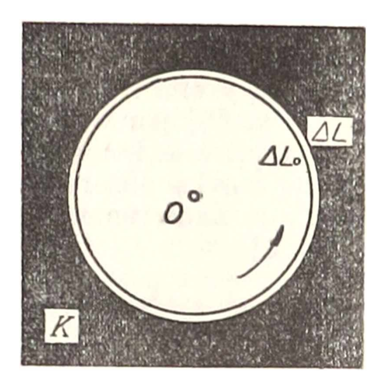


Fig. 97. — La geometría no euclídea de un disco que gira.

$$\text{[6]} \qquad \frac{L}{D} = \pi \ ,$$

y se llegaría al mismo resultado, midiendo, siempre desde K, la circunferencia y el diámetro interior de un aro fijo que rodeara en forma ajustada al disco móvil. Claro está que ninguno de estos artificios es necesario para efectuar la medición y si hemos hablado de ellos es para que se tenga presente que las reglas de medida utilizadas deben estar en reposo respecto de K.

Supongamos ahora que observadores colocados sobre el disco móvil van colocando su pequeña regla de medida, primero a lo largo de la circunferencia y luego a lo largo del diámetro. Si llamamos L_0 y D_0 a los valores así obtenidos, que representan las *longitudes propias* de la circunferencia y el diámetro del disco móvil con respecto a K, estos valores estarán vinculados a los obtenidos desde el sistema K, por las relaciones:

$$\text{[7]} \qquad D = D_0 \quad ; \quad L = L_0 \cos \alpha = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad ;$$

si llamamos v a la velocidad con respecto a K, de los puntos de la circunferencia medida. Cuando se coloca la pequeña regla de medida sobre el radio del disco móvil, la orientación de la regla es perpendicular a la velocidad de la misma con respecto a K y las medidas, en ese caso, coinciden en ambos sistemas. Pero al medir la circunferencia, la orientación de la regla coincide con la dirección de la velocidad con que desde K

se observa el movimiento de la misma. Por esta razón, si los observadores del disco encuentran que dos señales muy próximas de la periferia del mismo están separadas por la distancia ΔL_0, los observadores del sistema K encontrarán que las mismas señales están separadas por la distancia

[8] $$\Delta L = \Delta L_0 \,.\, \cos \alpha.$$

Si este ΔL_0 fuera la longitud propia de la regla de medida unitaria y ella cabe n veces en la circunferencia, basta multiplicar la [8] por n para obtener la segunda de las [7]. La relación entre la longitud de la circunferencia y el diámetro, obtenida por los observadores situados sobre el disco móvil, relación que llamaremos π', será entonces de acuerdo con las [7] y la [6]

[9] $$\pi' = \frac{L_0}{D_0} = \frac{L/\cos \alpha}{D} = \frac{\pi}{\cos \alpha} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}},$$

resultando, así,

[10] $$\pi' > \pi.$$

Por lo tanto, los observadores fijos en el disco encuentran, experimentalmente, que la relación entre la longitud de una circunferencia de centro O y su diámetro no es constante. Esta relación da siempre un número mayor que π y tiende a π para r igual a cero y a infinito para el valor límite del radio r igual a c/ω.

En cuanto a los relojes situados en diferentes puntos del disco, se comportan también de un modo particular, siendo absolutamente imposible hacer que marchen todos ellos sincrónicamente. Un reloj colocado en el centro marcha exactamente igual que los relojes del sistema K, pero si llamamos t_0 al intervalo de tiempo que indica un reloj fijo en el disco y situado a la distancia r de O, a ese tiempo le corresponderá un tiempo t, del sistema K, o de los relojes fijos en el centro, tal que

[11] $$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}}.$$

De acuerdo con esto, los relojes marchan tanto más despacio cuanto más lejos se encuentren del centro. Si sobre nuestro disco se dispusieran lámparas exactamente iguales, cuyas luces pudieran verse desde el centro, los observadores situados allí, y respecto de los cuales todas las lámparas están fijas, observarían que las líneas del espectro de las más distantes están más corridas hacia el extremo rojo.

79. **La geometría y la experiencia.** — Las verdades geométricas que hemos aprendido en la escuela con el nombre de teoremas, gozan de nuestra total y absoluta confianza. ¿Quién puede poner en duda el hecho de que la suma de los tres ángulos de un triángulo es igual a dos rectos o que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos?

¿De dónde proviene nuestra ilimitada confianza en la validez absoluta de estas proposiciones? Ellas han sido establecidas por vía puramente racional a partir de un pequeño número de otras proposiciones, llamadas axiomas, tan simples y tan evidentes, que sería totalmente absurdo dudar de su validez. De modo, pues, que, si los axiomas son verdaderos, es del todo necesario que también lo sean sus consecuencias lógicas llamadas teoremas. Pero lo extraordinario es que, si construímos un triángulo real, un triángulo físico, mediante hilos tirantes o por rayos de luz, y efectuamos sobre ellos las medidas correspondientes, observamos que los teoremas de la geometría se cumplen sobre los mismos en forma perfecta. Parecería, pues, que el hombre tuviera la prodigiosa facultad de extraer del interior de sí mismo verdades del mundo exterior referentes al comportamiento de hilos tirantes o rayos de luz. En todos los tiempos, la existencia de la geometría constituyó el argumento más fuerte de las escuelas filosóficas llamadas racionalistas. Para DESCARTES, algo es verdadero si se presenta a su espíritu en forma clara y distinta; y las palabras *evidente* y *verdadero* son, en su filosofía, casi sinónimas.

En KANT, el espacio de la geometría euclideana es una forma de nuestro propio pensamiento y sus proposiciones son —empleando su propia terminología— juicios sintéticos *a priori*. Vale la pena intentar poner en claro, en forma breve, lo que esto último significa. Kant divide los juicios que formulamos con respecto a determinado sujeto en juicios analíticos y sintéticos.

En los juicios analíticos, necesariamente verdaderos, el predicado afirma algo que ya está contenido en el propio concepto del sujeto. No se agrega a ellos nada nuevo y en el fondo se trata de puras trivialidades como cuando afirmamos: los ciegos no ven. En cambio, en un juicio sintético se afirma del sujeto algo nuevo que no está contenido en el concepto del mismo, como cuando se dice: los ciegos son desconfiados.

Proposiciones de esta clase se obtienen de la observación y de la experimentación, y pueden ser falsas o verdaderas, pero nunca triviales. Los juicios involucrados en las proposiciones matemáticas serían para Kant juicios sintéticos, pues nos dicen algo nuevo, que no está contenido en el sujeto, pero estos juicios sintéticos son obtenidos *a priori*, prescindiendo de toda

experiencia. En el concepto de triángulo puede ya estar contenido, por la definición del mismo, que aquél es una figura formada por tres ángulos o por tres lados (juicios analíticos), pero no que la suma de sus tres ángulos valga dos rectos. Y esta afirmación sería un juicio sintético y *a priori*.

La invención de las geometrías no euclideanas, efectuada en el siglo pasado, arrojó plena claridad sobre este problema. Al disponer de varias geometrías tan lógicas y coherentes en sí mismas como la euclídea, se puso de manifiesto que las aserciones geométricas —y, en general, todas las proposiciones de la matemática pura— son verdaderas con respecto al grupo de axiomas que han servido de base para establecerlas. Si a este grupo de axiomas lo llamamos A, y B es una proposición que se deduce lógicamente de aquéllos, la cuestión acerca de la validez de B tiene la forma: Si se admite A, entonces vale B. Los axiomas de la geometría de Euclides definen indirectamente a ciertos entes llamados rectas, puntos y planos.

La proposición euclídea: "la suma de los tres ángulos de un triángulo es igual a dos rectos" es verdadera sólo en el sentido de que ella es una consecuencia lógica de los axiomas de Euclides y se refiere, por lo tanto, a los entes definidos por aquellos axiomas. Entre ellos, el postulado V de las paralelas, según el cual, desde un punto exterior a una recta, se le puede trazar una y sólo una recta paralela.

En la geometría de N. I. LOBATSCHEFSKI (1793-1856) se postula, en cambio, que desde el punto A, exterior a la recta *r*, pueden trazarse infinitas rectas, contenidas en el plano determinado por *r* y A, que, por más que se prolonguen, no cortan a la recta *r*. Este haz de rectas estaría comprendido (fig. 98) dentro de un ángulo Ω llamado ángulo de paralelismo y cuyo valor dependería de la distancia *a* del punto A a la recta *r*. En esta geometría, la suma de los ángulos interiores de un triángulo es siempre menor que dos rectos, y esta proposición matemática es tan cierta como la euclídea. Ella es verdadera respecto del grupo de axiomas admitidos: cambiando los axiomas, cambian las consecuencias.

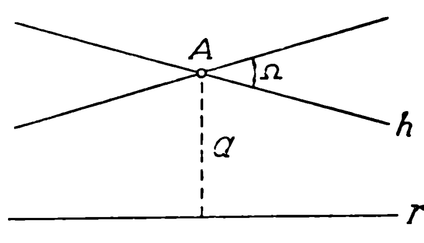


Fig. 98. — Infinitas paralelas en la geometría de Lobatschefski.

Históricamente, el postulado de las paralelas constituyó durante 2 000 años la piedra de escándalo de la geometría, pues como él se refiere a la infinitud de la recta, no se presentaba al espíritu con la evidencia de los demás axiomas. La rama de una hipérbola tampoco toca a la asíntota por más que se pro-

longue, y si se supone que una recta *h* (fig. 98) gira alrededor del punto A (permaneciendo siempre en el plano A*r*), ¿no podría ocurrir que se *despegara* de *r* cuando el ángulo de *h* con *a* fuera algo menor que un recto? De este modo comenzaron las preocupaciones por el postulado de las paralelas del joven húngaro JUAN BOLYAI (1802-1860), que comparte con el ruso Lobatschefski la gloria de la invención de esta geometría no euclideana. Lo que se buscaba al comienzo era demostrar el postulado de Euclides empleando el procedimiento llamado "por el absurdo". En este método de demostración se comienza por aceptar la proposición opuesta a la que se quiere demostrar, y al llegar a una contradicción, quedaría probada así la falsedad de lo supuesto. En el caso del postulado V se comenzaba por admitir que podían trazarse a una recta, desde un punto exterior, *dos* paralelas diferentes en lugar de una sola, buscando así conclusiones absurdas que probaran la validez del postulado de Euclides. Pero no se encuentra, siguiendo este camino, ninguna conclusión absurda, y se ha demostrado que jamás se llegará a contradicción alguna por más consecuencias que se deduzcan después de negar el postulado euclídeo de las paralelas. En la geometría de RIEMANN, de la cual nos ocuparemos más adelante, desde un punto exterior a una recta no se puede trazar ninguna paralela a la misma y, en ella, la suma de los tres ángulos de un triángulo es siempre mayor que dos rectos. Tenemos, así, varias geometrías que son en sí mismas tan lógicas y coherentes como la vieja geometría euclideana. Todas ellas son verdaderas desde el punto de vista de la matemática pura —ciencia de lo posible—, pero, ¿cuál de ellas corresponderá al espacio físico real? Sólo la experiencia puede responder a esta pregunta, que no es de incumbencia de la matemática sino de la física. De la experiencia acumulada hasta ahora y llevada a cabo en pequeñas regiones del espacio, podemos concluir que, con gran aproximación, vale la geometría euclideana si se sustituyen los entes abstractos de la misma, llamados rectas, por rayos de luz, tal como se hace al efectuar medidas de carácter geodésico sobre la superficie de la Tierra. Pero ya sabemos que en un sistema no inercial la luz no se propaga siguiendo las rectas de la geometría euclideana y lo mismo debe ocurrir, de acuerdo con el principio de equivalencia, en un campo gravitatorio. Cabe entonces la posibilidad de *elegir*, para una región así, una geometría diferente de la euclideana.

La geometría de Euclides, cuando se la aplica al mundo exterior, describe con notable precisión el comportamiento de los cuerpos rígidos y el de los rayos de luz, y por esta circunstancia, Einstein dice de ella que es la rama más antigua de la física.

80. Geometría de una superficie curva. — Consideremos una porción de una superficie curva y tratemos de hacer sobre la misma una geometría análoga a la que podemos llevar a cabo en una parte limitada de un plano. Dos puntos cualesquiera de la porción de superficie considerada determinan, en general, una única curva llamada *geodésica,* que coincide con el camino más corto posible para ir desde un punto al otro sin salir de la superficie.

Un arco de geodésica desempeña, entonces, en la superficie, el mismo papel que un segmento de recta sobre un plano. En una superficie esférica, la geodésica determinada por dos puntos es un arco de círculo máximo, dado por la intersección del plano que pasa por los puntos y el centro de la esfera con la superficie esférica misma. Dos figuras de una superficie, constituídas por arcos de geodésicas, serán iguales si se pueden hacer corresponder punto por punto, de tal modo, que la distancia geodésica entre dos puntos cualesquiera de una figura sea igual a la distancia geodésica de los puntos correspondientes de la otra. En la fig. 99, los paralelogramos geodésicos A B C D y A′ B′ C′ D′ de la superficie cilíndrica allí representada, pueden ser *geodésicamente* iguales, aun cuando en el espacio dichas figuras sean diferentes. Si se imagina que se recorta una de las figuras en un papel flexible, podrá aplicarse dicho papel sobre la otra figura con sólo flexionar la superficie del papel sin estirarlo ni desgarrarlo. En el caso de superficies desarrollables sobre un plano, como un cilindro o un cono, dos figuras de la superficie serán iguales entre sí, si coinciden en el desarrollo con figuras planas iguales. Por esta razón, la geometría de una porción de superficie desarrollable es enteramente semejante a la geometría de una porción de plano. Esta semejanza no se refiere a la totalidad de la superficie, pues es fácil ver que por dos puntos de una superficie cilíndrica, por ejemplo, pasan, en general, infinitas geodésicas que corresponden a arcos de hélices con diferentes inclinaciones. Todas estas geodésicas se transforman en segmentos de rectas cuando la superficie se desarrolla sobre un plano. En la fig. 100 se han trazado dos geodésicas entre los puntos A y B de la superficie cilíndrica.

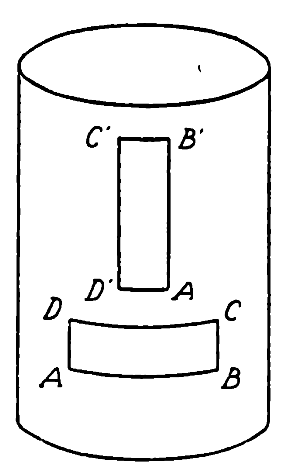


Fig. 99. — Figuras geodésicamente iguales.

Una porción de superficie esférica no se puede aplicar, en cambio, sobre un plano, pero sí puede hacérsela deslizar por toda la superficie esférica a la cual pertenece y esto es aná-

logo a lo que ocurre en una superficie plana. En la superficie cilíndrica se puede también efectuar la misma operación de deslizamiento con sólo flexionar —sin desgarrar ni estirar— la parte que se considera móvil. Esta operación, que permite

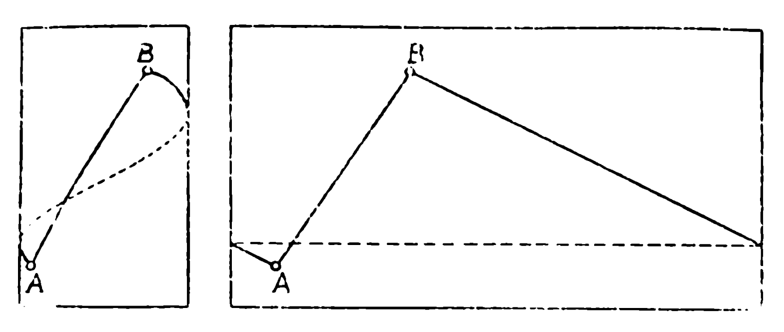


Fig. 100. — Geodésicas diferentes que pasan por el mismo par de puntos de una superficie cilíndrica.

aplicar una figura situada sobre una superficie en otro lugar de la misma, con sólo flexionar la figura, puede llevarse a cabo únicamente en superficies cuya *curvatura sea constante.*

GAUSS introdujo la noción de curvatura de una superficie del modo siguiente: En el punto P de la superficie se traza la normal N a la misma y se hacen pasar por N infinitos planos que, al cortar a la superficie, dan lugar a un haz de curvas planas que pasan por el punto P (fig. 101). Entre estas curvas existen, en general, dos, situadas en planos ortogonales, llamadas secciones principales y cuyas curvaturas son para la una máxima y para la otra mínima. Recordemos que la curvatura de una curva en un punto es el valor inverso del radio del círculo osculador que pasa por dicho punto. El producto de esas dos curvaturas, máxima y mínima, es la curvatura de Gauss en el punto considerado. La curvatura gaussiana del plano, del cilindro o de cualquier otra superficie desarrollable es en todos los puntos (regulares) igual a cero. En la esfera, esa curvatura es constante e igual a $1/R^2$ si R es el radio de la esfera, y en el punto P de la superficie representada en la fig. 101, dicha curvatura es negativa por estar los radios de los círculos osculadores de las curvas de las secciones principales, dirigidos hacia uno y otro lado de la superficie.

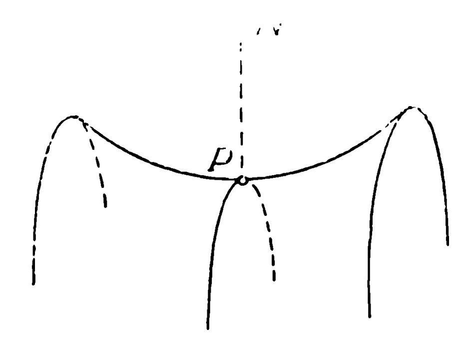


Fig. 101. — Curvatura en un punto de una superficie.

También existen superficies cuya curvatura es negativa y constante en todos sus puntos. La llamada *pseudo-esfera* cumple con esta condición y es una superficie de revolución generada por la rotación de una curva (fig. 102) llamada tractriz. Esta curva tiene la propiedad de que el segmento de tangente k de la misma, comprendido entre el punto de tangencia y la asíntota, es constante. La ecuación de la tractriz es

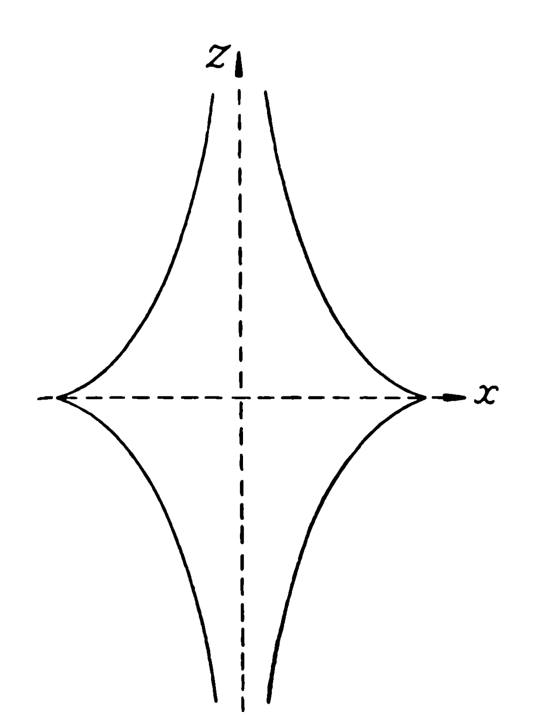


Fig. 102. — Pseudoesfera: superficie de curvatura negativa constante.

$$[12] \quad z = k \log \frac{k + \sqrt{k^2 - x^2}}{x} - \sqrt{k^2 - x^2}$$

y la curvatura gaussiana K está vinculada a k por la relación

$$[13] \quad K = -\frac{1}{k^2}$$

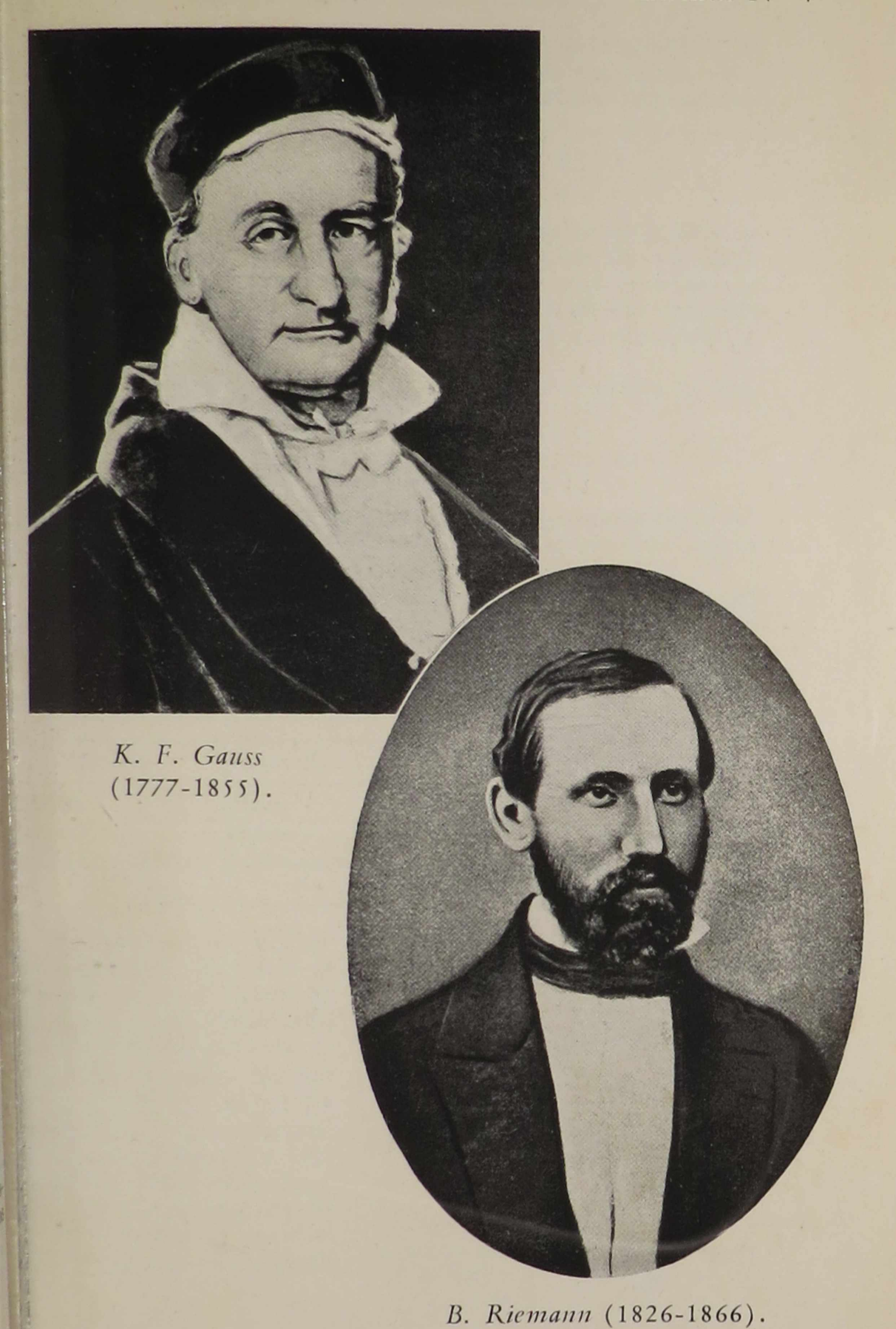
de modo que la constante k desempeña en la pseudoesfera un papel análogo al radio de la esfera común. Sobre esta superficie podrá aplicarse por simple flexión cualquier figura de otra superficie, con tal de que la curvatura gaussiana de esta última sea constante e igual a la de la pseudoesfera.

Si sobre una superficie cualquiera de curvatura gaussiana K, constante o variable de punto a punto, se tiene un triángulo geodésico, el exceso de la suma de sus tres ángulos A, B y C sobre dos rectos es igual, como lo demostró Gauss, a la integral extendida sobre la superficie del triángulo del producto de la curvatura en cada punto por el elemento de superficie dS. Se tiene, pues,

$$[14] \qquad \int_{ABC} KdS = A + B + C - \pi.$$

Si la superficie en cuestión es un plano, o una superficie desarrollable de curvatura nula, se tendrá, por ser en todos los puntos $K = 0$, que

$$[15] \qquad A + B + C = \pi$$



K. F. Gauss (1777-1855).

B. Riemann (1826-1866).

y tenemos, así, los triángulos de la geometría de Euclides. Si la curvatura es constante y positiva, como en la superficie esférica, y llamamos S al área del triángulo geodésico formado en ella, se tendrá

$$[16] \qquad A + B + C = \pi + KS = \pi + \frac{S}{R^2} .$$

Así, por ejemplo, si el área del triángulo esférico es igual a la octava parte de la superficie total de la esfera ($S = \frac{1}{2}\pi R^2$), la suma de los tres ángulos de ese triángulo será igual a tres rectos, como es el caso del triángulo trirrectángulo formado por un arco de ecuador y dos arcos de meridiano, que difieren 90° en longitud.

En las superficies de curvatura constante negativa se tendrá, de acuerdo con [13] y [14]:

$$[17] \qquad A + B + C = \pi - \frac{S}{k^2} .$$

En este caso, como en la geometría de Bolyai-Lobatschefski, la suma de los tres ángulos de un triángulo es siempre menor que dos rectos.

Se tiene de este modo, y tal como lo hizo notar BELTRAMI por primera vez, una representación concreta de las geometrías no euclideanas, por lo menos para el caso de dos dimensiones. El cuadro adjunto sintetiza lo concerniente a esta representación:

Geometría	*Superficie*	*Paralelas*	$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C$
Euclides	Plano	una sola	π
Riemann	Esfera	ninguna	$> \pi$
Lobatschefski-Bolyai	Pseudoesfera	infinitas (en el ángulo Ω)	$< \pi$

Observemos que el teorema de Gauss [14] sólo es aplicable si en el interior del triángulo geodésico considerado, la superficie es totalmente regular, variando la curvatura en forma continua. Así, por ejemplo, si se considera (fig. 103) un plano y una semiesfera, la suma de los ángulos de un triángulo, tal como el ABC es igual a π, en tanto

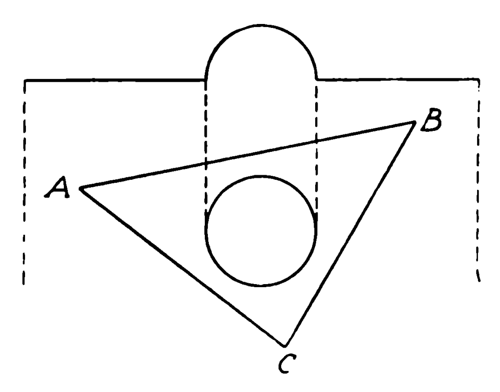


Fig. 103. — Sobre la aplicabilidad del teorema de Gauss.

que el teorema de Gauss daría para aquella suma el valor 3π, debido a la singularidad existente en la unión de la semiesfera con el plano.

81. Geometría "interna". — Las superficies del párrafo anterior han sido consideradas *desde fuera* y la curvatura de las mismas, en un determinado punto, da una medida del apartamiento de los puntos de la superficie, próximos al punto considerado, con respecto al plano tangente trazado en él. Una superficie es una variedad de dos dimensiones, pues fijando en ella un sistema de coordenadas, como la red de meridianos y paralelos en el caso de la Tierra, bastan dos números para determinar la posición de un punto. Al definir la curvatura gaussiana y trazar en un punto de la superficie la normal a la misma, se hace uso de una tercera dimensión que es, en cierto sentido, algo ajeno a la superficie misma. Piénsese que este recurso no podría ser utilizado si se tratara de estudiar el comportamiento geométrico de una variedad de tres dimensiones. Conviene entonces ver cómo podría estudiarse la geometría de una superficie sin salir de la misma, sin apelar a una tercera dimensión. Si imaginamos que seres chatos, que perciben únicamente dos dimensiones, viven sobre una superficie, ¿podrían ellos, sin salir de la misma, determinar su estructura geométrica? Si estos seres fueran los habitantes de un plano encontrarían, por mediciones directas "efectuadas sobre el terreno", que siempre la suma de los ángulos de un triángulo de cualquier área vale dos rectos y que la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro es igual a π. Si en cambio el universo de estos seres estuviera constituído por la superficie de una gran esfera, es lo más probable que en el comienzo de su civilización, cuando sus medidas se referían a una pequeña región de su mundo, habrían creído vivir en un plano ilimitado e infinito, donde era rigurosamente válida la geometría de Euclides. De este modo, se habría formado su "intuición del espacio"; la geometría de Euclides se habría enseñado en todas las escuelas, y no habría faltado un filósofo que enseñara que esas verdades geométricas eran formas puras del pensamiento, absolutamente necesarias, y juicios sintéticos a priori. Pero consideremos ahora que los habitantes chatos de nuestra superficie esférica se aventuran a hacer medidas de grandes triángulos y de grandes circunferencias. Entre otras cosas, quieren verificar si es cierto que el cociente entre la longitud de la circunferencia y su diámetro es constante e igual a π. Miden, para ello, con todo cuidado, la circunferencia ABC de centro en P (fig. 104) y la dividen por su diámetro APC. El resultado de muchas mediciones llevadas a cabo sobre circunferencias de diferente radio r ($r = \text{arco PA}$), lo resumen en la fórmula

$$[18] \qquad \frac{\text{circunferencia}}{\text{diámetro}} = \pi \frac{\text{sen}(r/\text{R})}{r/\text{R}},$$

donde R es una constante a la cual llamarían "radio del universo". Claro está que nosotros, que disponemos de la tercera dimensión, podemos entender y *ver* perfectamente el porqué se obtiene siempre para la relación entre la circunferencia y el diámetro un número menor que π y nos resulta también sumamente fácil deducir la [18]. Pero si quisiéramos entender las tribulaciones de los seres chatos, habitantes de aquella superficie esférica, cuando se enteran que viven en un universo cerrado y finito, tendríamos que pensar en cómo sería un *espacio esférico* de tres dimensiones. Así como los seres chatos de la superficie esférica van construyendo y midiendo circunferencias concéntricas a un punto P, nosotros haremos lo mismo, construyendo imaginativamente esferas que tienen su centro en el punto en que nos encontramos y de radio cada vez mayor. Al principio, todo va bien, pues una esfera exterior de radio doble a otra interna tiene una superficie cuatro veces mayor. Pero si nuestro mundo es esférico, a medida que aumenta el radio esta relación simple no se cumple, y llegaríamos así a una esfera de superficie máxima y después, si aumentamos todavía el radio, encontraríamos que la esfera exterior tiene menor superficie que la de dentro. Al final, nos encontraríamos con una esfera que contiene en su interior a todas las otras y cuya superficie se reduce, sin embargo, a un solo punto. Y esto mismo sucedería considerando como centro de esa familia de esferas a cualquier punto del espacio.

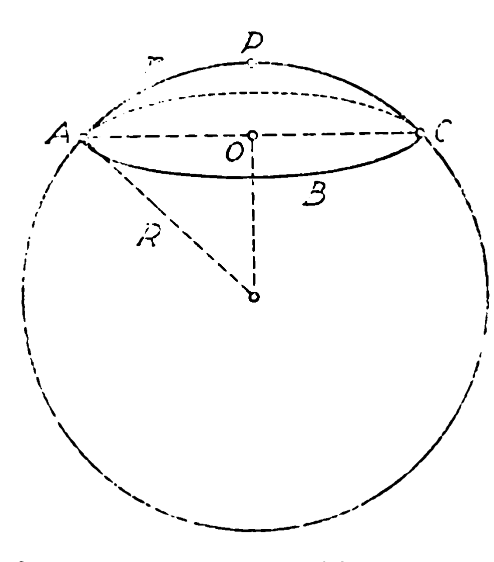


Fig. 104. — Geometría no euclídea de una superficie esférica.

El primero en hacer notar la diferencia que existe entre un espacio infinito y un espacio ilimitado fué Riemann. El espacio esférico que acabamos de bosquejar es ciertamente ilimitado, pero tendría un volumen finito, así como es finita el área de una superficie esférica que no contiene ni bordes ni límites.

Volviendo a nuestros seres chatos, habitantes de superficies de dos dimensiones, se comprende cómo, sin salir de su mundo, podrían, midiendo la suma de los tres ángulos de diversos trián-

gulos y sus áreas, determinar, aplicando el teorema de Gauss [14], la curvatura, positiva, negativa o nula, constante o variable, del mundo en que viven.

82. **La métrica de Riemann.** — Comencemos por considerar una variedad de dos dimensiones, o sea una superficie, y en ella una red de curvas que sirvan para determinar las coordenadas de un punto cualquiera de la misma. Si se trata de un plano y utilizamos coordenadas cartesianas ortogonales xy, la distancia $d\sigma$ entre dos puntos infinitamente próximos estará vinculada a las diferencias de las coordenadas de los puntos por la relación:

[19] $$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2.$$

Si las coordenadas utilizadas hubieran sido oblicuas y los ejes X é Y formaran entre sí el ángulo Ω, se tendría:

[20] $$d\sigma^2 = dX^2 + 2\cos\Omega \, dXdY + dY^2.$$

En coordenadas polares ϱ, φ se tiene, en cambio,

[21] $$d\sigma^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 d\varphi^2.$$

Estas tres formas de expresar la distancia entre dos puntos infinitamente vecinos son equivalentes desde el momento que se puede pasar de una a otra por un simple cambio de coordenadas. Si en la [21] se supone $\varrho =$ constante, resulta

[22] $$d\sigma = \varrho d\varphi$$

y la longitud de una circunferencia de radio ϱ la obtenemos integrando la [22] y haciendo variar φ entre cero y 2π, obteniéndose así, para la longitud L de la circunferencia de radio ϱ, el valor

[23] $$L = 2\pi\varrho.$$

De modo que si conocemos la forma de $d\sigma$, puede saberse cuál es la estructura de nuestra variedad. En el caso anterior, como encontramos que el cociente entre la circunferencia L y el diámetro 2ϱ es igual a π, concluímos que la variedad definida por [21] o sus equivalentes [19] ó [20] es euclideana.

Si se tratara de la superficie de un cilindro circular recto de radio R, la expresión de la distancia elemental entre dos puntos de la misma podría expresarse

[24] $$d\sigma^2 = R^2 d\varphi^2 + dZ^2$$

y si hacemos $Rd\varphi = dX$ encontramos que esta expresión es idéntica a la [19], por lo cual, sobre *una porción* de la superficie cilíndrica, vale también la geometría euclideana, al igual que sobre cualquier superficie desarrollable sobre un plano.

Hallemos ahora la expresión de la distancia entre dos puntos infinitamente vecinos situados sobre una superficie esférica de radio R. El radio de paralelo, separado del polo P por la distancia angular θ, es igual a R sen θ (fig. 105), por lo cual el elemento de arco de paralelo será igual a R sen θdφ y siendo Rdθ la longitud elemental de un arco de meridiano, se tendrá:

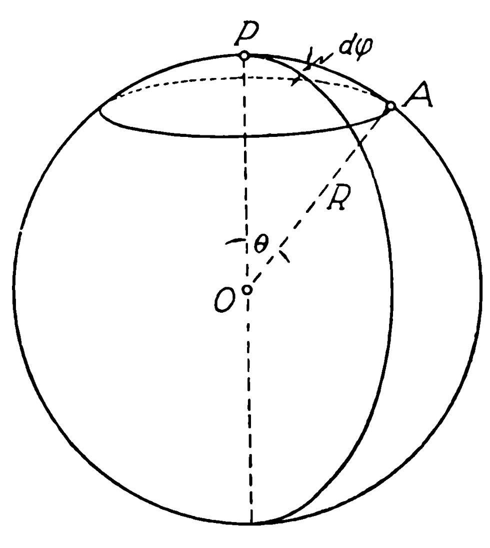


Fig. 105. — Distancia entre dos puntos infinitamente próximos de una superficie esférica.

[25] $d\sigma^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \operatorname{sen}^2 \theta d\varphi^2.$

Si suponemos que θ es constante, se tiene

[26] $d\sigma = R \operatorname{sen} \theta \, . \, d\varphi$

y la longitud L de todo el paralelo, que sin salir de la superficie esférica representa una circunferencia de centro en P, la obtenemos integrando la [26] entre cero y 2π, resultando, así,

[27] $$L = 2\pi R \operatorname{sen} \theta .$$

El radio r de este paralelo *medido sobre la superficie de la esfera* es el arco PA, o sea

[28] $$r = R\theta \quad ,$$

con lo cual la [27] puede escribirse

[29] $$L = 2\pi R \operatorname{sen} \frac{r}{R}$$

y de aquí se obtiene de inmediato la [18].

El área elemental es

[30] $$dS = Rd\theta \, . \, R \operatorname{sen} \theta \, . \, d\varphi .$$

Integrando esta expresión entre cero y 2π para φ y entre cero y θ para θ, obtenemos el área del círculo de centro en P (casquete esférico), resultando

[31] $$S = 2\pi R^2 (1 - \cos \theta) = 2\pi R^2 \left(1 - \cos \frac{r}{R} \right) .$$

Si se hace θ = 180°, se obtiene la superficie máxima del *círculo*, que se puede considerar en esa variedad de dos dimensiones y

que coincide con el valor de la superficie de una esfera euclídea:

$$[32] \qquad S_{(\text{Total})} = 4\pi R^2.$$

La [29] y la [31], escritas en función del radio r, medido sobre la superficie esférica, pueden escribirse en la forma siguiente, con sólo desarrollar el seno y el coseno que en ellas figuran, por la serie de Taylor:

$$[33] \quad L = 2\pi r \left(1 - \frac{1}{3!}\frac{r^2}{R^2} + \frac{1}{5!}\frac{r^4}{R^4} - \dots\right);$$

$$[34] \quad S = \pi r^2 \left(1 - \frac{2}{4!}\frac{r^2}{R^2} + \frac{2}{6!}\frac{r^4}{R^4} - \dots\right).$$

Se ve, así, que para r pequeño respecto de R, valen las fórmulas euclídeas, pero para $\theta = \pi$, se obtiene un círculo de área igual a $4\pi R^2$ y en el cual la longitud de la circunferencia es igual a cero.

Esta superficie no euclídea, de dos dimensiones, puede ser sumergida en un espacio euclideano de tres. Si se hace el cambio de coordenadas

$$[35] \qquad X = R \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \quad ; \quad Y = R \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \quad ; \quad Z = R\cos\theta \quad ;$$

resulta:

$$[36] \qquad \begin{aligned} dX &= R\cos\theta\cos\varphi d\theta - R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi d\varphi \\ dY &= R\cos\theta\operatorname{sen}\varphi d\theta + R\operatorname{sen}\theta\cos\varphi d\varphi \\ dZ &= - R\operatorname{sen}\theta d\theta \end{aligned}$$

y elevando al cuadrado y sumando se obtiene:

$$[37] \quad d\sigma^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \operatorname{sen}^2\theta d\varphi^2.$$

Pasemos ahora a estudiar la geometría de una variedad esférica de tres dimensiones. Tendremos que poner la distancia elemental $d\sigma$ entre dos puntos infinitamente vecinos, en función de tres coordenadas, que podemos llamar Θ, θ, φ. Felizmente, esta variedad esférica de tres dimensiones es sumergible en un espacio euclídeo de cuatro dimensiones. Decimos "felizmente", porque en general, una variedad no euclídea de tres dimensiones puede ser introducida sólo en un espacio euclídeo de seis. Si la variedad no euclídea tiene n dimensiones se necesita, por lo general, un espacio euclídeo de $\frac{1}{2}n(n+1)$ dimensiones para "hacerla caber" en su interior. La razón de esto se comprenderá más adelante.

En nuestro espacio euclídeo de cuatro dimensiones tomamos los ejes X Y Z U ortogonales y consideramos un cambio de coordenadas (fig. 106) tal que:

[38] $U = R \cos \Theta$.

La proyección del vector R de módulo constante sobre el "plano" XYZ será, entonces, igual a $R \operatorname{sen} \Theta$, por lo que, si sustituímos en las [35] el valor de R que allí figura, por $R \operatorname{sen} \Theta$ tendremos:

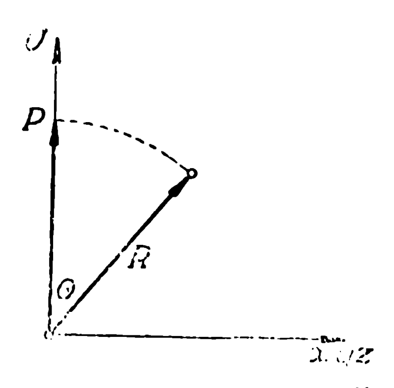


Fig. 106. — Superficie hiperesférica de tres dimensiones.

[39] $X = R \operatorname{sen} \Theta \operatorname{sen} \theta \cos \varphi \quad ; \quad Y = R \operatorname{sen} \Theta \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \quad ;$
$Z = R \operatorname{sen} \Theta \cos \theta$.

La [38] con las [39] nos permite calcular $d\sigma^2$, pues:

$$dX = R \cos \Theta \operatorname{sen} \theta \cos \varphi d\Theta + R \operatorname{sen} \Theta \cos \theta \cos \varphi d\theta - R \operatorname{sen} \Theta \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi d\varphi \quad ;$$

$$dY = R \cos \Theta \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi d\Theta + R \operatorname{sen} \Theta \cos \theta \operatorname{sen} \varphi d\theta + R \operatorname{sen} \Theta \operatorname{sen} \theta \cos \varphi d\varphi \quad ;$$

$$dZ = R \cos \Theta \cos \theta d\Theta - R \operatorname{sen} \Theta \operatorname{sen} \theta d\theta \quad ;$$

$$dU = - R \operatorname{sen} \Theta d\Theta .$$

Elevando al cuadrado y sumando, resulta:

[41] $d\sigma^2 = R^2 d\Theta^2 + R^2 \operatorname{sen}^2 \Theta d\theta^2 + R^2 \operatorname{sen}^2 \Theta \operatorname{sen}^2 \theta d\varphi^2$.

El elemento de volumen valdrá:

[42] $dV = R d\Theta \,.\, R \operatorname{sen} \Theta d\theta \,.\, R \operatorname{sen} \Theta \operatorname{sen} \theta d\varphi \quad ,$

pues la forma de la [41] permite ver que los tres elementos lineales del paralelepípedo elemental son perpendiculares entre sí. Si integramos la [42] entre cero y 2π para φ, entre cero y π para θ, y entre cero y Θ para Θ, tendremos el volumen de una esfera cuyo centro está en el polo P y cuyo radio estaría medido por la magnitud del ángulo Θ. Se obtiene, así:

[43] $$V = 4\pi R^3 \int_0^\Theta \operatorname{sen}^2 \Theta d\Theta \quad ,$$

o sea

[44] $$V = 2\pi R^3 (\Theta - \operatorname{sen} \Theta \cos \Theta) .$$

Si hacemos $\Theta = \pi$, obtenemos el volumen total de todo nuestro espacio esférico, así como antes, en el caso de dos dimensiones, obteníamos el área total de la superficie esférica. Resulta, para ese volumen total:

[45] $$V_{(Total)} = 2\pi^2 R^3.$$

Estando el radio de una esfera con centro en el polo P medido por el ángulo Θ, si suponemos Θ = constante, el elemento de área de la superficie esférica será:

[46] $$dS = R \operatorname{sen} \Theta d\theta \,.\, R \operatorname{sen} \Theta \operatorname{sen} \theta \,.\, d\varphi \quad ,$$

y la superficie de la esfera la hallamos integrando respecto de φ entre cero y 2π, y respecto de θ entre cero y π, resultando:

[47] $$S = 4\pi R^2 \operatorname{sen}^2 \Theta.$$

La superficie total de esta hiperesfera que se obtiene haciendo $\Theta = \pi$, es igual a cero.

La longitud de una circunferencia de la esfera de radio medido por el ángulo Θ la hallamos encontrando el elemento de longitud para Θ constante. Si suponemos, además, φ = constante, se tratará de un arco de círculo meridiano y la longitud dL, de acuerdo con [41], será:

[48] $$dL = R \operatorname{sen} \Theta d\theta$$

que integrada entre cero y 2π, da

[49] $$L = 2\pi R \operatorname{sen} \Theta.$$

Si suponemos θ = constante, la longitud elemental correspondiente a un arco de paralelo, de acuerdo con [41], es:

[50] $$dl = R \operatorname{sen} \Theta \operatorname{sen} \theta d\varphi \quad ,$$

e integrando entre cero y 2π, resulta

[51] $$l = 2\pi R \operatorname{sen} \Theta \operatorname{sen} \theta \quad ,$$

y si $\theta = \pi/2$, el paralelo coincide con el ecuador y la [51] con la [49].

El área de un círculo máximo de nuestra esfera, cuyo radio está medido por el ángulo Θ, la hallamos haciendo φ = constante y el elemento de área $d\Sigma$ de ese círculo será, de acuerdo con [41]:

[52] $$d\Sigma = R d\Theta \,.\, R \operatorname{sen} \Theta d\theta.$$

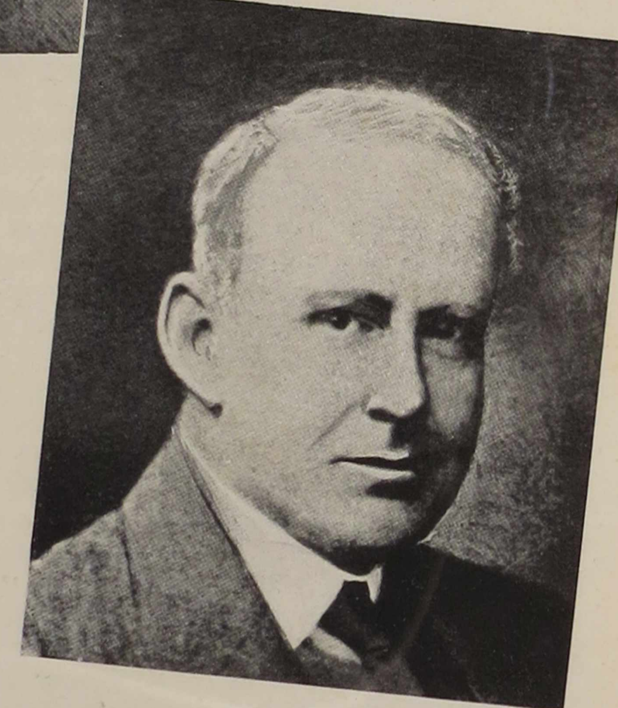
Integrando con respecto a θ entre cero y 2π, y con respecto a Θ entre cero y Θ, resulta

[53] $$\Sigma = 2\pi R^2 (1 - \cos \Theta).$$

La [49] y la [53] coinciden con la [27] y la [31], respectivamente, de modo que en nuestro espacio esférico de tres dimensiones obtendríamos el mismo valor de la relación de la circunferencia al diámetro que en el caso de dos dimensiones, supuesto que R, radio del universo tridimensional, sea igual al R de la superficie esférica de dos dimensiones.



N. I. Lobatschefski
(1793-1856).



A. S. Eddington (1882-1944).

Al ángulo Θ corresponde un radio r tal que:

[54] $$\Theta = \frac{r}{R} .$$

Si en la [44] se introduce el valor dado en [54] y se desarrolla en serie la expresión

$$\operatorname{sen} \Theta \cos \Theta = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\Theta = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2 \frac{r}{R}$$

se obtiene:

[55] $$V = \frac{4}{3} \pi r^3 \left(1 - \frac{1}{5} \frac{r^2}{R^2} + \frac{2}{105} \frac{r^4}{R^4} - \ldots\right) .$$

Análogamente, de la [47] resulta:

[56] $$S = 4\pi r^2 \left(1 - \frac{1}{3} \frac{r^2}{R^2} + \frac{2}{45} \frac{r^4}{R^4} - \ldots\right) .$$

Se ve que en un mundo esférico de tres dimensiones sólo para valores de r pequeños, con respecto al radio R de ese mundo, valen las fórmulas euclídeas referentes al volumen y a la superficie de una esfera.

La expresión [41], que da el elemento lineal correspondiente a un espacio esférico, fué establecida apelando a una cuarta dimensión y ello se hizo así para que se notara mejor la analogía con el caso de dos dimensiones, pero podría haberse establecido sin salir de las tres dimensiones, considerando que una "sección plana" cualquiera de nuestro espacio esférico tendría que comportarse como una superficie esférica de dos dimensiones, como se comprende si se compara [49] y [53] con [27] y [31]. Si en la [41] se hace $\Theta =$ constante ($d\Theta = 0$), ello corresponde a seccionar el espacio esférico por un plano y esa "sección plana" es, en este caso, una superficie esférica cuyo radio es $R \operatorname{sen} \Theta$. También se obtiene una superficie esférica si se hace $\varphi =$ constante y, en este caso, el radio de la misma es R. Igualmente la sección plana ecuatorial de [41]

$$\theta = \text{const} = \frac{\pi}{2}$$

es una superficie esférica de radio R, en tanto que si θ es constante pero diferente de $\pi/2$, la "sección plana" no es central.

En lo que precede hemos aplicado la métrica diferencial de B. RIEMANN (1826-1866), para estudiar la geometría de variedades sencillas de dos y tres dimensiones. En la célebre disertación de 1854 de este genial matemático, titulada "Über die Hipothesen welche der Geometrie zugrunde liegen" ("Sobre las hipótesis en que se funda la geometría"), se indica un nuevo método métrico-diferencial para estudiar las variedades geomé-

tricas, esencialmente distinto del método axiomático que se había seguido precedentemente. En el método de Riemann, se comienza por definir el elemento lineal de una variedad de n dimensiones por la expresión

[57] $$d\sigma^2 = \Sigma a_{ik} dx_i dx_k \quad ,$$

donde los índices i, k se hacen variar de 1 a n y la suma se extiende también de 1 hasta n. Si nos referimos a dos dimensiones, la suma anterior se escribe:

$$\begin{aligned} d\sigma^2 &= a_{11}dx_1dx_1 + a_{12}dx_1dx_2 + a_{21}dx_2dx_1 + \\ &+ a_{22}dx_2dx_2 = a_{11}dx_1^2 + (a_{12}+a_{21})dx_1dx_2 + \\ &+ a_{22}dx_2^2 . \end{aligned}$$

El coeficiente $a_{12}+a_{21}$ se escribe

$$a_{12} + a_{21} = 2a_{12} = 2a_{21}$$

y esto en todos los casos, resultando así que

$$a_{ik} = a_{ki} .$$

Resulta, pues, para dos dimensiones

[58] $$d\sigma^2 = a_{11}dx_1^2 + 2a_{12}dx_1dx_2 + a_{22}dx_2^2 .$$

En el caso de la [19], es:

$$x_1 = x \quad ; \quad x_2 = y \quad ; \quad a_{11} = a_{22} = 1 \quad ; \quad a_{12} = 0 .$$

En la [20], es:

$$x_1 = X \quad ; \quad x_2 = Y \quad ; \quad a_{11} = a_{22} = 1 \quad ; \quad a_{12} = \cos \Omega .$$

En la [25], es:

$$x_1 = \theta \quad ; \quad x_2 = \varphi \quad ; \quad a_{11} = R^2 \quad ;$$
$$a_{22} = R^2 \operatorname{sen}^2 \theta \quad ; \quad a_{12} = 0 .$$

Para el caso de tres dimensiones, la [57] se escribe:

[59] $$\begin{aligned} d\sigma^2 = a_{11}dx_1^2 + a_{22}dx_2^2 + a_{33}dx_3^2 + 2a_{12}dx_1dx_2 + \\ + 2a_{13}dx_1dx_3 + 2a_{23}dx_2dx_3 \quad ; \end{aligned}$$

y en la [41], sería:

$$x_1 = \Theta \quad ; \quad x_2 = \theta \quad ; \quad x_3 = \varphi \quad ;$$
$$a_{11} = R^2 \quad ; \quad a_{22} = R^2 \operatorname{sen}^2 \Theta$$
$$a_{33} = R^2 \operatorname{sen}^2 \Theta \operatorname{sen}^2 \theta \quad ; \quad a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0 .$$

Cuando

$$a_{ik} = 0 \quad \text{si} \quad i \neq k$$

la forma cuadrática fundamental definida en [57] se llama ortogonal. Si, además, es

$$a_{ii} = 1$$

la forma se dice que es euclídea.

En general, los coeficientes a_{ik} de la [57] son funciones de las coordenadas y conociéndolos puede conocerse la estructura geométrica de la variedad que definen. En particular, en función de dichos coeficientes, puede calcularse la curvatura y hallar las ecuaciones de las líneas geodésicas, como veremos en el capítulo próximo.

En el determinante formado por los a_{ik}

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

por ser $a_{ik} = a_{ki}$ se tienen, en general,

$$[60] \qquad 1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2} n(n+1)$$

coeficientes diferentes, y una variedad no euclídea de n dimensiones, estará definida entonces por $\frac{1}{2}n(n+1)$ funciones independientes de las n variables. Ésta es la razón de que una variedad no euclídea de n dimensiones pueda ser sumergida, en general, sólo en un espacio euclídeo de $\frac{1}{2}n(n+1)$ dimensiones.

83. **Mediciones geométricas en un universo esférico.** — Cuando el lector seguía imaginativamente a los geómetras chatos que con todo cuidado medían el paralelo ABC de la fig. 104 y dividían luego la longitud así obtenida por el "diámetro" APC, obteniendo de ese modo, para el cociente, un número menor que π, es posible que sintiera por ellos algo de lástima y tal vez hubiera querido decirles que el *verdadero* diámetro de la circunferencia ABC no es el *arco* APC, sino la *recta* AOC.

Es probable, también, que haya pensado que los resultados obtenidos por aquellos fantásticos seres eran totalmente falsos y que su falsedad provenía de un defecto congénito de su mentalidad, incapaz de percibir la tercera dimensión. Pero si se piensa a sí mismo, viviendo en un mundo de tres dimensiones y de estructura esférica, es posible que cambie de opinión.

Imagínese, pues, que vive en un mundo así y que construye una gran superficie esférica, por ejemplo de metal, sostenida por vigas y travesaños internos, por los cuales puede ir trepando para efectuar las medidas correspondientes. Elige un círculo máximo cualquiera de esta esfera, mide su circunferencia, la divide por el diámetro, y obtiene un número que es un poco menor que π. ¿Le serviría de algo que alguien le dijera que el diámetro que ha tomado no es el verdadero? Allí está usted en el interior de su esfera y allí está el círculo máximo

que ha medido y que ha pintado de blanco y un hilo bien tirante que pasa por el centro une dos puntos opuestos de esa circunferencia. Usted verifica con un teodolito que el centro de la esfera y los dos puntos opuestos de la circunferencia en que ató el hilo están, efectivamente, en línea recta.

Repite la medición para diversos círculos máximos de su esfera y encuentra siempre, para aquella relación, el mismo valor; digamos, 3,06 en lugar de 3,14. Ante este resultado, usted emprenderá de inmediato, con toda seguridad, la construcción de una segunda esfera concéntrica con la anterior y de radio doble. Sobre ella repite las medidas de la circunferencia máxima y el diámetro y obtiene para π (llamémosle π') un valor próximo a 2,83. Pero entre tantos resultados extraños experimentará, al construir su segunda esfera, una sorpresa muy agradable. La superficie de la chapa empleada en la primera esfera, resultó ser igual, en cierta unidad, a 1,84. Siendo el radio de la segunda esfera exactamente igual al doble del de la primera, usted había encargado para cubrir su superficie $1{,}84 \times 4 = 7{,}36$ unidades de superficie y se encuentra, al finalizar la construcción, que sólo tuvo que emplear 6,28 de esas unidades. La economía que esto significa lo anima sin duda para construir una tercera esfera, y luego una cuarta. En esta última, cuyo radio es exactamente igual a cuatro veces el radio de la primera, obtiene usted para π' exactamente el valor 2 y necesita para cubrir la superficie total de la esfera 12,57 unidades.

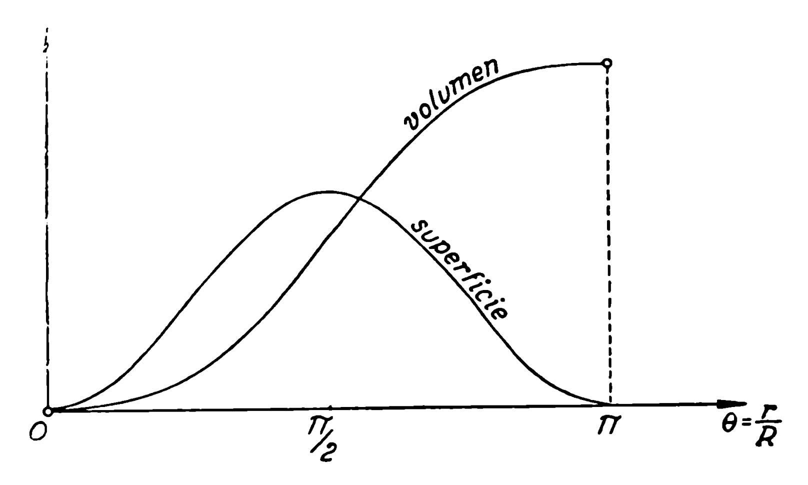


Fig. 107. — Superficie y volumen de una esfera de un espacio riemanniano esférico en función del radio.

Este valor de π' igual a 2 significa que la longitud de la semicircunferencia máxima es exactamente igual al diámetro. Después de esto, emprende usted la construcción de su quinta

esfera concéntrica con todas las anteriores y cuyo radio es cinco veces mayor que el de la primera. Cuando termine la construcción de la misma sus familiares empezarán a preocuparse por su salud mental, pues usted no puede comprender que esta quinta esfera, exterior a todas las otras, haya necesitado la misma cantidad de chapa, para cubrir su superficie, que la tercera. En la quinta esfera el valor de π' es sólo de 1,48, pero será prudente que no divulgue esto entre sus amigos. En fin, los resultados de sus esfuerzos se consignan en la tabla siguiente en la cual se ha tomado el radio R del universo esférico explorado igual a la unidad, y en la fig. 107 se ha hecho la representación gráfica correspondiente utilizando las fórmulas [44] y [47].

Nº de la esfera	Θ	r	*Superficie*	*Volumen*	π'
1	22°30′	0,3927	1,8403	0,2460	3.0615
2	45°	0,7854	6,2832	1,7932	2,8284
3	67°30′	1,1781	10,726	5,1808	2,4618
4	90°	1,5708	12,566	9,8696	2.0000
5	112°30′	1,9635	10,726	14,558	1.4782
6	135°	2,3562	6,2832	17,987	0.9428
7	157°30′	2,7489	1,8403	19,493	0,4373
8	180°	3,1416	0	19,739	0

84. **Convención necesaria para la elección de determinada geometría.** — El principio de equivalencia nos ha llevado a considerar que la luz debe propagarse en un campo gravitatorio siguiendo, en general, líneas curvas. De acuerdo con esto, en un triángulo ABC formado por rayos de luz que pasen casi r a s a n t e s a la superficie del Sol (fig. 108), la suma de sus tres ángulos sería mayor de dos rectos y de acuerdo con las medidas efectuadas, en la forma que se verá más adelante, debe suponerse que ese exceso es de unos 5″. ¿Constituye esto una prueba de que la geometría en los alrededores del Sol es no euclídea? De ninguna manera: si se quiere conservar la geometría euclídea bastará con admitir que sobre los rayos de luz actúa una fuerza, de naturaleza particular, que los aparta de la línea recta.

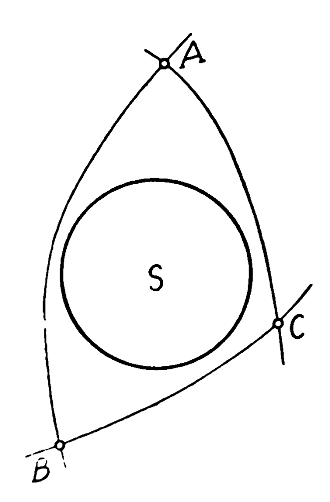


Fig. 108. — La geometría en los alrededores del Sol, ¿es no euclídea?

H. POINCARÉ (1854-1912), a fines

del siglo pasado, y por lo tanto mucho antes de la aparición de la teoría de la relatividad, consideró la posibilidad de que las observaciones astronómicas condujeran, algún día, a la necesidad de admitir que la luz se propagara en el vacío y en ciertos lugares siguiendo líneas curvas. Hace notar (La Science et l'Hipothese, pág. 3) que esas observaciones podrían interpretarse de dos modos diferentes:

1) Admitiendo para el espacio una geometría no euclideana;

2) Conservando la geometría de Euclides y cambiando las leyes de la óptica, y dice al respecto: "Inutile d'ajouter que tout le monde regarderait cette solution (la 2) comme plus avantageuse" *. En otra parte del mismo libro se puede leer: "La geometría euclideana es y seguirá siendo la más cómoda".

De modo, pues, que las mismas observaciones del mundo físico pueden ser interpretadas con una u otra geometría o encajadas dentro de uno u otro marco geométrico, según sea —extremando la nota— el gusto de cada uno. Poincaré pensaba, eso sí, que los hombres de ciencia elegirían siempre, por ser la más simple, a la geometría euclideana, no obstante lo cual, veinte años más tarde, los físicos llegaron a considerar, casi unánimemente, que era mucho más sencillo describir los fenómenos utilizando otra geometría diferente a la de Euclides.

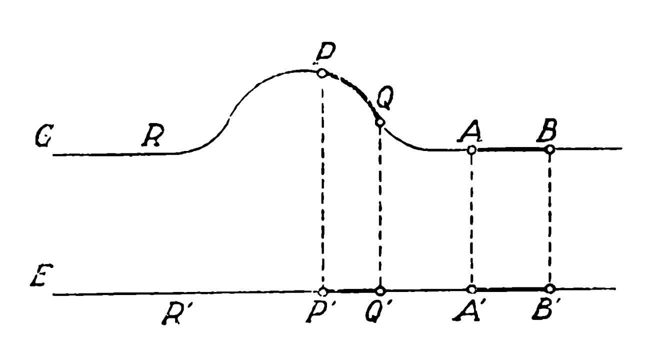


Fig. 109. — Relatividad de la geometría.

Este problema, conocido con el nombre de "relatividad de la geometría", ha sido tratado con singular claridad por H. REICHENBACH, en su libro Philosophie der Raum-Zeit-Lehre" (Berlín, 1928). De él tomamos el ejemplo que sigue. Sea una superficie plana G (fig. 109) ilimitada, que tienen cierta región un abultamiento semiesférico, unido al resto del plano de tal modo que en la unión no aparezcan saltos ni quebraduras. Supondremos que sobre esta superficie viven los geómetras chatos que ya conocemos ** (§ 81). De sus medidas infieren que su mundo es plano, pero que tiene en la región R un abultamiento semiesférico. Supongamos ahora que sobre el plano E,

* Inútil agregar que todo el mundo consideraría como más ventajosa a esta solución (la 2).

** El ejemplo de los geómetras bidimensionales es original de H. Poincaré ("La science et l'hipothese", pág. 52).

paralelo a la parte plana de G, tenemos otro mundo igualmente poblado de geómetras bidimensionales, pero haremos con respecto al comportamiento físico de ese mundo una extraña hipótesis. Supóngase que la superficie G es transparente y que está iluminada desde arriba por rayos de luz normales a la parte plana de la misma. La sombra de una regla unitaria colocada en AB se proyecta según A′B′ y la sombra de la misma regla colocada en PQ tiene por proyección P′Q′. Ahora consideraremos que en la parte R′ del mundo E las reglas de medida y todos los cuerpos llevados a esa región experimentan una contracción, de modo que su forma se haga exactamente igual a la sombra que un cuerpo idéntico colocado en G arrojaría sobre E. Cierto es que esta especie de campo de fuerza, que suponemos actúa por igual sobre todos los cuerpos, es de una naturaleza bien extraña y el resultado de su acción sería que las medidas llevadas a cabo por los geómetras del mundo E coincidirían en un todo con las que se realizan en G. Por lo tanto, en E se llegaría a la conclusión *errónea* de que ese mundo plano tiene un abultamiento semiesférico en la región R′. Pero, ¿por qué errónea? ¿Las medidas en E no son acaso exactamente iguales a las de G? Si designamos por M a las medidas efectuadas, por G a la estructura geométrica, y por F a la acción de esa extraña fuerza que obra por igual sobre todos los cuerpos, se podría expresar simbólicamente lo que precede por la relación:

[61] $$M = G + F$$

que indica que el resultado de las medidas depende de la estructura geométrica y de la acción de esa hipotética fuerza capaz de hacer contraer a las reglas de medida. Si se conociera la fuerza F, podría determinarse la estructura geométrica G efectuando las medidas M adecuadas. Pero, ¿cómo conocer F? La fuerza F, por su naturaleza, es irrevelable experimentalmente, dado que actúa por igual sobre todas las substancias. Si se efectúan medidas de carácter geométrico sobre una extensa chapa donde la temperatura varía de punto a punto de acuerdo con cierta ley, se podrá descubrir esa variación de temperatura porque se dispone de substancias que tienen diferente coeficiente de dilatación. Si la chapa es plana y no hiciéramos la corrección de las medidas por la variación de la temperatura, llegaríamos a creer que aquélla es curvada, pero la curvatura variaría si se mide una vez con barras de cobre y otra con barras de hierro. Acciones tales como la dilatación térmica, que actúan de manera diversa sobre diferentes substancias, son llamadas por REICHENBACH "fuerzas diferenciales" para distinguirlas de las "fuerzas universales" que, por hipótesis, actúan de un modo exactamente igual sobre todas las substancias.

En la fórmula simbólica [61], F debe considerarse como

una fuerza universal, por lo cual, de las medidas que efectuemos sólo podrá saberse el valor de la "suma" G + F, pero no los "valores" de G y de F por separado.

Si se postula que la geometría G es la geometría euclídea G_0, de las medidas M se podrá conocer el valor de la fuerza F:

[62] $$F = M - G_0.$$

Pero también podría postularse un determinado valor para la fuerza y deducir de ese valor y de las mediciones M la naturaleza geométrica G. Lo más sencillo es postular que esa fuerza universal F es nula, con lo cual las medidas determinarían directamente la naturaleza de la geometría.

¿Qué significa postular que $F = 0$? Significa simplemente postular que la barra rígida que sirve para efectuar nuestras medidas no varía su longitud al ser transportada de un punto al otro. Significa admitir que, en la fig. 109, la longitud AB es igual a PQ y también que A′B′ es igual a P′Q′.

Para hacer geometría física es necesario postular algo acerca de la congruencia de segmentos separados y lo más simple es postular que la regla unitaria tiene una longitud invariable.

85. **La geometría del espacio-tiempo y las acciones gravitatorias.** — En los últimos párrafos de este capítulo nos hemos ocupado exclusivamente de la geometría del *espacio, del espacio propiamente dicho.* Pero la teoría de la relatividad restringida prueba —como lo puso de relieve Minkowski— que espacio y tiempo son inseparables, como dos hermanos siameses.

En la geometría puramente espacial de Riemann se considera como fundamental la expresión del elemento lineal que da la distancia entre dos puntos infinitamente vecinos. Pero esta distancia espacial varía si se pasa de un sistema a otro que se mueve con respecto al primero. Lo que se mantiene invariante, lo que goza de un carácter absoluto independiente del sistema de referencia, es la distancia cronotópica entre dos sucesos (§ 41). Si se trata de dos acontecimientos infinitamente vecinos que, respecto de un sistema inercial S, ocurren en dos puntos separados por la distancia espacial $d\sigma$, uno de ellos en el instante t del sistema S y el otro en el instante $t + dt$ del mismo sistema, la distancia elemental cronotópica entre los mismos es:

[63] $$ds^2 = c^2dt^2 - d\sigma^2 \quad ,$$

o sea

[64] $$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Respecto de cualquier otro sistema inercial, esta distancia cronotópica entre los mismos sucesos se mantiene invariable. Pero pasar de un sistema de referencia a otro, implica, en la

representación de Minkowski, efectuar un simple cambio de coordenadas en el continuo espacio-tiempo. Respecto de otras coordenadas $x'\, y'\, z'\, t'$, se tendrá también

[65] $$ds^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2.$$

Este elemento lineal entre dos *acontecimientos* o entre dos *puntos de universo* desempeña entonces el mismo papel que la distancia común entre dos puntos del espacio de la geometría ordinaria. Si hacemos $c dt = du$ la [64] puede escribirse:

[66] $$ds^2 = du^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Si no fuera por el signo diferente entre las coordenadas espaciales y la coordenada temporal, la geometría de la variedad [66] sería euclídea. Debido a esa diferencia en el signo se dice que la [66] corresponde o define una variedad *semieuclídea* de cuatro dimensiones: tres espaciales y una temporal. La diferencia entre una geometría semieuclídea y otra euclídea no es esencial, pues basta tomar un tiempo imaginario $\tau = t\sqrt{-1}$ para hacer que la [66] tome la forma euclídea.

Las geodésicas de la variedad definida por [64] ó [66] son, entonces, líneas rectas y sus ecuaciones podrán escribirse:

$$x - x_0 = A(u - u_0) = Ac(t - t_0)$$
$$y - y_0 = B(u - u_0) = Bc(t - t_0)$$
$$z - z_0 = C(u - u_0) = Cc(t - t_0)$$

donde las constantes A B C significan

$$A = \frac{1}{c}\frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{V_x}{c} \; ; \quad B = \frac{V_y}{c} \; ; \quad C = \frac{V_z}{c} \; ;$$

siendo $V_x\, V_y\, V_z$ las componentes constantes de cierta velocidad según los ejes $x\, y\, z$.

El principio de inercia de Galileo se traduce entonces geométricamente, diciendo: *Un cuerpo sobre el que no actúa ninguna fuerza sigue una geodésica de la variedad espacio-tiempo.* Debe entenderse que se trata de la variedad de espacio-tiempo definida por [64] y que corresponde a una región galileana donde es válida la relatividad restringida. Esas geodésicas son líneas rectas y si el cuerpo está en reposo con respecto a determinado sistema, es porque en dicho sistema el eje del tiempo y la geodésica que recorre el cuerpo son rectas paralelas.

En un campo gravitatorio, por ejemplo, de un lugar de la superficie de la Tierra, un cuerpo abandonado a sí mismo se mueve siguiendo, en general, una línea curva. Si cae según la vertical del lugar, su trayectoria espacial es una línea recta, pero su trayectoria espacio-temporal es una curva que puede considerarse, si el recorrido espacial no es muy grande, como un arco de parábola. La trayectoria curva que sigue un cuerpo

abandonado en un campo gravitatorio, la explicamos diciendo: El cuerpo, por inercia, tiende a seguir una línea recta y si se desvía de la misma, es porque actúa sobre él una fuerza que es justamente la que el campo ejerce sobre el mismo y que, en la superficie de la Tierra, denominamos *peso del cuerpo*. Pero esta interpretación no es la única posible. Podría suponerse que sobre un cuerpo situado en un campo gravitatorio *no actúa ninguna fuerza* y la trayectoria curva que aquél describe en el espacio-tiempo, cuando se le deja libre, sería simplemente una geodésica de una variedad no euclídea. En un lugar donde el campo gravitatorio es nulo —en una región galileana— vale la geometría euclídea, o, mejor, la geometría semieuclídea de Minkowski. Pero en un campo gravitatorio, la geometría del espacio-tiempo sería otra. En la mecánica de Newton el espacio es euclideano y las órbitas que describen los planetas alrededor del Sol se explican por la acción de una fuerza particular que emana de la masa solar. Pero puede intentarse explicar esto mismo admitiendo que en los alrededores del Sol el espacio-tiempo es curvo, de tal modo que las órbitas de los planetas que en ese espacio-tiempo se parecen a hélices (si se toma para el eje del tiempo una línea perpendicular al plano de la órbita), resulten geodésicas de aquella variedad curvada que tiene tres dimensiones espaciales y una temporal.

Se comprende la posibilidad de explicar las cosas de este modo, *geometrizando* el campo gravitatorio, con el ejemplo siguiente. Supongamos que horadamos la Tierra diametralmente de parte a parte. Tendremos, así, un pozo con dos bocas: una aquí y otra en el lugar donde se encuentran nuestros antípodas. Si la Tierra fuera esférica y homogénea es fácil demostrar,

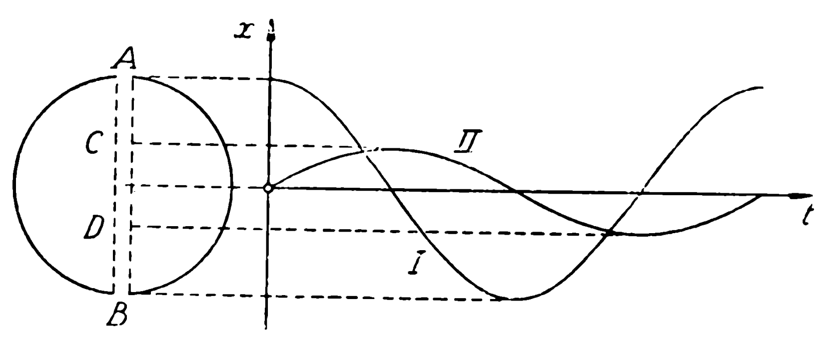


Fig. 110. — Movimiento de un cuerpo en el interior de un túnel que atravesara la Tierra diametralmente.

aplicando la ley de gravitación de Newton, que sobre un cuerpo colocado en el interior de ese túnel se ejercerá una fuerza proporcional a la distancia que lo separa del centro de la Tierra. Por esta razón, si se dejara caer un cuerpo por ese largo tubo, su movimiento sería vibratorio armónico. En la fig. 110 se ha

representado x (distancia del cuerpo al centro de la Tierra) en función del tiempo, representando la curva I el movimiento de un cuerpo que en el instante cero está en A y la II el movimiento de otro cuerpo que en ese mismo instante cero pasa por la posición de equilibrio (el centro de la Tierra) y que se mueve entre C y D. Las curvas que dan x en función del tiempo son, entonces, sinusoides cuya amplitud es igual o menor que el radio terrestre. En el caso que estamos considerando se tiene una única coordenada espacial x, y la coordenada temporal t. La variedad espacio-tiempo tiene, entonces, dos dimensiones. El problema consiste ahora en lo siguiente: Si se supone que sobre el cuerpo colocado en el túnel no actúa ninguna fuerza, ¿qué forma podría tener la superficie espacio-tiempo (x, t) para que las geodésicas de la misma sean sinusoides? Este problema, que a primera vista parece ser de una dificultad tremenda, puede resolverse, no obstante, con suficiente aproximación, de una manera muy simple. En una superficie esférica, las geodésicas son arcos de círculo máximo y la superficie que buscamos podría ser, como se comprenderá bien pronto, la "zona ecuatorial" de una gran esfera de radio R (fig. 111), convenientemente elegido. Consideraremos que las líneas del tiempo son las

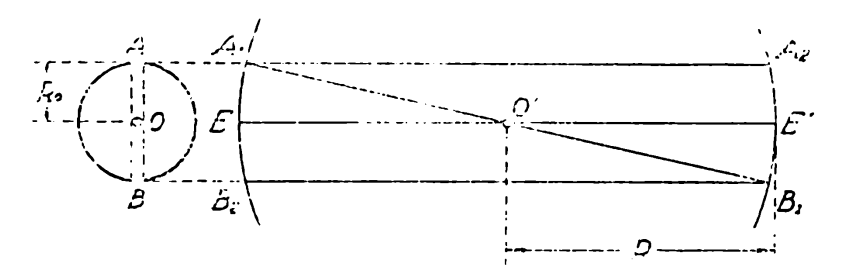


Fig. 111. — Geodésica de una superficie espacio-tiempo esférica y movimiento vibratorio armónico.

circunferencias paralelas al ecuador EE'. De este modo, si un punto se encuentra en reposo en el centro O del túnel, "recorrerá" la línea del tiempo EE'. Esta línea EE' es la única línea del tiempo que es una geodésica de la superficie y, por tal razón, un cuerpo situado en O, y libre, puede permanecer en reposo. Pero si el cuerpo se encuentra en A, en la boca del túnel, sólo si estuviera sostenido por algún vínculo o apoyado sobre algo podría recorrer la línea del tiempo A_1A_2 (sin que varíe x), pues esta línea no es una geodésica de la superficie esférica de centro en O'. Si el cuerpo colocado en la boca del túnel queda libre, "recorrerá" la geodésica de la superficie espacio-tiempo que pasa por A_1 y esa geodésica es la circunferencia máxima A_1B_1. El arco A_1E es igual a R_0, o sea igual al radio de la Tierra, de modo que decir que el cuerpo recorre la

geodésica A_1B_1 significa que en el tiempo representado por el arco EO′, el cuerpo pasa de A á O, y en el tiempo O′E′, recorre espacialmente la distancia $E'B_1$, lo que significa que dicho cuerpo, en el tiempo representado por la semicircunferencia EE′, pasa en el túnel de A á B. La geodésica se cierra en otro semiperíodo al pasar el cuerpo de B á A, que corresponde a la semicircunferencia B_1A_1 de la parte de atrás de la figura.

Si el período del movimiento vibratorio es T, deberemos tomar la longitud de la circunferencia ecuatorial EE′ igual a *c*T, por lo cual

$$[67] \qquad 2\pi R = cT = u_0.$$

Por otra parte, aceptando la validez de la ley de gravitación de Newton y suponiendo a la Tierra esférica y homogénea, se encuentra fácilmente que el período T es (§ 115, *c*):

$$[68] \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{R_0}{g}}$$

siendo R_0 el radio de la Tierra y g el valor de la aceleración de la gravedad en su superficie.

De [67] y [68] se obtiene:

$$[69] \qquad R = c\sqrt{\frac{R_0}{g}}$$

y para el caso concreto de la Tierra, se encuentra que R es igual a 37970 R_0, por lo cual el ángulo $A_1O'E$ de la fig. 111 no alcanza a valer ni siquiera 6″ de arco. Por esta razón, la estrecha zona ecuatorial de la superficie esférica espacio-tiempo que nos interesa, puede representarse muy bien en un plano. Para hacer el "mapa" de esta zona, bastará considerar un cilindro tangente a la esfera en la línea ecuatorial EE′ y desarrollarlo. ¿Cómo aparecerán en este mapa las geodésicas contenidas en la zona limitada por los paralelos A_1A_2 y B_1B_2? Esas geodésicas (fig. 112) podrán considerarse como intersecciones de planos oblicuos con la superficie cilíndrica, por lo cual, como se ve en la figura, se tendrá

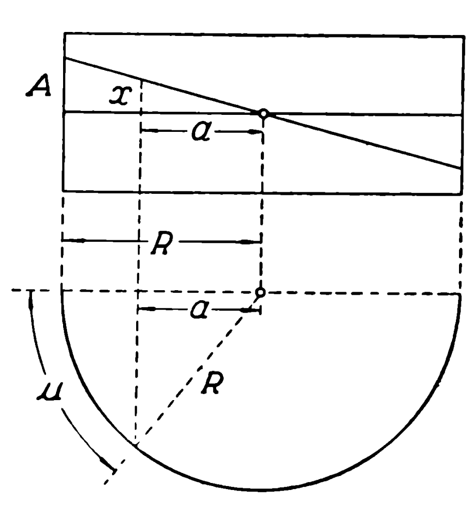


Fig. 112. — Las geodésicas son sinusoides.

$$\frac{x}{a} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{R}},$$

siendo

$$a = \mathrm{R} \cos \frac{u}{\mathrm{R}},$$

de donde

[70] $$x = \mathrm{A} \cos \frac{u}{\mathrm{R}}.$$

El arco u es igual a ct, por lo cual, reemplazando en [70] el valor de R dado en [69], resulta:

[71] $$x = \mathrm{A} \cos \sqrt{\frac{g}{\mathrm{R}_0}}\, t.$$

Las geodésicas de esa superficie espacio-tiempo son, por lo tanto, sinusoides y de ahí el movimiento vibratorio de un punto material que se pueda mover libremente en el túnel. Para la boca de éste, la amplitud A es igual al radio R_0 de la Tierra, por lo cual, para la superficie terrestre o regiones próximas a la misma, se tendrá:

[72] $$x = \mathrm{R}_0 \cos \sqrt{\frac{g}{\mathrm{R}_0}}\, t.$$

Como para valores pequeños del tiempo el argumento del coseno es pequeño, aplicando la fórmula

$$\cos \varepsilon = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}$$

resulta

[73] $$x = \mathrm{R}_0 - \frac{1}{2} g t^2$$

y se podría interpretar, así, el movimiento uniformemente acelerado que experimentan los cuerpos al caer *.

El lector se dirá: "Bien, parece que todo se reduce a un artificio matemático, en que se trata de encontrar variedades geométricas cuyas geodésicas representen las trayectorias de los cuerpos que se mueven libremente en un campo gravitatorio". Pero es posible que agregue: "Con todo esto, no puedo darme cuenta del por qué debo hacer cierto esfuerzo para sostener a este cuerpo pesado, si es cierto que sobre él la Tierra no ejerce ninguna fuerza de atracción". Si es así, le bastará pensar en la caja que, respecto de un sistema inercial, se mueve con movimiento uniformemente acelerado. En ella, los cuer-

* La superficie espacio-temporal del ejemplo no corresponde con la solución real del problema, entre otras razones porque en esta última la parte espacial y temporal del cuadrado del elemento lineal deben tener signos opuestos, y no el mismo signo, como sucede si la superficie es esférica.

pos también se aprietan contra el piso, como si existiera una fuerza de atracción "hacia abajo". Pero no hay tal, pues se trata simplemente de una fuerza de inercia, ya que en el interior de la caja el "peso" de un cuerpo es igual a su masa inerte por la aceleración de la misma. Cuando un automóvil describe una curva cerrada, los pasajeros del mismo sienten también el efecto de la fuerza centrífuga, que es una fuerza de inercia.

Al sostener este libro —¡tan pesado!— usted piensa que la Tierra lo atrae, pero no hay tal atracción: Si el libro estuviera libre seguiría una geodésica del espacio-tiempo y caería con cierta aceleración g, pero usted no lo deja libre, lo mantiene en reposo y lo obliga de ese modo a seguir una línea del tiempo que *no es una geodésica,* y la fuerza que usted hace es igual a la masa inerte del cuerpo por la aceleración con que caería si estuviera libre. ¡Ah, por eso la masa inerte es igual a la masa pesante! Mejor dicho: no hay tal masa pesante; la única masa de los cuerpos es su masa inerte.

Si usted ha captado la idea central del problema, verá entonces que tampoco se trata de un artificio o un juego matemático de encontrar variedades geométricas cuyas geodésicas representen el movimiento de los cuerpos en un campo gravitatorio. Si se busca representar el movimiento de los cuerpos de ese modo, es para dar cuenta de este hecho asombroso: Un trozo de oro, otro de plomo y otro de... cualquier substancia, caen en la superficie de la Tierra con la misma aceleración y si las condiciones iniciales son idénticas, describirán todos ellos, exactamente, la misma trayectoria.

Saque usted de su órbita al planeta Marte y ponga en su lugar, dándole la misma velocidad, a un cuerpo cualquiera y la trayectoria será, en ambos casos, la misma. Esta trayectoria, considerada en su forma espacial y considerada también en función del tiempo, es una línea que no depende para nada de la naturaleza del cuerpo que la recorre *, y esto, que se presenta sin explicación en la mecánica newtoniana —la famosa proporcionalidad entre las masas pesante e inerte— aparece aquí como lo más natural y lo más sencillo: esas trayectorias son simplemente geodésicas del espacio-tiempo que siguen por igual, como se natural, el oro y el hierro.

86. **Los potenciales gravitatorios de Einstein.** — En una región donde el campo gravitatorio es nulo, el elemento lineal está dado por la [64] o la [66]. Si el campo gravitatorio no es nulo, la geometría de la región donde se hagan sentir sus influencias ya no será euclídea (o semieuclídea), pues las geodésicas del espacio-tiempo tendrán que ser curvas en lugar de rectas.

* Con tal que la masa del cuerpo considerado no sea demasiado grande como para influir en el campo gravitatorio.

El elemento lineal que da la distancia cronotópica entre dos acontecimientos infinitamente vecinos, tendrá la forma

[74] $$ds^2 = \Sigma g_{ik} dx_i dx_k$$

tomando los índices $i\ k$ los valores 0, 1, 2, 3. Si identificamos

x_0 con $u = ct$; x_1 con x ; x_2 con y ; x_3 con z ;

el desarrollo explícito de [74], sería:

[75] $$\begin{aligned} ds^2 = g_{00}du^2 &+ 2g_{01}dudx + 2g_{02}dudy + 2g_{03}dudz \\ &+ g_{11}dx^2 + 2g_{12}dxdy + 2g_{13}dxdz \\ &+ g_{22}dy^2 + 2g_{23}dydz \\ &+ g_{33}dz^2. \end{aligned}$$

Estos diez coeficientes g_{ik}, funciones de las coordenadas, son los llamados potenciales gravitatorios de Einstein. En un campo nulo, la [75], eligiendo convenientemente las coordenadas, debe coincidir con la [66], siendo entonces:

[76] $$g_{00} = 1 \ ; \ g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1 \ ; \qquad g_{ik} = 0 \ \text{si} \ i \neq k.$$

El problema consiste en determinar, para un campo dado, por ejemplo el campo originado por la masa solar, las diez funciones g_{ik}. Una vez conocidas estas funciones, el problema físico se convertiría en el problema puramente matemático de determinar las geodésicas de la variedad [74] y comparar los resultados así obtenidos con las trayectorias calculadas a partir de la ley de gravitación de Newton que, como se sabe, da cuenta, en forma casi perfecta, de las observaciones.

Pero ¿cómo obtener esas funciones?

Ante todo, pensemos en el principio de equivalencia según el cual, si la caja K′ se mueve con movimiento uniformemente acelerado respecto del sistema inercial K, se comporta como cierto campo gravitatorio Q. Esto permite describir lo que pasa en K′ —como ya lo hicimos notar— de dos modos diferentes:

1) K′ se mueve con movimiento acelerado respecto de K.

2) K′ está en reposo en un campo gravitatorio de ciertas características.

Si fijamos nuestra atención en esta segunda manera de describir las cosas, llegamos a la conclusión de que, *con todo derecho*, los observadores de K′ pueden suponerse en reposo. Desde allí, desde K′, verán que los cuerpos fijos respecto de K se mueven con movimiento acelerado y dirán: claro, esos cuerpos caen por la acción del campo gravitatorio. En la relatividad restringida todos los sistemas de referencia que se trasladan los unos respecto de los otros con movimiento uniforme son equivalentes, pues cualquiera de ellos puede suponerse en re-

poso. Las leyes deben conservar la misma forma cuando se pasa de un sistema a otro aplicando las ecuaciones de Lorentz.

Aquí nos encontramos con el hecho de que los observadores del sistema K′ (no inercial), pueden suponerse en reposo con el mismo derecho que los observadores del sistema K. El pasaje de K′ a K implica un cambio de coordenadas que, en general, no será lineal, y, no obstante, tanto K′ como K pueden considerarse en reposo. ¿Qué significa esto de que pueden considerarse en reposo? Significa que ambos sistemas son igualmente lícitos, igualmente permitidos, y para que esto sea así es necesario que las leyes de la naturaleza tengan la misma forma, tanto referidas a K como a K′.

Por lo tanto, el principio de equivalencia puede enunciarse de la siguiente manera:

SEGUNDO ENUNCIADO DEL PRINCIPIO DE EQUIVALENCIA: *El sistema inercial* K *y el sistema* K′, *que se mueve respecto de* K *con movimiento uniformemente acelerado son entre sí equivalentes.*

En este enunciado la palabra "equivalencia" no tiene el significado de "comportamiento idéntico" que tenía en el primer enunciado * (§ 76). En el primer enunciado se relaciona K′ con la región Q del campo gravitatorio, en tanto que en el segundo enunciado se relaciona K′ con el sistema inercial K. Al afirmar que ambos sistemas son equivalentes, se afirma que las leyes de la naturaleza deben tener la misma forma tanto referidas a un sistema como al otro. El segundo enunciado del principio de equivalencia es la generalización natural del principio de relatividad de la teoría restringida.

Las leyes de la naturaleza deben entonces expresarse de manera tal que conserven su forma para cualquier cambio de coordenadas. Éste es el principio de *covariancia universal* a que deben satisfacer todas las leyes naturales frente a cualquier cambio del sistema de referencia. Pero para poder expresar las leyes de la naturaleza de modo tal que conserven su forma frente a *cualquier sustitución de coordenadas*, es necesario que las mismas sean formuladas "tensorialmente", como veremos en el capítulo próximo.

* El principio de equivalencia enunciado así, aparece en la memoria de Einstein titulada "Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie" ("Los fundamentos de la teoría general de la relatividad"), "Annalen der Physik", 49, pág. 769, 1916.

Capítulo VII

ELEMENTOS DE CALCULO TENSORIAL

87. **Concepto general.** — En el capítulo anterior hemos dado la idea de cómo se puede hacer "geometría interna", que es la que efectivamente hacían sobre una superficie aquellos geómetras chatos que nos sirvieron de ejemplo. Ellos, sin salir de su mundo de dos dimensiones, podían reconocer, interpretando sus medidas, si se encontraban viviendo sobre un plano, sobre una superficie esférica o sobre otra de curvatura negativa. En un mundo de tres dimensiones se puede, en principio, proceder de la misma manera y estudiar la estructura geométrica del mismo sin apelar a una cuarta dimensión. Piénsese, por ejemplo, en la geometría esférica de Riemann de tres dimensiones.

Si pensamos en una superficie de dos dimensiones y elegimos para el estudio de la misma un sistema particular de coordenadas (sobre la superficie de la Tierra la red de meridianos y paralelos), nos encontramos con que ciertas propiedades son independientes del sistema de coordenadas que se ha elegido. La curvatura en un punto determinado de la superficie, si ésta es un elipsoide, será variable de punto a punto y se expresará en función de las coordenadas, pero al pasar de un sistema a otro, la curvatura seguirá siendo en cada punto la misma. Igual ocurre con la línea geodésica que une dos puntos de la superficie. Esta línea, en el caso de una superficie plana, es una recta y su ecuación en coordenadas cartesianas es bien diferente a su ecuación en coordenadas polares; pero la línea más corta que une dos puntos determinados de una superficie es algo independiente del sistema de coordenadas, es una propiedad intrínseca de la superficie misma y el cálculo diferencial absoluto o cálculo tensorial procura dar una ecuación general de la misma que sea válida en cualquier sistema de coordenadas.

Si en un sistema particular de coordenadas se tiene un ente llamado "tensor", definido por cierto número de *funciones* de esas mismas coordenadas, funciones que se llaman componentes del tensor (un campo de vectores, por ejemplo, en el espacio común), al efectuar un cambio de coordenadas existen ciertas reglas que permiten calcular las componentes de aquel ente

en el nuevo sistema. Las nuevas componentes se expresan en forma lineal y homogénea en función de las antiguas, por lo cual, si todas las componentes de un tensor son nulas en un sistema de coordenadas, serán también nulas en cualquier otro. De aquí que si determinada ley física se expresa por la anulación de todas las componentes de un tensor, esa ley valdrá para cualquier sistema de coordenadas. Para satisfacer el principio general de la relatividad, o sea para que las leyes se expresen de idéntico modo en todos los sistemas de referencia (traducción matemática, sistemas de coordenadas), será suficiente, entonces, expresar a las mismas por la anulación de las componentes de determinado tensor. El cálculo tensorial proporciona, de este modo, el instrumento matemático necesario para satisfacer la exigencia de la covariancia universal de las leyes naturales frente a cualquier sustitución de las coordenadas. Casi inmediatamente después de haber dado a conocer su teoría restringida de la relatividad, en 1905, procuró Einstein generalizarla para toda clase de movimientos, pero no poseía entonces la herramienta de cálculo que le hacía falta. En el año 1911, siendo profesor de física teórica en la universidad alemana de Praga (dependiente entonces del imperio austríaco), trabó amistad con el profesor de matemática de la misma universidad, GEORG PICK, que en su juventud había sido ayudante de ERNESTO MACH en la cátedra de física experimental. Y fué Pick el que le señaló a Einstein la memoria de los matemáticos italianos RICCI y LEVI CIVITA, aparecida en 1900 y titulada "Methodes de calcul differentiel absolu et leurs applications", que proporcionaba de un modo completo y perfecto el instrumento adecuado para generalizar la teoría de la relatividad a cualquier clase de movimientos.

88. **Cuadrivectores contravariantes y covariantes.** — Si en una variedad de dos dimensiones tenemos un sistema de coordenadas que designamos por $x_1 x_2$ y pasamos a otro sistema $x'_1 x'_2$ (por ejemplo, de coordenadas cartesianas a polares en el plano), las nuevas coordenadas serán ciertas funciones de las antiguas, que podrán expresarse así:

[1]
$$x'_1 = x'_1(x_1, x_2),$$
$$x'_2 = x'_2(x_1, x_2).$$

Los diferenciales de las coordenadas serán:

[2]
$$dx'_1 = \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} dx_2 \quad ,$$
$$dx'_2 = \frac{\partial x'_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} dx_2 \quad .$$

Si la variedad considerada tiene cuatro dimensiones y

$x_0\, x_1\, x_2\, x_3$ (más adelante x_0 será la coordenada temporal y $x_1\, x_2\, x_3$ las coordenadas espaciales) representan las coordenadas de un sistema determinado, al pasar a otro sistema $x'_0 x'_1 x'_2 x'_3$, las cuatro funciones que determinan el cambio de coordenadas podrán expresarse del siguiente modo:

$$[3] \qquad x'_i = x'_i(x_0, x_1, x_2, x_3)$$

donde el índice i toma los valores 0, 1, 2, 3. Las cuatro funciones [3] deben ser invertibles de modo unívoco, o sea, a un punto de universo del sistema S debe corresponder un único punto del sistema S′ y viceversa.

Además, las funciones deben ser *regulares*, lo que significa que son finitas y continuas, lo mismo que sus derivadas. Si la variedad tiene cuatro dimensiones, las [3] deben ser cuatro funciones independientes, para satisfacer lo cual es necesario que el determinante funcional sea distinto de cero. Éstas son las condiciones matemáticas a que deben satisfacer las funciones [3], pero físicamente será necesario imponer a las mismas más restricciones. Si x_0 es la coordenada temporal, un cambio de coordenadas tal como $x'_0 = -x_0$ matemáticamente lícito, es físicamente absurdo, pues tal cambio significaría invertir el orden del tiempo. De otras restricciones de carácter físico, que deben imponerse a las funciones [3], y originadas por el hecho de que una de las coordenadas es temporal y las otras tres espaciales, nos ocuparemos más adelante (§ 122).

Los diferenciales de las variedades acentuadas de [3], en función de los diferenciales de las otras, se expresan así:

$$[4] \qquad dx'_i = \sum_j \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}\, dx_j$$

donde la suma se extiende de cero a tres. Así, por ejemplo, haciendo $i = 2$ resulta:

$$dx'_2 = \frac{\partial x'_2}{\partial x_0}\, dx_0 + \frac{\partial x'_2}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial x'_2}{\partial x_2}\, dx_2 + \frac{\partial x'_2}{\partial x_3}\, dx_3.$$

Para simplificar la escritura se conviene en suprimir en la [4] el signo de suma, *sobreentendiéndose* que la suma debe efectuarse con respecto al índice, o a los índices, que aparezcan repetidos y que en el caso de la [4] es j. Este índice repetido y cuyo valor se hace variar entre cero y tres lo llamaremos *índice móvil* *, y no tiene significado por sí mismo, por lo cual puede ponerse en su lugar cualquier letra. Por lo tanto, la [4] podrá escribirse:

* Los franceses lo llaman índice *muet*, que significa índice mudo, pero nosotros preferimos llamarlo móvil (o movible), pues nos parece que así se indica mejor su carácter

[5] $$dx'_i = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} dx_j \quad ,$$

ó

$$dx'_i = \frac{\partial x'_i}{\partial x_r} dx_r \quad .$$

Si se tiene un conjunto de cuatro magnitudes A^i cuyas componentes A^0, A^1, A^2, A^3, se transforman de la misma manera que los diferenciales de las coordenadas, o sea siguiendo la ley [5], se dirá de ese conjunto que es un *cuadrivector contravariante* o también un *tensor contravariante de primer orden.*

Si llamamos A'^i a las componentes de ese cuadrivector contravariante en el nuevo sistema de coordenadas, se tendrá

[6] $$A'^i = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} A^j \quad .$$

El cuadrivector impulso que ya conocemos (§ 47), y que se transforma igual que las coordenadas, es un tensor de primer orden contravariante en el universo semieuclídeo de Minkowski, y veremos más adelante (§ 95) cómo, por aplicación de las [6], se pueden encontrar sus componentes cuando el cambio de coordenadas corresponde a una transformación de Lorentz.

De acuerdo con la definición [6], se sigue de inmediato que si A^i y B^i son cuadrivectores contravariantes, su suma

[7] $$A^i \pm B^i = C^i$$

también será un cuadrivector contravariante. Esto mismo es válido para todos los tensores que se introducirán más adelante.

Si se tienen cuatro magnitudes A_i y un cuadrivector contravariante *cualquiera* B^i y se cumple que

[8] $$A_iB^i = A_0B^0 + A_1B^1 + A_2B^2 + A_3B^3 = \text{invariante},$$

las A_i son las componentes de un *cuadrivector covariante* o, lo que es lo mismo, de un *tensor covariante de primer orden.*

De la definición [8] resulta

[9] $$A'_iB'^i = A_jB^j.$$

Ahora bien, si invirtiendo las [3] se expresan las x en función de las x', o sea

[10] $$x_j = x_j(x'_0, x'_1, x'_2, x'_3)$$

los diferenciales de las x se expresarán:

[11] $$dx_j = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} dx'_i.$$

Como un cuadrivector contravariante se transforma igual

que los diferenciales de las coordenadas, bastará reemplazar en [11] dx_j por B^j y dx'_i por B'^i para obtener

[12] $$B^j = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} B'^i$$

y llevando este valor al segundo miembro de la [9], se tiene

[13] $$A'_i B'^i = A_j \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} B'^i .$$

Pero las $B'^i (B'^0 B'^1 B'^2 B'^3)$ son independientes entre sí y sus valores pueden ser cualesquiera, por lo cual será

[14] $$A'_i = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} A_j$$

que expresa la ley de transformación de las componentes de los cuadrivectores covariantes.

El carácter de un tensor se señala colocando el índice en la parte superior si es contravariante y en la parte inferior si es covariante. Los diferenciales de las coordenadas, que dada su ley de transformación constituyen tensores contravariantes de primer orden, hacen excepción a esta regla, pues en ellos los índices se colocan en la parte inferior para que "no choquen" con los exponentes. Algunos autores colocan los índices de los diferenciales en la parte superior.

Esta *regla* del lugar donde se colocan los índices permite escribir de inmediato las fórmulas [6] ó [14], con sólo tener presente que:

tensor contravariante: *índice fijo* (i) *arriba*: [6]
tensor covariante: *índice fijo* (i) *abajo*: [14]

teniendo en cuenta, además, que *la letra que lleva el índice fijo* (i) *en el segundo miembro debe tener el mismo acento que en el primer miembro.*

89. **Tensores de orden superior.** — Si se tienen dos tensores contravariantes de primer orden, P^i Q^j, y se forman los 16 productos entre las componentes de ambos, este conjunto de 16 magnitudes (funciones) constituye un *tensor contravariante de segundo orden* A^{ij}:

[15] $$A^{ij} = P^i Q^j \quad ;$$

o explícitamente

$$A^{00} = P^0 Q^0 \quad ; \quad A^{01} = P^0 Q^1 \quad ; \quad \ldots \quad A^{12} = P^1 Q^2 \quad ;$$
$$\ldots \quad A^{33} = P^3 Q^3 .$$

La ley de transformación resulta, de acuerdo con [6]:

[16] $$A'^{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_r} \frac{\partial x'_j}{\partial x_s} A^{rs}$$

donde en el segundo miembro se tiene una suma doble respecto de los índices móviles (repetidos) r y s. Cualquier conjunto de 16 magnitudes que se transforme de acuerdo con [16] constituye un tensor contravariante de segundo orden, aun cuando sus componentes no provengan del producto de las componentes de dos cuadrivectores contravariantes.

Análogamente, las 16 magnitudes

[17] $$A_{ij} = P_i Q_j$$

provenientes del producto de las componentes de los dos cuadrivectores covariantes $P_i Q_j$ y que se transforman, de acuerdo con [14], según la ley

[18] $$A'_{ij} = \frac{\partial x_r}{\partial x'_i} \frac{\partial x_s}{\partial x'_j} A_{rs}$$

constituyen un *tensor covariante de segundo orden.*

Un tensor de tercer orden, contravariante, está constituído por un conjunto de $4^3 = 64$ magnitudes y puede considerarse formado por el producto de las componentes de tres cuadrivectores contravariantes:

[19] $$A^{ijk} = P^i Q^j R^k.$$

Su ley de transformación es

[20] $$A'^{ijk} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_r} \frac{\partial x'_j}{\partial x_s} \frac{\partial x'_k}{\partial x_t} A^{rst}.$$

Un tensor covariante de tercer orden, cuyas componentes pueden considerarse formadas por los productos $P_i Q_j R_k$, se transformará así:

[21] $$A'_{ijk} = \frac{\partial x_r}{\partial x'_i} \frac{\partial x_s}{\partial x'_j} \frac{\partial x_t}{\partial x'_k} A_{rst}.$$

Al escribir estas fórmulas se aplica constantemente la regla dada al finalizar el párrafo precedente y para no equivocarse en la escritura, conviene escribir primero las letras que corresponden a los índices fijos, que son los que figuran en el primer miembro.

De modo análogo se puede definir un tensor covariante o contravariante de un orden cualquiera.

Un *tensor mixto* de segundo orden puede considerarse como el conjunto de las 16 magnitudes, que se obtienen multiplicando entre sí las componentes de un cuadrivector contravariante P^i por las de otro covariante Q_j:

[22] $$A^i{}_j = P^i Q_j.$$

Se ve, de inmediato, que la ley de transformación es, en este caso,

[23] $$A'^{i}{}_{j} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_r} \frac{\partial x_s}{\partial x'_j} A^{r}{}_{s}.$$

Pueden construirse tensores mixtos de cualquier orden covariantes respecto de unos índices y contravariantes respecto de otros. El tensor

$$A^{ij}{}_{klm}$$

es de quinto orden, contravariante respecto de los índices ij y covariante con respecto a klm y su ley de transformación es:

[24] $$A'^{ij}{}_{klm} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_r} \frac{\partial x'_j}{\partial x_s} \frac{\partial x_t}{\partial x'_k} \frac{\partial x_u}{\partial x'_l} \frac{\partial x_v}{\partial x'_m} A^{rs}{}_{tuv}$$

(suma quíntuple respecto de los índices que se repiten: $r\,s\,t\,u\,v$).

En los ejemplos que preceden hemos escrito siempre en el primer miembro las componentes acentuadas. En el caso inverso se tendrá, por ejemplo:

[25] $$A^{ij}{}_{klm} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_r} \frac{\partial x_j}{\partial x'_s} \frac{\partial x'_t}{\partial x_k} \frac{\partial x'_u}{\partial x_l} \frac{\partial x'_v}{\partial x_m} A'^{rs}{}_{tuv}.$$

90. **Multiplicación de tensores.** — La [15] expresa el *producto exterior* de los tensores contravariantes de primer orden P^iQ^j, producto que da lugar a un tensor contravariante de segundo orden. En la [17], por el producto exterior de los tensores covariantes de primer orden P_iQ_j, se obtiene el tensor covariante de segundo orden A_{ij}. El producto representado en [19] podría escribirse:

[26] $$A^{ijk} = (P^iQ^j)R^k = B^{ij}R^k$$

y se ve así que, multiplicando un tensor contravariante de segundo orden por otro contravariante de primero, se obtiene un tensor contravariante de tercer orden. La [22] expresa el producto de dos tensores de primer orden, el uno contravariante y el otro covariante. Se ve, de inmediato, generalizando las operaciones ya efectuadas, que de la multiplicación exterior de dos tensores cualesquiera se obtiene otro tensor, cuyo orden es la suma de los órdenes de los tensores factores. El tensor producto será, en general, mixto, y su orden parcial de covariancia y de contravariancia será también igual a la suma de los órdenes parciales respectivos de los factores.

Si se tiene un tensor mixto, de él puede obtenerse un nuevo tensor, cuyo orden resulta disminuído en dos unidades con respecto al orden del tensor primitivo. Para obtener el nuevo tensor, que se llama *tensor contraído,* se igualan en el tensor pri-

mitivo dos índices de carácter opuesto y se efectúa la suma *con respecto a ese índice igual,* que se convierte, así, en un *índice móvil.*

Consideremos, como ejemplo, el producto exterior dado por [22]. El tensor mixto de segundo orden tiene 16 componentes que podemos agrupar en el cuadro

$$\begin{vmatrix} A^0{}_0 & A^0{}_1 & A^0{}_2 & A^0{}_3 \\ A^1{}_0 & A^1{}_1 & A^1{}_2 & A^1{}_3 \\ A^2{}_0 & A^2{}_1 & A^2{}_2 & A^2{}_3 \\ A^3{}_0 & A^3{}_1 & A^3{}_2 & A^3{}_3 \end{vmatrix}$$

De estas componentes las de la diagonal principal (de izquierda a derecha y de arriba abajo), son las que tienen igual índice y, sumándolas, se obtiene:

[27] $$A^i{}_i = (\sum_i A^i{}_i) = A^0{}_0 + A^1{}_1 + A^2{}_2 + A^3{}_3$$

y por [22] y [8]

[28] $$A^i{}_i = P^0Q_0 + P^1Q_1 + P^2Q_2 + P^3Q_3 = \text{invariante.}$$

Un invariante es un *escalar* y conviene considerarlo como un *tensor de orden cero.* La [28] puede considerarse como el *producto interior* de los tensores P^i y Q_j. De modo análogo, del tensor

$$A^{ij}{}_k$$

se puede obtener por contracción un tensor de primer orden contravariante, haciendo $j = k$ y sumando:

[29] $$A^{ij}{}_j = A^{i0}{}_0 + A^{i1}{}_1 + A^{i2}{}_2 + A^{i3}{}_3.$$

Las cuatro componentes de este cuadrivector contravariante se obtienen dándole a i sucesivamente los valores 0, 1, 2, 3. De un tensor de quinto orden, como el representado en [24], puede obtenerse otro de primer orden (y en este caso covariante) si se lo contrae dos veces:

[30] $$\sum_j A^{ij}{}_{klj} = A^i{}_{kl} \quad ; \quad \sum_i A^i{}_{ki} = A_k.$$

91. **Tensores simétricos y antisimétricos.** — Un tensor contravariante de segundo orden, tal que

[31] $$A^{rs} = A^{sr}$$

se dice que es simétrico. De las 16 componentes de un tensor de esta clase, cuatro corresponden a la diagonal principal (A^{00}, A^{11}, etc.) y las 12 restantes se agrupan por partes iguales ($A^{12} = A^{21}$; $A^{13} = A^{31}$; etc.).

Lo mismo ocurre si el tensor es covariante. Un tensor de segundo orden simétrico (covariante o contravariante) tiene, en general, sólo 10 componentes distintas.

Decimos *en general*, pues puede ocurrir que algunas de esas 10 componentes —en un sistema particular de coordenadas— sean iguales entre sí, por ejemplo, $A^{11} = A^{22} = A^{33}$. Pero si se cambia de sistema de coordenadas, estas últimas igualdades podrán no ser válidas, pero si el tensor es simétrico valdrán, en cambio,

[32] $$A'^{ij} = A'^{ji}.$$

La simetría goza, pues, de carácter tensorial, o sea que es ella una propiedad independiente del sistema de coordenadas. Esto se puede probar de un modo muy simple. Se tiene, en efecto, de acuerdo con [16] y [31]:

[33] $$A'^{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_r}\frac{\partial x'_j}{\partial x_s} A^{rs} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_r}\frac{\partial x'_j}{\partial x_s} A^{sr} = \frac{\partial x'_j}{\partial x_s}\frac{\partial x'_i}{\partial x_r} A^{sr} = A'^{ji}.$$

Si en un tensor de segundo orden (covariante o contravariante), las componentes que se obtienen permutando los índices son iguales y de signo opuesto, se dice que el tensor es antisimétrico. Si

[34] $$A^{rs} = - A^{sr} \quad ; \quad A_{rs} = - A_{sr} \quad ;$$

el tensor es antisimétrico y en cualquier sistema de coordenadas conservará este carácter. En un tensor antisimétrico de segundo orden, las componentes de la diagonal principal son necesariamente nulas

[35] $$A^{rr} = - A^{rr} \quad ; \quad A^{rr} = 0 \quad ;$$

y de las doce componentes restantes diferentes de cero, sólo 6 son diferentes en valor absoluto. Estas 6 componentes numéricamente distintas, constituyen las componentes de un *hexavector.*

En un tensor antisimétrico de tercer orden, de sus 64 componentes, sólo cuatro pueden ser diferentes de cero. Estas componentes son:

$$A^{012} \quad ; \quad A^{013} \quad ; \quad A^{023} \quad ; \quad A^{123}.$$

Si el tensor antisimétrico es de cuarto orden A^{rstu} sólo tiene una componente diferente de cero: A^{0123}. En una variedad de cuatro dimensiones se ve que no pueden existir tensores antisimétricos de orden superior al cuarto, pues todas sus componentes tendrían que ser necesariamente nulas.

92. **Los tensores fundamentales.** — La expresión del elemento lineal (capítulo VI, fórmula [74]), con la convención de suprimir el signo de suma, se escribe:

[36] $$ds^2 = g_{ik}dx_i dx_k.$$

El primer miembro es un invariante y los diferenciales de las coordenadas dx_i, dx_k son las componentes de cuadrivectores contravariantes libremente elegibles. El producto de las componentes de los diferenciales da un tensor contravariante de segundo orden, y si se tiene:

[37] $$A_{ik}B^{ik} = \text{invariante}$$

siendo B^{ik} un tensor contravariante *cualquiera* de segundo orden, entonces A_{ik} es un tensor covariante, también de segundo orden. En consecuencia, g_{ik} son las componentes de un tensor covariante de segundo orden, que, además, es simétrico, y que recibe el nombre de *tensor covariante fundamental.*

Si se forma el determinante formado por las componentes de g_{ik}

[38] $$|g_{ik}| = g = \begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}$$

se pueden obtener otras 16 magnitudes g^{ik} del modo siguiente:

[39] $$g^{ik} = \frac{\text{complemento algebraico de } g_{ik}}{g} = \frac{G^{ik}}{g}.$$

Recordemos que el complemento algebraico de un elemento g_{ik} es igual al determinante que se obtiene si se suprime en el determinante original la fila y la columna a que pertenece el elemento, pero considerado con signo *más* si la suma de los índices $(i+k)$ es *par* y con signo *menos* si dicha suma es *impar*. Así, por ejemplo, el complemento algebraico del elemento g_{12} de [38] es:

$$\text{Comp. de } g_{12} = -\begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{03} \\ g_{20} & g_{21} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{33} \end{vmatrix} = G^{12}.$$

Si se calcula el valor del determinante $|g_{ik}|$ partiendo de los elementos de una fila cualquiera, el desarrollo correspondiente, por cierto bien conocido, es:

[40] $$g = \sum_r g_{ir}G^{ir}.$$

Así, por ejemplo, si se hace $i = 0$, el desarrollo correspon-

de a los elementos de la primera línea y la [40], en este caso da:

$$g = \sum_r g_{0r} G^{0r} = g_{00}G^{00} + g_{01}G^{01} + g_{02}G^{02} + g_{03}G^{03}.$$

Como de acuerdo con la definición [39] es:

[41] $$G^{ir} = g \cdot g^{ir}$$

la [40] se convierte en

$$g = g \sum_r g_{ir} g^{ir}$$

de donde

[42] $$\sum_r g_{ir} g^{ir} = 1 \quad ,$$

cuyo desarrollo explícito para $i = 0$, por ejemplo, es:

[42′] $$g_{00}g^{00} + g_{01}g^{01} + g_{02}g^{02} + g_{03}g^{03} = 1.$$

Otras tres relaciones análogas se obtienen haciendo $i = 1$; $i = 2$; $i = 3$.

Si consideramos el determinante formado por los complementos algebraicos de g_{ik} o sea por G^{ik}

[43] $$G^{ik} = \begin{vmatrix} G^{00} & G^{01} & G^{02} & G^{03} \\ G^{10} & G^{11} & G^{12} & G^{13} \\ G^{20} & G^{21} & G^{22} & G^{23} \\ G^{30} & G^{31} & G^{32} & G^{33} \end{vmatrix}$$

la [40] representa la suma de los cuatro productos que se obtienen multiplicando cada elemento de una línea de [38] por el elemento correspondiente de la misma línea de [43]. Si multiplicamos, en cambio, los elementos de una fila de [38] por los correspondientes de otra fila distinta de [43] y sumamos esos cuatro productos, el resultado debe ser cero, pues sería el desarrollo de un determinante que tiene dos filas iguales. Así, por ejemplo,

[44] $$g_{00}G^{10} + g_{01}G^{11} + g_{02}G^{12} + g_{03}G^{13} = 0 \quad ,$$

pues la [44] corresponde al desarrollo de un determinante cuyas dos primeras líneas son iguales.

Por lo tanto, se tendrá, de acuerdo con [42] y a lo que precede, que

[45] $$\sum_r g_{ir} g^{kr} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = k \\ 0 & \text{si} \quad i \neq k \end{cases}$$

Si en [42] sumamos también respecto de i, lo que significa sumar miembro a miembro cuatro igualdades análogas a [42′], obtenemos

[46] $$g_{ik} g^{ik} = 4.$$

El número cuatro es, naturalmente, un invariante, y al pasar a otro sistema de coordenadas los g_{ik} tomarán otros valores g'_{ik} y, en correspondencia con ellos, los g^{ik} se convertirán en g'^{ik}, de tal modo que

[47] $$g_{ik}g^{ik} = g'_{ik}g'^{ik} = \text{invariante}$$

por lo cual, el conjunto de las 16 magnitudes definidas por [39] constituyen las componentes de un tensor contravariante de segundo orden. Se trata del *tensor contravariante fundamental.*

Si se forma el producto exterior de los tensores g_{ir} y g^{ks} se obtiene un tensor mixto de cuarto orden y de $4^4 = 256$ componentes:

[48] $$\delta^{ks}{}_{ir} = g_{ir}g^{ks}.$$

Haciendo $r = s$ y sumando respecto de este índice igual, o sea contrayendo una vez el tensor dado en [48], se obtiene un tensor mixto de segundo orden que se llama *tensor mixto fundamental* y cuya expresión es:

[49] $$\delta^{k}{}_{i} = g_{ir}g^{kr}.$$

De acuerdo con [45], las componentes de este tensor son iguales a 1 si $i = k$ e iguales a cero si i es diferente de k:

[50] $$\delta^{k}{}_{i} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = k \\ 0 & \text{si} \quad i \neq k \end{cases}$$

A pesar del carácter mixto de este tensor, se le designa frecuentemente así: δ_{ik}, y se le conoce con el nombre de *símbolo* (o *delta*) de *Kronecker.*

Ejemplos y aplicaciones

93. **El elemento espacial en coordenadas polares.** — El elemento lineal de *espacio* $d\sigma$ en coordenadas cartesianas y en una variedad euclídea de tres dimensiones, es:

[51] $$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Se trata de hallar su expresión en coordenadas polares. Siendo

[52] $$x = r\cos\theta\operatorname{sen}\varphi \quad ; \quad y = r\cos\theta\cos\varphi \quad ; \quad z = r\operatorname{sen}\theta \quad ;$$

hacemos

[53] $$x_1 = x \quad ; \quad x_2 = y \quad ; \quad x_3 = z \quad ;$$

[54] $$x'_1 = r \quad ; \quad x'_2 = \theta \quad ; \quad x'_3 = \varphi \quad .$$

Si escribimos [51], así:

[55] $d\sigma^2 = a_{ik}dx_i dx_k \quad ; \quad (i, k = 1, 2, 3)$

es

[56] $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1 \quad ; \quad a_{ik} = 0 \quad , \quad \text{si} \quad i \neq k.$

En las nuevas coordenadas será

[57] $d\sigma^2 = a'_{ik}dx'_i dx'_k.$

Se trata de calcular a'_{ik} en función de los a_{ik} y de las ecuaciones de transformación [52]. Como a_{ik} son las componentes de un tensor covariante de segundo orden (ahora en una variedad de tres dimensiones), aplicando [18] tendremos:

$$a'_{ik} = \frac{\partial x_s}{\partial x'_i} \frac{\partial x_t}{\partial x'_k} a_{st}.$$

De aquí obtenemos:

[58] $a'_{11} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial x'_1}\right)^2 a_{11} + \left(\frac{\partial x_2}{\partial x'_1}\right)^2 a_{22} + \left(\frac{\partial x_3}{\partial x'_1}\right)^2 a_{33} \quad ,$

pues a_{12}, a_{13}, etcétera, son iguales a cero. Además, por [52], [53] y [54], es:

$$\frac{\partial x_1}{\partial x'_1} = \frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta \operatorname{sen}\varphi \quad ;$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial x'_1} = \frac{\partial y}{\partial r} = \cos\theta \cos\varphi \quad ;$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial x'_1} = \frac{\partial z}{\partial r} = \operatorname{sen}\theta \quad .$$

Llevando a la [58] estos valores y los dados en [56], resulta

[59] $a'_{11} = 1.$

Análogamente,

[60] $a'_{22} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial x'_2}\right)^2 a_{11} + \left(\frac{\partial x_2}{\partial x'_2}\right)^2 a_{22} + \left(\frac{\partial x_3}{\partial x'_2}\right)^2 a_{33} \quad ;$

$$\frac{\partial x_1}{\partial x'_2} = \frac{\partial x}{\partial \theta} = - r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \quad ;$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial x'_2} = \frac{\partial y}{\partial \theta} = - r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \quad ;$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial x'_2} = \frac{\partial z}{\partial \theta} = r \cos\theta \quad ;$$

y reemplazando en [60]:

[61] $a'_{22} = r^2.$

Del mismo modo, se obtiene:

[62] $$a'_{33} = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 = r^2 \cos^2 \theta .$$

Además, es:

$$a'_{12} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial \theta} =$$

$$= - r \operatorname{sen} \theta \cos \theta \operatorname{sen}^2 \varphi - r \operatorname{sen} \theta \cos \theta \cos^2 \varphi +$$

$$+ r \operatorname{sen} \theta \cos \theta = 0 \quad ;$$

$$a'_{13} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial \varphi} =$$

$$= r \cos^2 \theta \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi - r \cos^2 \theta \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi = 0 \quad ;$$

$$a'_{23} = \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial z}{\partial \varphi} =$$

$$= - r^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi + r^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi = 0 .$$

De este modo, la [57] da:

[63] $$d\sigma^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \cos^2 \theta d\varphi^2 .$$

Claro está que si a partir de las [52] se calculan dx, dy, dz, se elevan al cuadrado y se suman, se obtiene la [63].

94. **Aplicación a la transformación de Lorentz.** — En una región donde es válida la relatividad restringida, el elemento lineal de espacio-tiempo, en determinado sistema de coordenadas, se expresa:

[64] $$ds^2 = du^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad ,$$

donde $u = ct$. Si se efectúa un cambio de coordenadas correspondiente a una transformación de Lorentz:

[65] $$u = \frac{u' + x' \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \quad ; \quad x = \frac{x' + u' \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \quad ;$$

$$y = y' \quad ; \quad z = z' \quad ;$$

en que $\operatorname{sen} \alpha = v/c$ se trata de hallar, siguiendo el procedimiento del ejercicio anterior, la expresión del ds^2 en el nuevo sistema. Haciendo

$$x_0 = u \quad ; \quad x_1 = x \quad ; \quad x_2 = y \quad ; \quad x_3 = z$$

$$x'_0 = u' \quad ; \quad x'_1 = x' \quad ; \quad x'_2 = y' \quad ; \quad x'_3 = z'$$

los g_{ik} de la [64], son:

$$g_{00} = 1 \quad ; \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1 \quad ;$$

$$g_{ik} = 0 \quad , \quad \text{si} \quad i \neq k$$

y calcularemos los g'_{ik} en el nuevo sistema por la [18], resultando, así:

$$g'_{00} = 1 \quad ; \quad g'_{11} = g'_{22} = g'_{33} = -1 \quad ;$$
$$g'_{ik} = 0 \quad , \quad \text{si} \quad i \neq k .$$

Veamos, como ejemplo, cómo se encuentra el valor de la primera componente:

$$g'_{00} = \left(\frac{\partial u}{\partial u'}\right)^2 g_{00} + \left(\frac{\partial x}{\partial u'}\right)^2 g_{11} + \left(\frac{\partial y}{\partial u'}\right)^2 g_{22} + \left(\frac{\partial z}{\partial u'}\right)^2 g_{33} =$$
$$= \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 1 .$$

95. **Transformación del cuadrivector impulso.** — Se tiene un cuadrivector contravariante que, respecto de un sistema de coordenadas S′ —donde vale la relatividad restringida—, tiene por componentes:

$$I'^0 = m_0 c \quad ; \quad I'^1 = I'^2 = I'^3 = 0 .$$

Se quieren hallar las componentes de ese cuadrivector en un sistema S que se transformará, de acuerdo con [6], pudiendo escribir en este caso y teniendo en cuenta la regla dada al finalizar el párrafo 89:

$$I^i = \frac{\partial x_i}{\partial x'_j} I'^j \quad ,$$

de donde, si las ecuaciones de transformación son las [65], resulta:

$$I^0 = \frac{\partial x_0}{\partial x'_0} I'^0 = \frac{\partial u}{\partial u'} m_0 c = \frac{m_0 c}{\cos \alpha} \quad ;$$
$$I^1 = \frac{\partial x_1}{\partial x'_0} I'^0 = \frac{\partial x}{\partial u'} m_0 c = \frac{m_0}{\cos \alpha} v \quad ;$$
$$I^2 = \frac{\partial x_2}{\partial x'_0} I'^0 = \frac{\partial y}{\partial u'} m_0 c = 0 \quad ;$$
$$I^3 = \frac{\partial x_3}{\partial x'_0} I'^0 = \frac{\partial z}{\partial u'} m_0 c = 0 \quad .$$

96. **Transformación de las componentes del hexavector del campo electromagnético.** — En un sistema S donde vale la relatividad restringida, se tiene un tensor covariante F_{ik} antisimétrico, cuyas componentes son:

$$[66] \qquad \begin{array}{llll} F_{10} = X \; ; & & F_{23} = L \; ; \\ F_{20} = Y \; ; & & F_{31} = M \; ; \\ F_{30} = Z \; ; & & F_{12} = N \; . \end{array}$$

En el nuevo sistema S′ las componentes F'_{ik} las hallamos por las [18], o sea:

$$[67] \qquad F'_{ik} = \frac{\partial x_r}{\partial x'_i} \frac{\partial x_s}{\partial x'_k} F_{rs}.$$

Comencemos por calcular F'_{10}, para lo cual se hará en la fórmula anterior $i = 1$, $k = 0$. Como el tensor es antisimétrico, en la [67] sólo aparecerán sumandos en que r sea diferente de s. Si las fórmulas de transformación son las [65], aquellos sumandos para los cuales sea r ó s igual a 2 ó 3, serán nulos, pues las derivadas de y ó de z respecto de u' y x' son nulas. Por lo tanto, se tendrá:

$$F'_{10} = \frac{\partial x_0}{\partial x'_1} \frac{\partial x_1}{\partial x'_0} F_{01} + \frac{\partial x_1}{\partial x'_1} \frac{\partial x_0}{\partial x'_0} F_{10} \quad ,$$

o sea:

$$F'_{10} = \frac{\partial u}{\partial x'} \frac{\partial x}{\partial u'} F_{01} + \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial u}{\partial u'} F_{10} \quad ,$$

y por [65],

$$F'_{10} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} F_{01} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} F_{10} \quad ,$$

y como $F_{01} = - F_{10} = - X$, resulta:

$$F'_{10} = X' = X \frac{1}{\cos^2 \alpha} - X \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = X.$$

De modo análogo se obtiene:

$$F'_{20} = Y' = \frac{\partial y}{\partial y'} \frac{\partial u}{\partial u'} F_{20} + \frac{\partial y}{\partial y'} \frac{\partial x}{\partial u'} F_{21} \quad ,$$

pues se ve de inmediato que de la [67], debiendo derivar respecto de y' y de u', éstos son los únicos sumandos no nulos. Resulta, así, aplicando las [65] y teniendo en cuenta las [66] y el carácter antisimétrico del tensor, que:

$$Y' = Y \frac{1}{\cos \alpha} - N \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{Y - N \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} .$$

Procediendo así, se encuentran las demás componentes y, en consecuencia, las fórmulas [129], [130] y [131] del capítulo IV.

97. Transformación de la fórmula de Schwarzschild. — Siendo

$$[68] \qquad ds^2 = \gamma du^2 - \frac{1}{\gamma} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \operatorname{sen}^2 \theta d\varphi^2 \quad ;$$

[69] $$\gamma = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} = 1 - \frac{r_0}{r} \quad ;$$

se trata de expresar este elemento lineal en función de las coordenadas:

[70] $$u' = u \quad ; \quad x = r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi \quad ; \quad y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \quad ;$$
$$z = r \cos \theta .$$

La [68], con el valor de γ dado en [69], es la fórmula de Schwarzschild, de la cual nos ocuparemos más adelante, y que da el elemento lineal, en coordenadas polares, de un campo gravitatorio generado por la masa M situada en el origen de coordenadas. Para abreviar, se ha puesto

[71] $$r_0 = \frac{2GM}{c^2}$$

siendo G la constante newtoniana de gravitación. Pondremos

[72] $$x_0 = u \quad ; \quad x_1 = r \quad ; \quad x_2 = \theta \quad ; \quad x_3 = \varphi \quad ;$$
$$g_{00} = \gamma \quad ; \quad g_{11} = -\frac{1}{\gamma} \quad ; \quad g_{22} = -r^2 \quad ;$$
$$g_{33} = -r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \quad ;$$
$$g_{ik} = 0 \quad , \quad \text{si} \quad i \neq k$$
$$x'_0 = u' = u \quad ; \quad x'_1 = x \quad ; \quad x'_2 = y \quad ; \quad x'_3 = z .$$

La inversión de las [70] da:

[73] $$u = u' \quad ; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad ; \quad \cos \theta = \frac{z}{r} \quad ;$$
$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} .$$

El cálculo de ds^2 en función de las nuevas coordenadas, puede hacerse calculando, a partir de las [73], du, dr, $d\theta$, $d\varphi$, con lo cual, elevando al cuadrado las expresiones así obtenidas y efectuando la operación indicada en [68], para lo cual habrá que multiplicar previamente du'^2 por γ, dr^2 por $1/\gamma$, etcétera, se llega a la expresión buscada. Aquí calcularemos g'_{ik} aplicando la [18]. Se obtiene, así:

$$g'_{00} = \left(\frac{\partial u}{\partial u'}\right)^2 g_{00} + \left(\frac{\partial r}{\partial u'}\right)^2 g_{11} + \ldots = g_{00} = \gamma \quad ;$$

$$g'_{01} = \frac{\partial u}{\partial u'} \; \frac{\partial u}{\partial x} \, g_{00} + \frac{\partial r}{\partial u'} \; \frac{\partial r}{\partial x} \, g_{11} + \ldots = 0 .$$

Análogamente, resulta:

$$g'_{02} = g'_{03} = 0 .$$

El cálculo de los coeficientes restantes es algo más complicado. Para g'_{11} se tiene:

[74] $$g'_{11} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 g_{00} + \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 g_{11} + \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 g_{22} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 g_{33}.$$

Por [73] se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \quad ; \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{zx}{r^2\sqrt{x^2+y^2}} \quad ;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

Llevando estos valores a [74] y también los valores de g_{00}, g_{11}, etcétera, dados en [72], se obtiene:

$$-g'_{11} = \frac{1}{\gamma}\frac{x^2}{r^2} + \frac{z^2x^2}{r^2(x^2+y^2)} + \frac{y^2}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{1}{\gamma}\frac{x^2}{r^2} + \frac{1}{x^2+y^2}\frac{(x^2+y^2)(z^2+y^2)}{r^2} = \frac{1}{\gamma}\frac{x^2}{r^2} + \frac{r^2-x^2}{r^2} =$$

$$= \frac{1}{r^2}\left[x^2\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)+r^2\right] = 1 + \frac{1}{\gamma}\frac{r_0}{r}\frac{x^2}{r^2}.$$

Por lo tanto,

$$g'_{11} = -1 - \frac{1}{\gamma}\frac{r_0}{r}\frac{x^2}{r^2}.$$

Análogamente, se obtiene:

$$g'_{22} = -1 - \frac{1}{\gamma}\frac{r_0}{r}\frac{y^2}{r^2} \quad ; \quad g'_{33} = -1 - \frac{1}{\gamma}\frac{r_0}{r}\frac{z^2}{r^2} \quad ;$$

$$g'_{12} = -\frac{1}{\gamma}\frac{r_0}{r}\frac{xy}{r^2} \quad ; \quad g'_{13} = -\frac{1}{\gamma}\frac{r_0}{r}\frac{xz}{r^2} \quad ;$$

$$g'_{23} = -\frac{1}{\gamma}\frac{r_0}{r}\frac{yz}{r^2}.$$

Todas estas fórmulas pueden resumirse así:

[75] $$g'_{00} = \gamma = 1 - \frac{r_0}{r} \quad ; \quad g'_{0i} = 0$$

$$(i, k = 1, 2, 3)$$

$$g'_{ik} = -\delta_{ik} - \frac{1}{\gamma}\frac{r_0}{r}\frac{x'_i x'_k}{r^2}$$

donde δ_{ik} es el símbolo de Kronecker [50] y r la magnitud

$$r^2 = \sum_i x'^2_i = x^2 + y^2 + z^2.$$

Por lo tanto, la fórmula de Schwarzschild en coordenadas cartesianas, explícitamente desarrollada, es:

$$[76] \quad ds^2 = \gamma du^2 - \left(1 + \frac{r_0 x^2}{\gamma r^3}\right) dx^2 - \left(1 + \frac{r_0 y^2}{\gamma r^3}\right) dy^2 - \\ - \left(1 + \frac{r_0 z^2}{\gamma r^3}\right) dz^2 - \frac{2r_0 xy}{\gamma r^3} dxdy - \frac{2r_0 xz}{\gamma r^3} dxdz - \\ - \frac{2r_0 yz}{\gamma r^3} dydz.$$

98. El tensor contravariante fundamental del campo de Schwarzschild. — El determinante de los g_{ik} de [68] es:

$$[77] \quad |g_{ik}| = g = \begin{vmatrix} \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \end{vmatrix} = -r^4 \operatorname{sen}^2 \theta.$$

Resulta, entonces, de acuerdo con la definición [39]:

$$[78] \quad g^{00} = \frac{1}{\gamma} \quad ; \quad g^{11} = -\gamma \quad ; \quad g^{22} = -\frac{1}{r^2} \quad ; \\ g^{33} = -\frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta}.$$

El valor del determinante de los g'_{ik}, cuando se utilizan coordenadas cartesianas, es igual a -1, como puede verificar el lector, y las componentes del tensor contravariante fundamental, se calculan también sin dificultad. Así resulta, por ejemplo, para g'^{11}:

$$g'^{11} = \frac{G'^{11}}{|g'_{ik}|} = -\begin{vmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & g'_{22} & g'_{23} \\ 0 & g'_{32} & g'_{33} \end{vmatrix} = -\gamma(g'_{22}g'_{33} - g'^2_{23})$$

Reemplazando ahora por los valores dados en [75] y efectuando los cálculos, se obtiene:

$$g'^{11} = -1 + \frac{r_0}{r} \frac{x^2}{r^2}.$$

La expresión general es:

$$[79] \quad g'^{00} = \frac{1}{\gamma} \quad ; \quad g'^{0i} = 0 \\ (i, k = 1, 2, 3) \\ g'^{ik} = -\delta_{ik} + \frac{r_0}{r} \frac{x'_i x'_k}{r^2}.$$

Naturalmente que las [79] pueden obtenerse también directamente de las [78], utilizando las [70] y empleando la fórmula [16] de transformación para los tensores de segundo orden contravariantes. Calculemos así, a título de ejemplo, g'^{11}:

$$g'^{11} = g^{00}\frac{\partial x'_1}{\partial u}\ \frac{\partial x'_1}{\partial u} + g^{11}\frac{\partial x'_1}{\partial r}\ \frac{\partial x'_1}{\partial r} + \ldots =$$

$$= g^{00}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + g^{11}\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + g^{22}\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + g^{33}\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 =$$

$$= -1 + \frac{r_0}{r}\ \operatorname{sen}^2\theta\cos^2\varphi = -1 + \frac{r_0}{r}\ \frac{x^2}{x^2+y^2}\ \frac{r^2 - z^2}{r},$$

que coincide con el valor hallado más arriba.

CÁLCULO DE GEODÉSICAS

99. **Ecuaciones de la geodésica.** — Sabemos ya que una geodésica es la línea más corta que une dos puntos de determinada variedad, la cual puede tener n dimensiones. Comencemos por pensar que nuestra variedad tiene sólo dos dimensiones (fig. 113) y consideremos que la línea de trazo grueso trazada entre los puntos A y B sea geodésica de esa superficie. Si designamos por ds al elemento de longitud, el valor de la integral de ds a lo largo de la geodésica, que da su longitud total, tendrá que ser mínimo

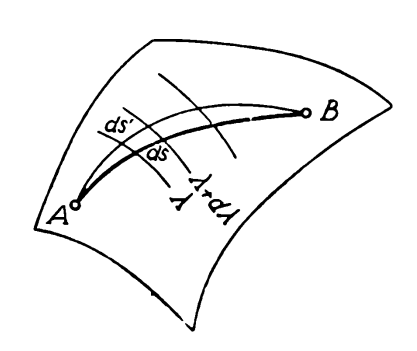


Fig. 113. — Trayecto más corto o geodésica entre A y B.

$$\int_A^B ds = \text{mínimo}.$$

En realidad, como tendremos que calcular geodésicas en variedades en las cuales una de sus dimensiones es temporal, puede ocurrir que la integral de ds, a lo largo de cierto camino, sea máxima en lugar de mínima (a causa de que los términos espaciales de la expresión del ds^2 tienen signo opuesto al término donde aparece el diferencial del tiempo), y a esa línea de longitud cronotópica máxima también la llamaremos geodésica. Por lo tanto, la condición para que la línea sea una geodésica, es que la integral escrita más arriba sea un *extremo*: *máximo*, *mínimo* o *constante*. En variedades exclusivamente espaciales, las geodésicas pueden ser también, en casos particulares, trayectos de recorrido máximo, como ocurre en una

superficie esférica al considerar que se unen dos puntos de la misma por un arco de círculo máximo de amplitud superior a 180°. Sobre la misma esfera, si los puntos están situados en los extremos de un mismo diámetro, pasan por ellos infinitas geodésicas y, en este sentido, el trayecto geodésico estaría caracterizado por ser de longitud constante. Si entre los puntos dados, A y B, imaginamos otro trayecto cualquiera que difiera infinitamente poco del camino geodésico, la diferencia total entre las longitudes de los dos caminos tendrá que ser igual a cero, a menos de infinitésimos de orden superior. Deberá ser, en consecuencia:

[80] $$\delta \int_A^B ds = \int_A^B ds' - \int_A^B ds = \int_A^B (ds' - ds) = \int_A^B \delta(ds) = 0.$$

El signo δ indica *variación* y la parte del análisis matemático clásico que estudia esta clase de problemas, se conoce con el nombre de cálculo de variaciones.

Si designamos por x_1, x_2 las coordenadas utilizadas sobre la superficie representada en la fig. 113, podemos considerar, sobre la misma superficie, un haz de curvas definido por cierta función de las coordenadas

$$f(x_1, x_2) = \lambda$$

de tal modo, que a cada valor de λ corresponda una curva bien determinada. Estas curvas cortan a la geodésica que une a los puntos A y B de la superficie, y cortan también a los infinitos caminos *variados*, infinitamente próximos al camino geodésico, y que imaginamos trazados sobre la superficie entre los mismos puntos A y B. Si la variedad considerada tuviera tres dimensiones, en lugar de dos, consideraríamos una función de las tres coordenadas x_1, x_2, x_3:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \lambda$$

que definiría una familia de superficies que cortarían a la geodésica y a los caminos variados próximos a la misma. De modo análogo, si la variedad tienen n dimensiones, consideramos la función

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = \lambda$$

que define una familia de hipersuperficies que cortan el camino geodésico cuyas ecuaciones estamos buscando.

A cada valor de λ corresponde, entonces, un punto de la línea geodésica, pudiendo, en consecuencia, escribir:

[81] $$ds = W d\lambda$$

donde W es cierto factor de proporcionalidad. Sobre la línea variada se tendrá:

$$ds' = W' d\lambda \quad ,$$

pues el mismo parámetro λ nos sirve para individualizar a los puntos del camino geodésico y a los puntos de los caminos infinitamente próximos que unen A con B. Se tiene, entonces:

$$ds' - ds = d\lambda . (W' - W) = d\lambda . \delta W \quad ,$$

o sea:

$$\delta(ds) = d\lambda . \delta W.$$

Por lo tanto, de acuerdo con [80], deberá ser

[82] $$\int_A^B d\lambda . \delta W = 0.$$

Si la variedad está definida por

$$ds^2 = g_{ik} dx_i dx_k \quad ,$$

teniendo en cuenta [81] podremos escribir

$$g_{ik} dx_i dx_k = W^2 d\lambda^2$$

o sea

[83] $$W^2 = g_{ik} \frac{dx_i}{d\lambda} \frac{dx_k}{d\lambda}$$

Debemos calcular la variación δW para introducirla en la [82]. De la [83], se obtiene:

[84] $$2W\delta W = (\delta g_{ik}) \frac{dx_i}{d\lambda} \frac{dx_k}{d\lambda} + g_{ik} \left(\delta \frac{dx_i}{d\lambda} \right) \frac{dx_k}{d\lambda} + $$
$$+ g_{ik} \frac{dx_i}{d\lambda} \left(\delta \frac{dx_k}{d\lambda} \right) .$$

Como $g_{ik} = g_{ki}$, los dos últimos términos de esta expresión son idénticos y, por ello, los reemplazaremos por la expresión

$$2g_{ir} \frac{dx_i}{d\lambda} \left(\delta \frac{dx_r}{d\lambda} \right)$$

que representa una doble suma respecto de los índices i, r. Además, es:

$$\delta \left(\frac{dx_r}{d\lambda} \right) = \left(\frac{dx_r}{d\lambda} \right)_v - \left(\frac{dx_r}{d\lambda} \right)_o = \frac{d}{d\lambda} \Big[(x_r)_v - (x_r)_o \Big] = \frac{d}{d\lambda} (\delta x_r)$$

indicando los índices v y o los valores sobre la curva variada y la no variada (el camino geodésico), respectivamente. Además, g_{ik} son funciones de las coordenadas, por lo cual tendremos:

$$\delta g_{ik} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} \delta x_r .$$

De este modo, la [84] da:

$$\delta W = \frac{1}{2W}\frac{dx_i}{d\lambda}\frac{dx_k}{d\lambda}\frac{\partial g_{ir}}{\partial x_r}(\delta x_r) + \frac{g_{ir}}{W}\frac{dx_i}{d\lambda}\frac{d}{d\lambda}(\delta x_r).$$

El último término de esta expresión puede escribirse:

$$\frac{g_{ir}}{W}\frac{dx_i}{d\lambda}\frac{d}{d\lambda}(\delta x_r) = \frac{d}{d\lambda}\left[\frac{g_{ir}}{W}\frac{dx_i}{d\lambda}(\delta x_r)\right] -$$
$$-(\delta x_r)\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{g_{ir}}{W}\frac{dx_i}{d\lambda}\right),$$

como surge de la regla de derivación de un producto. Se obtiene, entonces:

$$\delta W = \frac{1}{2W}\frac{dx_i}{d\lambda}\frac{dx_k}{d\lambda}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r}(\delta x_r) + \frac{d}{d\lambda}\left[\frac{g_{ir}}{W}\frac{dx_i}{d\lambda}(\delta x_r)\right] -$$
$$-(\delta x_r).\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{g_{ir}}{W}\frac{dx_i}{d\lambda}\right).$$

Este valor es el que debe llevarse a [82]. Para el segundo término del segundo miembro, se obtiene:

$$\int_A^B d\left[\frac{g_{ir}}{W}\frac{dx_i}{d\lambda}(\delta x_r)\right] = \left[\frac{g_{ir}}{W}\frac{dx_i}{d\lambda}(\delta x_r)\right]_A^B = 0,$$

pues en los puntos A y B, por donde pasan todas las líneas imaginadas, las variaciones de las coordenadas δx_r son iguales a cero. En consecuencia, la integral que debe anularse es:

$$\int_A^B\left[\frac{1}{2W}\frac{dx_i}{d\lambda}\frac{dx_k}{d\lambda}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} - \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{g_{ir}}{W}\frac{dx_i}{d\lambda}\right)\right](\delta x_r).\,d\lambda = 0.$$

Como los δx_r son arbitrarios, el integrando debe ser igual a cero, o sea, cambiando el signo,

[85] $$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{g_{ir}}{W}\frac{dx_i}{d\lambda}\right) - \frac{1}{2W}\frac{dx_i}{d\lambda}\frac{dx_k}{d\lambda}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} = 0.$$

En estas ecuaciones puede lograrse una gran simplificación, haciendo que el parámetro λ sea simplemente igual a la longitud s del arco de geodésica, lo que equivale hacer el factor W de [81] igual a 1. De esta manera, la [85] se escribe:

$$\frac{d}{ds}\left(g_{ir}\frac{dx_i}{ds}\right) - \frac{1}{2}\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} = 0,$$

o sea:

$$g_{ir}\frac{d^2x_i}{ds^2}+\frac{dg_{ir}}{ds}\frac{dx_i}{ds}-\frac{1}{2}\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r}=0.$$

Pero es

$$\frac{dg_{ir}}{ds}=\frac{\partial g_{ir}}{\partial x_k}\frac{dx_k}{ds}.$$

Con lo cual

[86] $$g_{ir}\frac{d^2x_i}{ds^2}+\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds}\left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial x_k}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r}\right)=0.$$

Como, además, vale la identidad

$$\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds}\frac{\partial g_{ir}}{\partial x_k}\equiv\frac{dx_k}{ds}\frac{dx_i}{ds}\frac{\partial g_{kr}}{\partial x_i},$$

pues sólo difieren ambos miembros en la permutación de los índices móviles i, k, puede tomarse el primer miembro igual a la semisuma de ambos:

$$\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds}\frac{\partial g_{ir}}{\partial x_k}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial x_k}+\frac{\partial g_{kr}}{\partial x_i}\right)\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds},$$

y con esto, la [86] se convierte en:

[87] $$g_{ir}\frac{d^2x_i}{ds^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial x_k}+\frac{\partial g_{kr}}{\partial x_i}-\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r}\right)\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds}=0.$$

Para abreviar, se conviene en introducir el siguiente símbolo:

[88] $$\begin{bmatrix} i\ k \\ r \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial x_k}+\frac{\partial g_{kr}}{\partial x_i}-\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r}\right)$$

que es el símbolo de CHRISTOFFEL *de primera especie.* Obsérvese que, de acuerdo con la definición [88], resulta:

[89] $$\begin{bmatrix} i\ k \\ r \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k\ i \\ r \end{bmatrix}$$

Con la abreviatura [88], la [87] se escribe:

[90] $$g_{ir}\frac{d^2x_i}{ds^2}+\begin{bmatrix} i\ k \\ r \end{bmatrix}\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds}=0.$$

Se logra una simplificación mayor si se introduce el símbolo de *Christoffel de segunda especie,* definido así:

[91] $$\begin{Bmatrix} i\ k \\ h \end{Bmatrix}=g^{hr}\begin{bmatrix} i\ k \\ r \end{bmatrix}$$

donde el segundo miembro expresa una suma respecto del índice r. También para este símbolo se cumple, como se ve de inmediato, en virtud de [89], que:

[92] $$\left\{ \begin{matrix} i\ k \\ h \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} k\ i \\ h \end{matrix} \right\} .$$

Los símbolos de tres índices de Christoffel *no son tensores*: puede ocurrir que, utilizando un sistema de coordenadas, sean todos ellos iguales a cero y, en otro sistema, algunas componentes de los mismos, diferentes de cero. Esto se verá más adelante en ejemplos concretos.

Multiplicando la [90] por el tensor contravariante fundamental g^{hr} y sumando respecto de r, el primer término da:

$$g^{hr} g_{ir} \frac{d^2 x_i}{ds^2} = g^h{}_i \frac{d^2 x_i}{ds^2} = \delta^h{}_i \frac{d^2 x_i}{ds^2} \quad ,$$

pero como $\delta^h{}_i$ vale cero si i es diferente de h, y uno si $i = h$, [50], resulta que

$$\delta^h{}_i \frac{d^2 x_i}{ds^2} = \frac{d^2 x_h}{ds^2} \quad ,$$

pues de la suma respecto de i del primer miembro, el único término no nulo es aquel en que $i = h$. Por lo tanto, la [90] se convierte, después de multiplicarla por g^{hr} y sumar respecto de r, de acuerdo con lo que precede y la definición [91], en:

[93] $$\frac{d^2 x_h}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} i\ k \\ h \end{matrix} \right\} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds} = 0 \quad ,$$

que son las ecuaciones definitivas de la geodésica.

Obsérvese que el segundo término está formado por una doble suma respecto de los índices i, k, que son los índices móviles. Para cada valor de h se tiene una ecuación, de modo que si la variedad es de n dimensiones, se tendrán n ecuaciones diferenciales, a derivadas totales, que determinan la geodésica.

Los símbolos que hemos utilizado fueron introducidos por E. B. CHRISTOFFEL en 1870, en una memoria titulada: "Sobre la transformación de expresiones diferenciales homogéneas de segundo grado".

Las ecuaciones [93] tienen, por cierto, una estructura bien complicada, pues el segundo término es una doble suma y el símbolo de Christoffel que allí figura es, a su vez, una suma en que aparecen los símbolos definidos en [88]. Pero si se piensa en todo lo que se encierra en las mismas, terminamos por maravillarnos hasta el punto de encontrarlas simples con respecto a su inmenso contenido. Allí están, en efecto, las ecuaciones de la recta en el plano o en el espacio euclídeo de tres o n dimensiones y referidas a *cualquier sistema de coordenadas*, y allí se encuentran, también, las ecuaciones de los caminos más directos sobre superficies curvas de cualquier naturaleza y de cualquier número de dimensiones, sea el que fuere el sistema de coordenadas que se elija.

100. Ecuaciones de la geodésica cuando la forma es ortogonal. — Si la forma de la expresión que da el ds^2 es ortogonal, o sea si los g_{ik} son iguales a cero para $i \neq k$, en tal caso, la [93] se simplifica enormemente.

El símbolo de Christoffel, de segunda especie, que allí figura, debe calcularse, de acuerdo con [91], por la expresión:

$$\left\{ {i\,k \atop h} \right\} = g^{hr} \left[{i\,k \atop r} \right] = g^{ho} \left[{i\,k \atop o} \right] + g^{h1} \left[{i\,k \atop 1} \right] + \\ + \ldots + g^{hh} \left[{i\,k \atop h} \right] + \ldots$$

Pero si la forma es ortogonal,

$$g^{hr} = 0 \quad \text{si} \quad r \neq h$$

por lo cual, el único término no nulo de la suma escrita más arriba será aquel que tiene por factor a g^{hh}. Además, si la forma es ortogonal, como sólo son diferentes de cero los elementos de la diagonal principal, se ve de inmediato que

$$g^{hh} = \frac{1}{g_{hh}}$$

por lo cual

[94] $$\left\{ {i\,k \atop h} \right\} = \frac{1}{g_{hh}} \left[{i\,k \atop h} \right] \quad ;$$

y de aquí la [93] podrá escribirse:

[95] $$\frac{d^2x_h}{ds^2} + \frac{1}{g_{hh}} \left[{i\,k \atop h} \right] \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds} = 0 \quad ,$$

donde en el segundo término se debe sumar respecto de los índices móviles i, k, pero no respecto del índice fijo h.

Ejemplos de cálculo de geodésicas en casos sencillos

101. Ecuaciones de la recta en variedades euclídeas. — Si el elemento lineal es

$$ds^2 = dx_1{}^2 + dx_2{}^2 + dx_3{}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad ,$$

los g_{ik} son constantes y los símbolos de Christoffel de primera especie (y los de segunda), son todos nulos. Las ecuaciones [95] (ó [93]) son, en tal caso:

[96] $$\frac{d^2x_h}{ds^2} = 0.$$

Si se trata de una variedad de dos dimensiones y hacemos

$x_1 = x$; $x_2 = y$; las dos ecuaciones dadas en [96], escritas explícitamente, son:

$$\frac{d^2x_1}{ds^2} = \frac{d^2x}{ds^2} = 0 \quad ; \quad \frac{d^2x_2}{ds^2} = \frac{d^2y}{ds^2} = 0 \quad ;$$

que, integradas, dan

$$\frac{dx}{ds} = a \quad ; \quad \frac{dy}{ds} = b \quad ;$$

siendo a y b constantes de integración. Dividiendo una ecuación por la otra, resulta

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \quad ; \quad y = \frac{b}{a}x + y_0.$$

Para un número n de dimensiones, la integración de las [96] dan ecuaciones lineales.

Si la variedad es semieuclídea

$$ds^2 = du^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

se obtiene

$$\frac{d^2u}{ds^2} = 0 \quad ; \quad \frac{d^2x}{ds^2} = 0 \quad ; \quad \frac{d^2y}{ds^2} = 0 \quad ; \quad \frac{d^2z}{ds^2} = 0 \quad ;$$

de donde

$$\frac{du}{ds} = \mathrm{A} \quad ; \quad \frac{dx}{ds} = \mathrm{B} \quad ; \quad \text{etcétera,}$$

$$\frac{dx}{du} = \frac{dx}{cdt} = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}} \quad ; \quad x = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}ct + x_0 \quad ; \quad \text{etcétera,}$$

o sea, las geodésicas son rectas del espacio-tiempo, lo que significa que un punto que siga una geodésica se mueve en el espacio en línea recta y con movimiento uniforme.

Calculemos ahora la geodésica de un plano euclídeo usando coordenadas polares:

[97] $$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2.$$

Obsérvese que, de este modo, se podría escribir también el elemento lineal de la superficie de un cono circular recto. De acuerdo con [97], es:

$$x_1 = r \quad ; \quad x_2 = \theta$$

$$g_{11} = 1 \quad ; \quad g_{22} = r_2 \quad ; \quad g_{12} = g_{21} = 0.$$

Podemos aplicar la [95] porque la forma es ortogonal, y si hacemos en ella $h = 2$, tendremos:

[98] $$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{1}{r^2}\begin{bmatrix} i\ k \\ 2 \end{bmatrix}\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds} = 0.$$

En el segundo término tenemos una doble suma respecto de los índices i, k, por lo cual habrá que calcular los símbolos siguientes:

$$\begin{bmatrix} 1\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 1\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 2\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad ;$$

aplicando la [88]. El primero es nulo por ser $g_{12} = 0$ y, además, $g_{11} = 1 =$ constante. El tercero es igualmente igual a cero, puesto que g_{22} no depende de x_2. Sólo queda

$$\begin{bmatrix} 1\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} = \frac{1}{2} \frac{\partial (r^2)}{\partial r} = r.$$

Además, será también, por la simetría puesta de manifiesto en [89],

$$\begin{bmatrix} 2\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = r.$$

La [98] se convierte, con esto:

[99] $$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\theta}{ds} = 0.$$

Para integrar esta ecuación hacemos

[100] $$\frac{d\theta}{ds} = z$$

con lo cual la [99] da:

$$\frac{dz}{ds} + z \cdot \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} = 0 \quad ; \quad \frac{dz}{z} + 2 \frac{dr}{r} = 0 \quad ;$$

que, integrada, da:

$$\log z + 2 \log r = \log a \quad ; \quad zr^2 = a \quad ;$$

y teniendo en cuenta el valor [100] de z:

[101] $$\frac{d\theta}{ds} = \frac{a}{r^2} \quad ; \quad ds = \frac{r^2}{a} d\theta.$$

En lugar de hacer ahora $h = 1$ para obtener la otra ecuación, llevaremos el valor [101] a la [97], con lo cual:

$$\frac{r^4}{a^2} d\theta^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

y de aquí

$$d\theta = \frac{a}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2}}} = - \frac{d\left(\frac{a}{r}\right)}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2}}}$$

que, integrada, da:

$$\theta - \theta_0 = \text{arc cos}\,\frac{a}{r} \quad ; \quad \cos(\theta - \theta_0) = \frac{a}{r} \quad ;$$

o sea:

[102] $$r = \frac{a}{\cos(\theta - \theta_0)} \quad ;$$

que, como se ve en la fig. 114, es la ecuación de una recta R en coordenadas polares. La misma expresión [102] es, también, la ecuación de la línea geodésica de la superficie de un cono circular recto, como se comprende si se supone que se arrolla el papel donde se ha dibujado la fig. 114 sobre la superficie del cono, haciendo coincidir O con el vértice y la recta g con una de las generatrices.

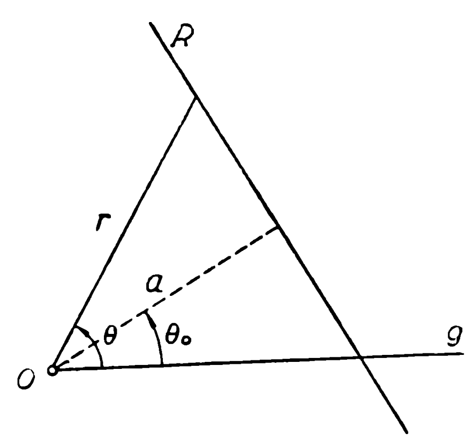


Fig. 114. — Ecuación de la recta en coordenadas polares.

102. **Geodésicas de superficies de revolución.** — Comenzaremos por demostrar que, en una superficie de revolución, la curva generatriz de la misma es siempre una geodésica. Sea la superficie de revolución generada por la curva O*g* (fig. 115), al girar alrededor del eje *z* contenido en el plano de la curva. Tomamos sobre la curva generatriz un punto O cualquiera como origen e individualizamos a un punto P por la longitud del arco de curva OP $= l$. Si la distancia entre P y el eje z es r, deberá considerarse a r como función de l. Llamaremos φ a la otra coordenada que mide el ángulo diedro, de arista en el eje z, entre el plano de origen y el plano que pasa por el punto. El elemento lineal en el sistema de coordenadas l, φ se expresa, entonces, así:

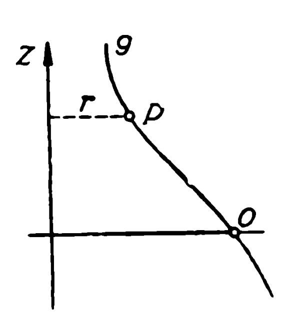


Fig. 115. — La generatriz de una superficie de revolución es siempre una geodésica.

[103] $$ds^2 = dl^2 + r^2 d\varphi^2.$$

Haciendo:

$$x_1 = l \quad ; \quad x_2 = \varphi \quad ;$$

es: $$g_{11} = 1 \quad ; \quad g_{22} = r^2 \quad ; \quad g_{12} = g_{21} = 0.$$

La [95], para $h = 2$, da, calculando como en el ejercicio anterior,

$$[104] \qquad \frac{d^2\varphi}{ds^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{dl}\frac{dl}{ds}\frac{d\varphi}{ds} = 0 \quad ;$$

pues es:

$$\begin{bmatrix} 1\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} = \frac{1}{2}\frac{\partial(r^2)}{\partial l} = r\frac{dr}{dl}\,.$$

La [104] se satisface para $\varphi =$ constante, con lo cual queda demostrado que las generatrices de una superficie de revolución son siempre geodésicas. Si se trata de una superficie esférica, por dos puntos cualesquiera de la misma puede hacerse pasar un plano que contenga también al centro de la esfera, y la intersección de ese plano con la superficie da un arco de círculo máximo que puede considerarse como generatriz de una superficie de revolución. Por lo tanto, los arcos de círculo máximo son geodésicas de la superficie esférica.

Como la [104] puede escribirse

$$[105] \qquad \frac{d^2\varphi}{ds^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\varphi}{ds} = 0 \quad ;$$

se ve que, salvo el cambio de letras, resulta idéntica a la [99], de la cual se obtenía la [101], y, en consecuencia, una primera integración de [105] da:

$$ds = \frac{r^2}{a}\,d\varphi.$$

Llevando este valor a la [103], se obtiene:

$$d\varphi = \frac{a}{r^2}\frac{dl}{\sqrt{1-\frac{a^2}{r^2}}}$$

y, por lo tanto, la ecuación general de las geodésicas de una superficie de revolución cualquiera es:

$$[106] \qquad \varphi = a\int\frac{dl}{r^2\sqrt{1-\frac{a^2}{r^2}}} \quad ,$$

donde habrá que poner dl en función de r en cada caso particular que se considere. Si en [106] se hace $dl = dr$, se trata de una superficie de revoulción cuya generatriz es una recta perpendicular al eje de giro, o sea un plano, resultando entonces de la [106], como caso particular, la [102] con un simple cambio de letras. Si se hace

$$dl = \frac{dr}{\operatorname{sen}\Omega}$$

con Ω constante, se trata de una superficie cónica generada por la rotación de una recta que corta al eje de giro formando con él un ángulo Ω, y en este caso, en lugar de [102], resulta:

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{1}{\operatorname{sen}\Omega} \arccos \frac{a}{r}$$

que coincide con [102] si se hace

$$(\varphi - \varphi_0) \operatorname{sen}\Omega = \theta - \theta_0$$

como se comprende si se observa la fig. 116, en la que se ha representado un cono y su desarrollo y en la que se ve que:

$$\frac{\theta}{\varphi} = \frac{\sigma/\varrho}{\sigma/\varrho_0} = \frac{\varrho_0}{\varrho} = \operatorname{sen}\Omega.$$

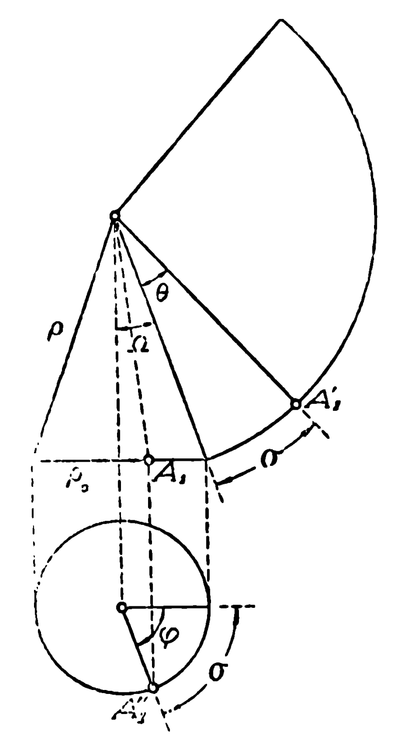


Fig. 116. — Geodésicas de una superficie cónica.

103. Geodésicas de la pseudoesfera. — Como aplicación de la [106], calcularemos las geodésicas de una pseudoesfera que, como sabemos, es una superficie de revolución generada por la rotación de la tractriz cuya ecuación es la [12] del capítulo VI. De esa ecuación obtenemos:

$$dz = - \frac{\sqrt{k^2 - x^2}}{x} dx$$

y haciendo simplemente $x = r$, pues la superficie es de revolución, se tendrá

$$dl^2 = dz^2 + dx^2 = \frac{k^2 - r^2}{r^2} dr^2 + dr^2$$

o sea:

[107] $$dl = \frac{k}{r} dr.$$

Con esto, la [106] da:

$$\varphi = ak \int \frac{dr}{r^3 \sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2}}} = \frac{k}{a} \int \frac{d\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)}{2\sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2}}}$$

de donde

[108] $$\varphi = \varphi_0 \pm \frac{k}{a}\sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2}}\ .$$

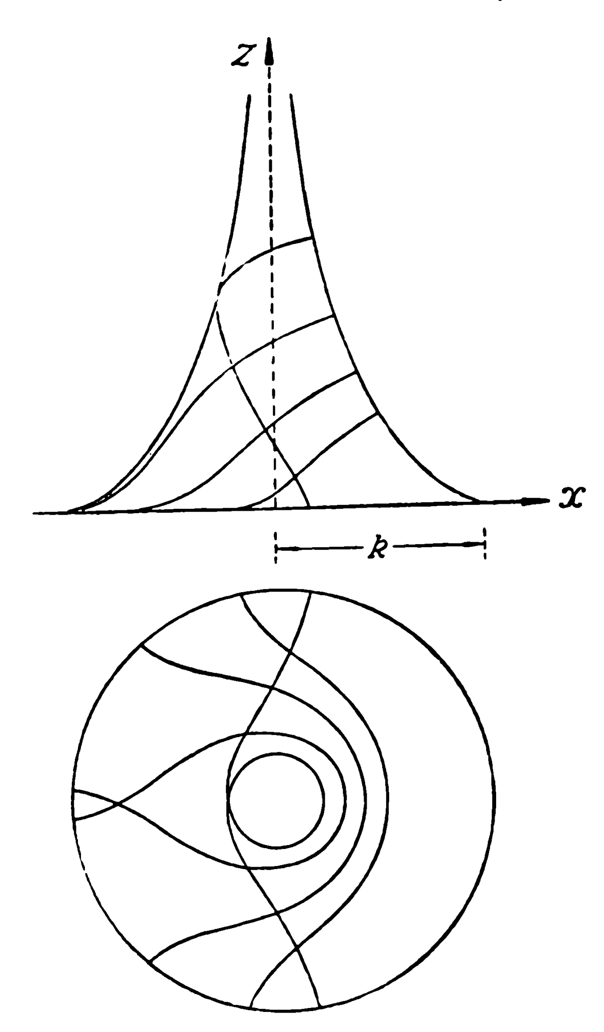


Fig. 117. — Geodésicas de una pseudoesfera.

Se ve que r debe ser mayor o igual que a para obtener valores reales de φ y, además, r debe ser menor o igual que k, el "radio" de la pseudoesfera:

$$a \leqslant r \leqslant k.$$

La constante a representa entonces, en cada caso, el paralelo de radio menor alcanzado por la geodésica que se encuentra totalmente * entre este paralelo y el ecuador de radio k originado por la rotación del punto de retroceso de la tractriz. La curva es simétrica respecto del meridiano φ_0.

En la fig. 117 se ha representado parte de una pseudoesfera y algunas geodésicas de la misma.

De acuerdo con [103] y [107], el elemento lineal de la pseudoesfera puede expresarse así:

[109] $$ds^2 = \frac{k^2}{r^2}\, dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

y la [108] podría obtenerse de aquí, aplicando directamente las ecuaciones de la geodésica.

Las dos constantes que figuran en [108] φ_0 y a, se determinan dando las coordenadas de los puntos por donde debe pasar la geodésica.

---

* Considerando sólo, por ejemplo, la parte del "hemisferio norte".

104. Geodésicas de variedades espacio-temporales de dos dimensiones. — El "problema del túnel" que tratamos en forma intuitiva en el párrafo 85 es de dos dimensiones: una espacial y otra temporal. Si dejamos caer un cuerpo sobre la superficie de la Tierra, cuando su velocidad inicial es nula o tiene la dirección de la vertical, se mueve sobre esa recta * o sea siguiendo la dirección de un radio terrestre y éste es también un problema de dos dimensiones: la distancia r al centro de la Tierra (supuesta esférica y homogénea) y el tiempo t. En el párrafo 98 mencionamos la fórmula de Schwarzschild y dijimos que ella da el elemento lineal de espacio-tiempo de un campo gravitatorio originado por una única masa M. Si se calculan las geodésicas de aquella expresión, se encuentra —como veremos más adelante— que la "proyección espacial" de esas líneas geodésicas son "curvas planas". Esto significa, por ejemplo, que en una curva de esta clase es φ = constante. En cuanto a la forma de esas curvas veremos que, en primera aproximación, coinciden con las elipses parábolas e hipérbolas de la teoría newtoniana. En casos especiales, para una velocidad inicial igual a cero, la proyección espacial de la geodésica se reduce a la "recta" r, manteniéndose constantes las coordenadas θ y φ. En este caso, el movimiento de un punto material situado en el campo, puede obtenerse *cortando* la fórmula de Schwarzschild, es decir, suprimiendo en ella los términos en los cuales es $d\theta = d\varphi = 0$. En el caso del campo solar, se puede identificar la trayectoria de los planetas con las geodésicas de la fórmula de Schwarzschild, porque las masas planetarias son muy pequeñas con respecto a la masa solar. Del mismo modo, y con mayor razón, si estudiamos la caída de un cuerpo sobre la superficie de la Tierra, supondremos que la masa del cuerpo que cae no modifica esencialmente la estructura primitiva del campo. Según esto, un cuerpo al caer siguiendo la vertical de un lugar, describirá la geodésica de la superficie espacio-temporal definida por la expresión

[110] $$ds^2 = \gamma du^2 - \frac{1}{\gamma} dr^2$$

estando γ dada en [69]. Haciendo

$$x_0 = u \quad ; \quad x_1 = r$$

se tendrá

$$g_{00} = \gamma \quad ; \quad g_{11} = -\frac{1}{\gamma} \quad ; \quad g_{01} = g_{10} = 0.$$

Si hacemos $h = 0$ en la [95], obtenemos

* Prescindimos aquí de la desviación producida por la rotación de la Tierra.

[111] $$\frac{d^2u}{ds^2} + \frac{1}{\gamma}\begin{bmatrix} i\ k \\ 0 \end{bmatrix}\frac{dx_i}{ds}\,\frac{dx_k}{ds} = 0 \quad ,$$

y los únicos símbolos no nulos son:

$$\begin{bmatrix} 0\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{00}}{\partial x_1} = \frac{1}{2}\,\frac{d\gamma}{dr}$$

por lo cual, la [111] da:

$$\frac{d^2u}{ds^2} + \frac{1}{\gamma}\,\frac{d\gamma}{dr}\,\frac{du}{ds}\,\frac{dr}{ds} = 0 \quad ,$$

o sea

[112] $$\frac{d^2u}{ds^2} + \frac{1}{\gamma}\,\frac{d\gamma}{ds}\,\frac{du}{ds} = 0.$$

Haciendo

$$\frac{du}{ds} = z$$

se encuentra de inmediato

[113] $$z\gamma = A \quad ; \quad \frac{du}{ds}\,\gamma = A \quad ;$$

donde A es una constante de integración. Llevando el valor de ds que se obtiene de aquí, a la [110], resulta:

$$\left(\frac{dr}{du}\right)^2 = \gamma^2 - \frac{\gamma^3}{A^2}$$

y como du = cdt, se tiene:

[114] $$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = c^2\gamma^2 - \frac{c^2\gamma^3}{A^2}$$

que da la velocidad del punto material que cae en función de la distancia r al centro de "atracción" donde se encuentra la masa M.

Si derivamos [114] respecto del tiempo, obtenemos:

$$2\,\frac{dr}{dt}\,\frac{d^2r}{dt^2} = \left(2c^2\gamma - \frac{3c^2\gamma^2}{A^2}\right)\frac{d\gamma}{dr}\,\frac{dr}{dt}$$

o sea

[115] $$\frac{d^2r}{dt^2} = \left(c^2\gamma - \frac{3}{2}\,\frac{c^2\gamma^2}{A^2}\right)\frac{d\gamma}{dr}\,.$$

Calculemos el valor de esta aceleración considerando que la velocidad es igual a cero. Se trata, entonces, de la "aceleración en reposo" o de la aceleración inicial si la velocidad inicial es nula. Para este caso, la [114] da

[116] $$1 = \frac{\gamma}{A^2}$$

y llevando este valor a la [115], resulta:

[117] $$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{1}{2}c^2\gamma\frac{d\gamma}{dr}.$$

Teniendo en cuenta el valor de γ dado en [69], obtenemos:

[118] $$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2}\gamma = -\frac{GM}{r^2} + \frac{2G^2M^2}{c^2r^3},$$

que, si se desprecia el último término, coincide con la aceleración newtoniana, no haciendo cuestión, por el momento, acerca del significado de la distancia r en la variedad espacial no euclídea.

En la [110] el coeficiente $g_{00} = \gamma$ da una medida de la "curvatura" del tiempo y el $g_{11} = -1/\gamma$ mide, en cambio, la "curvatura" del espacio. El sentido de lo que acabamos de decir es el siguiente: Para r tendiendo a infinito γ se hace igual a 1 y la variedad definida por [110] o por la fórmula completa [68] se hace euclídea (o semieuclídea si se tienen en cuenta los signos). En un campo gravitatorio γ es menor que uno en r_0/r, y cuanto mayor sea esta diferencia, mayor será también la diferencia entre la estructura geométrica del campo y la estructura euclídea.

Veamos ahora la influencia que ejercen por separado ambas curvaturas en la producción de los efectos gravitatorios. Para ello, calcularemos las geodésicas de la variedad

[119] $$ds^2 = \gamma du^2 - dr^2$$

donde γ sigue teniendo el valor dado en [69]. De esta manera, el espacio propiamente dicho —reducido aquí a una sola dimensión— es euclídeo ($g_{11} = -1$), en tanto que sólo el tiempo sería curvo ($g_{00} \neq 1$). Haciendo el cálculo como antes, se encuentra, también en este caso, la ecuación [112], de la cual una primera integración da la [113]. Llevando el valor de ds de [113] a [119], se obtiene, en lugar de la [114], la siguiente expresión:

[120] $$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = c^2\gamma - \frac{c^2\gamma^2}{A^2}$$

y de aquí

[121] $$\frac{d^2r}{dt^2} = \left(\frac{c^2}{2} - \frac{c^2\gamma}{A^2}\right)\frac{d\gamma}{dr}.$$

Para el reposo $\gamma/A^2 = 1$, como sale de [120], con lo cual la aceleración para una velocidad inicial igual a cero, es:

[122] $$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{1}{2}c^2\frac{d\gamma}{dr} = -\frac{GM}{r^2} ,$$

que coincide exactamente con la aceleración newtoniana. Por lo tanto, es *preponderante la acción del potencial* g_{00}, o, dicho de otra manera: *los efectos gravitatorios se producen casi exclusivamente por la curvatura del tiempo.*

Comparando [122] con [118], se ve que la curvatura del espacio produce una débil repulsión dada por el último término positivo de [118], aunque, por sí sola, la tal curvatura, o mejor, el coeficiente g_{11}, no produce, para el reposo, atracción ni repulsión alguna.

En lo que precede, calculamos la aceleración de caída correspondiente al reposo. Ahora hallaremos la *dependencia entre la aceleración y la velocidad.* En la mecánica newtoniana la aceleración de caída no depende de la velocidad, pero no ocurre lo mismo en la teoría de la gravitación de Einstein. Ya de antemano se intuye que en una teoría relativista, en la cual la velocidad de la luz desempeña el papel de velocidad límite, la aceleración deberá depender de algún modo de la velocidad. De la [114] se obtiene llamando V a la velocidad:

$$V^2 = c^2\gamma^2 - \frac{c^2\gamma^3}{A^2}$$

o sea

[123] $$\frac{c^2\gamma^2}{A^2} = c^2\gamma - \frac{V^2}{\gamma}$$

y llevando este valor a la [115], resulta:

[124] $$\frac{d^2r}{dt^2} = \left(-\frac{1}{2}c^2\gamma + \frac{3V^2}{2\gamma}\right)\frac{d\gamma}{dr}$$

y con el valor de γ dado en [69], llamando g a la aceleración newtoniana, se obtiene:

[125] $$\frac{d^2r}{dt^2} = -g\gamma + 3g\frac{V^2}{c^2}\frac{1}{\gamma} .$$

De acuerdo con esto, el valor absoluto de la aceleración de caída en un lugar determinado disminuye al aumentar la velocidad en sentido radial. Para cierta velocidad, que llamaremos velocidad crítica q, la atracción se convierte en repulsión:

$$3g\frac{q^2}{c^2}\frac{1}{\gamma} = g\gamma ,$$

o sea

[126] $$\frac{q^2}{c^2} = \frac{\gamma^2}{3} .$$

Como en campos que no son muy intensos el valor de γ es prácticamente igual a 1, resulta que esta velocidad crítica es aproximadamente igual a:

[127] $$q = \frac{c}{\sqrt{3}}$$

y para valores de la velocidad superiores a q, los cuerpos serían repelidos *.

105. **Movimiento de una partícula libre en un campo uniforme.** — Consideremos una región relativamente pequeña del campo gravitatorio terrestre donde pueda suponerse que las verticales son todas paralelas al eje z. No tomaremos en cuenta la curvatura del espacio propiamente dicho, pues ya sabemos que lo que influye en forma preponderante en los efectos gravitatorios es el coeficiente g_{00} de la dimensión temporal. El elemento lineal será, entonces:

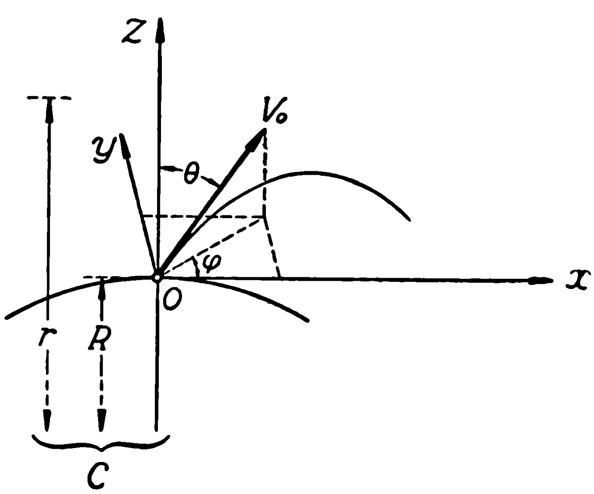


Fig. 118. — Parábola de caída.

[128] $$ds^2 = \gamma du^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Siendo C (fig. 118) el centro de la Tierra, el valor de γ en función de r será, de acuerdo con [69]:

[129] $$\gamma = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} = 1 - \frac{2GM}{c^2(R+z)}.$$

Desarrollando esta expresión y despreciando los términos de z^2 en adelante, se obtiene, si hacemos

[130] $$g = \frac{GM}{R^2},$$

[131] $$\gamma = 1 - \frac{2gR}{c^2} + \frac{2g}{c^2} z.$$

* Véanse los §§ 150 y 151.

Haciendo

$$x_0 = u \quad ; \quad x_1 = x \quad ; \quad x_2 = y \quad ; \quad x_3 = z \quad ;$$

es

[132] $$g_{00} = \gamma \quad ; \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1 \quad ; \qquad g_{ik} = 0 \quad , \quad \text{si} \quad i \neq k.$$

Si en las ecuaciones de las geodésicas [95] hacemos $h = 1$, obtenemos:

[133] $$\frac{d^2x}{ds^2} - \begin{bmatrix} i\ k \\ 1 \end{bmatrix} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds} = 0.$$

Los símbolos de Christoffel que debemos calcular, son:

$$\begin{bmatrix} 0\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} ;$$

$$\begin{bmatrix} 1\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 2\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 3\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} ;$$

y se ve de inmediato que todos ellos son iguales a cero, pues de acuerdo con los valores de los g_{ik} dados en [132], todos ellos son constantes excepto g_{00}, que depende sólo de x_3, es decir, de z. Por tal razón, la [133] da:

[134] $$\frac{d^2x}{ds^2} = 0.$$

Análogamente, si se hace $h = 2$, resulta:

[135] $$\frac{d^2y}{ds^2} = 0.$$

En cambio, para $h = 3$, el único símbolo de Christoffel no nulo es:

$$\begin{bmatrix} 0\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x_3} = -\frac{1}{2} \frac{d\gamma}{dz} = -\frac{g}{c^2}$$

por lo cual se obtiene:

[136] $$\frac{d^2z}{ds^2} + \frac{g}{c^2} \left(\frac{du}{ds}\right)^2 = 0.$$

Puede considerarse, *para velocidades pequeñas respecto de la de la luz*, que

[137] $$ds = du = cdt \quad ,$$

con lo cual las ecuaciones de las geodésicas [134], [135] y [136], serían:

[138] $$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} = 0 \quad ; \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -g \quad ;$$

que son las ecuaciones clásicas para el caso considerado y cuya

integración, con los valores iniciales dados en la figura 118, conduce a:

$$x = V_0 \operatorname{sen} \theta . \cos \varphi . t \quad ; \quad y = V_0 \operatorname{sen} \theta . \operatorname{sen} \varphi . t \quad ;$$
$$z = V_0 \cos \theta . t - \frac{1}{2} g t^2 .$$

106. Movimiento de un punto vinculado. — a) *Curva horizontal.* Supongamos que una partícula material está obligada a moverse en un plano horizontal siguiendo una trayectoria curva cualquiera. Puede pensarse en una bolita atravesada diametralmente por un alambre que tiene la forma de una curva plana que se dispone horizontalmente, deslizándose la pequeña esfera sin roce alguno. Si llamamos dl al elemento de longitud del alambre recorrido por la esfera en el intervalo $dt (cdt = du)$, la expresión del elemento lineal será:

[139] $$ds^2 = \gamma du^2 - dl^2$$

donde γ depende sólo de z y en el caso considerado será una constante.

Siendo los g_{ik} constantes, las ecuaciones de la geodésica, son:

$$\frac{d^2u}{ds^2} = 0 \quad ; \quad \frac{d^2l}{ds^2} = 0 \quad ;$$

de las cuales resulta

[140] $$\frac{dl}{dt} = \text{constante} = V \quad ;$$

o sea que el punto debe moverse sobre la curva con movimiento uniforme. La superficie espacio-tiempo, puede considerarse, en este caso, como un cilindro recto, cuya base es la curva considerada. Las geodésicas de esta superficie cilíndrica son hélices que se convierten en rectas euclídeas al desarrollar aquélla sobre un plano. Aunque γ sea diferente de la unidad, como su valor es constante, la [139] corresponde a una variedad semieuclídea, pues bastaría hacer

[141] $$\gamma du^2 = du'^2 \quad ,$$

lo que equivale a un simple cambio de unidades, y llevar este valor a la [139], para hacer que en aquéllas los g_{ik} valieran $+1$ y -1.

b) *Fuerza centrífuga.* Consideremos ahora que la partícula se pueda mover sin roce en el inte-

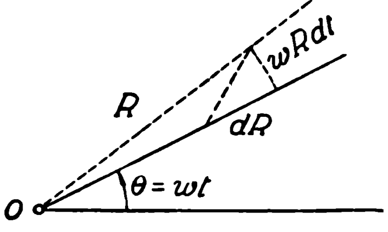


Fig. 119. — Fuerza centrífuga.

rior de un tubo horizontal rectilíneo (fig. 119), que gira con la velocidad constante ω. En este caso, el elemento lineal estará dado por la expresión

[142] $$ds^2 = du^2 - d\sigma^2$$

considerando el γ constante del campo gravitatorio igual a la unidad, lo que puede hacerse siempre de acuerdo con [141]. En la [142] $d\sigma$ es la parte puramente espacial que recorre la partícula en el tiempo $dt (cdt = du)$ y que, como se ve en la figura, es

$$d\sigma^2 = dR^2 + \omega^2R^2dt^2 = dR^2 + \frac{\omega^2R^2}{c^2}du^2 \quad ,$$

y llevando este valor a la [142], se obtiene:

[143] $$ds^2 = \left(1 - \frac{\omega^2R^2}{c^2}\right) du^2 - dR^2$$

que tiene exactamente la misma forma de la [119], cuyas geodésicas ya han sido calculadas, pero donde γ tiene el valor:

[144] $$\gamma = 1 - \frac{\omega^2R^2}{c^2} \quad ,$$

por lo cual, en lugar de [122], se obtiene:

[145] $$\frac{d^2R}{dt^2} = \omega^2R$$

que es la conocida expresión de la aceleración para el caso considerado que, multiplicada por la masa de la partícula, da la fuerza centrífuga.

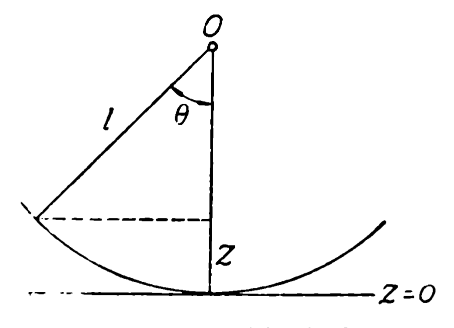


Fig. 120. — Péndulo circular.

c) *Péndulo circular*. El punto está obligado a moverse sobre un arco de circunferencia cuyo plano es vertical. La expresión del elemento lineal es, en este caso,

$$ds^2 = \gamma du^2 - d\sigma^2$$

siendo $d\sigma = l d\theta$, con l constante, si l es la longitud del péndulo. De acuerdo con [131], el valor de γ será (véase fig. 120):

[146] $$\gamma = 1 - \frac{2gR}{c^2} + \frac{2g}{c^2} l (1 - \cos\theta).$$

La ecuación de la geodésica de la superficie espacio-tiempo, definida por la expresión

[147] $$ds^2 = \gamma du^2 - l^2 d\theta^2 \quad ,$$

la obtenemos haciendo en [95] $h = 1$, con lo que:

[148] $$\frac{d^2\theta}{ds^2} - \frac{1}{l^2}\begin{bmatrix} 0\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 = 0 \quad ,$$

pues ése es el único símbolo de Christoffel no nulo y cuyo valor es:

$$\begin{bmatrix} 0\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x_1} = -\frac{1}{2}\frac{d\gamma}{d\theta} = -\frac{g}{c^2}\, l \operatorname{sen}\theta .$$

Llevando este valor a la [148] y tomando $ds = c dt = du$, resulta:

[149] $$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta = 0 \quad ,$$

que es la ecuación diferencial clásica del movimiento pendular.

d) *Péndulo esférico.* Consideremos un punto que está obligado a moverse sobre la superficie de una esfera de radio l. El elemento lineal es

[150] $$ds^2 = \gamma du^2 - l^2 d\theta^2 - l^2 \operatorname{sen}^2\theta d\varphi^2$$

teniendo γ el valor dado en [146].

Los únicos símbolos de Christoffel con índice inferior igual a 1 y diferentes de cero, son (haciendo $x_0 = u$; $x_1 = \theta$; $x_2 = \varphi$):

$$\begin{bmatrix} 0\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{gl}{c^2}\operatorname{sen}\theta \quad ; \quad \begin{bmatrix} 2\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = l^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta \quad ;$$

y, por lo tanto, la [95] para $h = 1$, da:

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{g}{c^2 l}\operatorname{sen}\theta\left(\frac{du}{ds}\right)^2 - \operatorname{sen}\theta\cos\theta\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 0 \quad ,$$

o sea (para $ds = c dt = du$):

[151] $$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 0 .$$

Los únicos símbolos no nulos con índice inferior igual a 2, son:

$$\begin{bmatrix} 1\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} = -l^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta \quad ,$$

por lo cual, la [95] para $h = 2$, da:

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} + 2\operatorname{cotg}\theta . \frac{d\theta}{ds}\frac{d\varphi}{ds} = 0 \quad ,$$

o sea:

[152] $$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\operatorname{cotg}\theta\frac{d\theta}{dt}\frac{d\varphi}{dt} = 0 .$$

Las ecuaciones [151] y [152] coinciden con las ecuaciones clásicas del péndulo esférico. Escribiendo la [151] así,

$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g \operatorname{sen}\theta + l \operatorname{sen}\theta \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \cos\theta$$

en el primer miembro aparece la aceleración tangencial en la dirección de un meridiano (φ = constante), y dicha aceleración es igual a la componente $g \operatorname{sen}\theta$ con signo menos, pues θ se cuenta a partir de la posición de equilibrio, más la componente de la aceleración centrífuga sobre el mismo meridiano. De la [152] se obtiene, por una primera integración, la ley de las áreas. Haciendo, en efecto,

$$\frac{d\varphi}{dt} = Y$$

se obtiene:

$$\frac{dY}{dt} + 2Y\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\frac{d\theta}{dt} = 0 \quad ;$$

$$\frac{dY}{Y} + 2\frac{d \operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta} = 0 \quad ; \quad Y \operatorname{sen}^2\theta = A \quad ,$$

o sea

$$\frac{d\varphi}{dt} . \operatorname{sen}^2\theta = A \quad ,$$

donde A es una constante de integración. Multiplicando ambos miembros de la última expresión por el cuadrado de la longitud del péndulo, se tendrá

$$[153] \qquad \frac{d\varphi}{dt} . l^2 \operatorname{sen}^2\theta = Al^2 = \text{constante.}$$

El primer miembro es igual al doble de la velocidad areal del movimiento proyectado sobre un plano horizontal.

De la [151] se obtiene también fácilmente una primera integral. Para ello basta multiplicarla por $d\theta/dt$, por lo cual, teniendo en cuenta la [153], aquélla se convierte:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta\frac{d\theta}{dt} - A^2\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\operatorname{sen}^4\theta}\frac{d\theta}{dt} = 0 \quad ,$$

y de aquí:

$$[154] \; \frac{1}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \frac{g}{l}\cos\theta + \frac{1}{2}\frac{A^2}{\operatorname{sen}^2\theta} = \text{constante} = E \quad ,$$

que es la llamada integral de la energía de la mecánica clásica, como se ve si se multiplica todo por l^2 y por la masa de la partícula móvil. La integración de las [153] y [154] requiere efectuar cálculos muy largos que el lector podrá encontrar en

los tratados de mecánica, pero una integral particular se encuentra de inmediato haciendo

$$\frac{d\theta}{dt} = 0 \quad ,$$

con la cual $\theta = \text{const.}$ y queda satisfecha la [154] y dando la [153], en tal caso,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \text{constante} = \frac{2\pi}{T}$$

y llevando este valor a la [151] y siendo la derivada segunda de θ también nula, resulta:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \theta}{g}},$$

que es el período del llamado péndulo cónico en el cual la masa pendular recorre una circunferencia de radio igual a l sen θ.

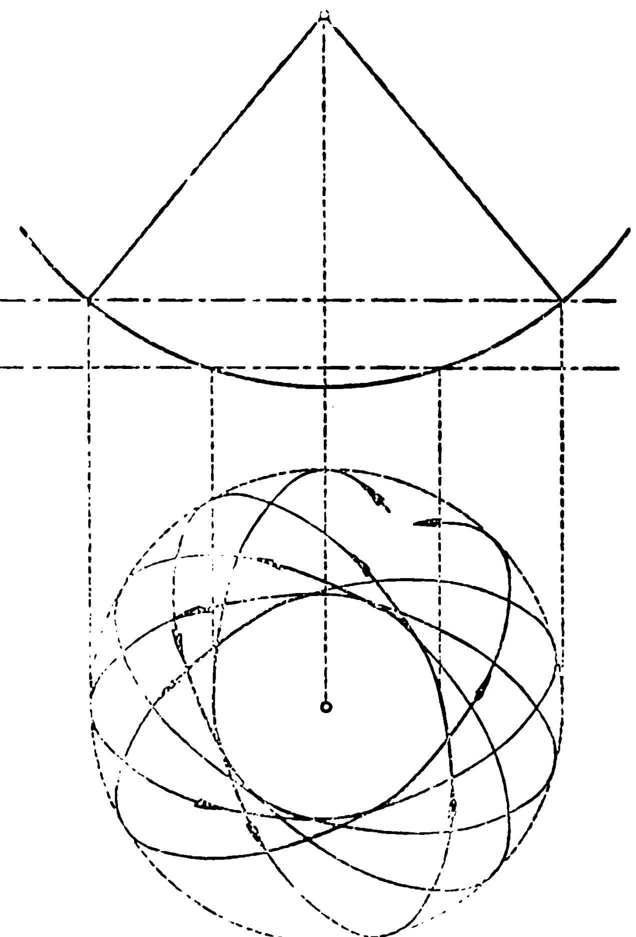


Fig. 121. — Proyección horizontal de la trayectoria de un péndulo esférico.

En el párrafo 127 calcularemos el corrimiento del perihelio de las órbitas planetarias, y los cálculos que haremos allí son parecidos a los que deben hacerse para integrar las [153] y [154]. También en el caso del péndulo resulta un movimiento de roseta, pues la masa pendular se mueve entre dos planos horizontales fijos π_1, π_2, teniendo la proyección de la trayectoria sobre un plano horizontal la forma representada en la fig. 121. Este movimiento puede consi-

derarse como si se efectuara sobre una elipse que va girando en conjunto en el mismo sentido del punto móvil. Si el lector no ha observado aún este movimiento, le recomendamos que cuelgue del dintel de una puerta un cuerpo cualquiera, una llave, por ejemplo, y se fije en la trayectoria descripta. Digamos de paso que, si el experimento de Foucault es difícil de realizar, se debe al hecho de superponerse al efecto buscado el que aquí estamos estudiando y a causa del cual, basta la más pequeña desviación lateral de la masa pendular, en el momento de soltarla, para que los resultados sean por completo falseados, pudiendo hasta ocurrir que, del experimento, surja un movimiento de la Tierra opuesto al verdadero.

El tensor de Riemann-Christoffel

107. Derivación covariante y desplazamiento paralelo. — Supongamos que en una variedad de n dimensiones se tiene definido un escalar φ que es un tensor de orden cero, o sea un invariante. Esta φ es una función de las coordenadas, pero su valor en cada punto es independiente del sistema de coordenadas elegido. Si consideramos una geodésica de esa variedad, sobre cada punto de esa línea el escalar φ tendrá cierto valor y si llamamos ds al elemento de geodésica, el cociente de los diferenciales $d\varphi/ds$ será un invariante independiente del sistema de coordenadas. En el sistema de coordenadas x_i, la derivada de φ respecto de s se expresará:

$$[155] \quad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{dx_i}{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\frac{dx_0}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{dx_1}{ds} + \dots$$

siendo aquí los dx_i las componentes, en ese sistema, del elemento ds.

Como estas dx_i son las componentes de un tensor contravariante de primer orden (en cuatro dimensiones son las componentes de un cuadrivector contravariante), dx_i/ds son también componentes de un tensor contravariante de primer orden. Se desprende de aquí, por ser invariante $d\varphi/ds$ y de acuerdo con [8], que las magnitudes

$$[156] \qquad A_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$$

son las componentes de un tensor covariante de primer orden. En cuatro dimensiones A_i serían las cuatro componentes de un cuadrivector covariante. A este tensor covariante de primer orden A_i se le llama *gradiente* del escalar φ.

Si llamamos ψ al invariante o escalar definido en [155], o sea

[157] $$\psi = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{dx_i}{ds}$$

y derivamos esta expresión respecto de s, obtenemos:

[158] $$\frac{d\psi}{ds} = \frac{d^2\varphi}{ds^2} = \frac{\partial\psi}{\partial x_k}\frac{dx_k}{ds}$$

que es, naturalmente, otro invariante. Calculemos ahora, tomando en cuenta [157], la derivada parcial de ψ respecto de x_h:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_k} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_k}\frac{dx_i}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{dx_i}{ds}\right).$$

Llevando este valor a [158], obtenemos:

[159] $$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_k}\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{dx_i}{ds}\right)\cdot\frac{dx_k}{ds}$$

El último término del segundo miembro de esta expresión es, simplemente,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{d^2x_i}{ds^2}$$

que expresa una suma respecto del índice móvil i.

Nada se altera si en ese segundo término cambiamos este índice móvil i por el índice h, dejando los índices $i\,k$ del primer término tal como están. Se tiene, así,

[160] $$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_k}\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_h}\frac{d^2x_h}{ds^2}.$$

Pero por las ecuaciones [93] de la línea geodésica, se tiene:

$$\frac{d^2x_h}{ds^2} = -\begin{Bmatrix} i\ k \\ h \end{Bmatrix}\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds},$$

y llevando este valor a [160], resulta:

[161] $$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_h} - \begin{Bmatrix} i\ k \\ h \end{Bmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial x_h}\right)\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds}.$$

Como el primer miembro de esta igualdad es un invariante y

$$\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds}$$

es un tensor contravariante de segundo orden, la parte encerrada entre paréntesis debe constituir un tensor covariante de segundo orden A_{ik}, de tal modo que, teniendo en cuenta [156], podrá escribirse:

$$A_{ik} = \frac{\partial A_i}{\partial x_k} - \left\{ {i\,k \atop h} \right\} A_h. \qquad [162]$$

Este tensor covariante A_{ik} de segundo orden, obtenido por derivación a partir del tensor de primer orden A_i se llama la derivada covariante de A_i y también *ampliación* o *extensión* de A_i.

Si la variedad fuera euclídea y se utilizaran coordenadas cartesianas, los símbolos de Christoffel que aparecen en [162] serían todos nulos y la derivación covariante coincidiría con la derivación común. Esta operación de ampliación puede ser generalizada a tensores de cualquier orden y clase (covariantes, contravariantes o mixtos), de tal modo que con ella y por derivación, puede obtenerse, a partir de determinado tensor, otro de orden superior. Para captar el significado de esta operación, lo mejor es introducir, siguiendo a LEVI-CIVITA, el concepto de *desplazamiento paralelo*. Para ello, comenzaremos por suponer que en un plano (fig. 122) se tiene una curva *s*, pudiendo considerar que sobre cada punto de la misma se aplica un vector determinado. Si el vector aplicado en P es A_1 y en Q, A_2, para hallar la diferencia entre ambos, ΔA, trazamos por Q un vector igual en módulo y paralelo a A_1. La derivada del vector A sobre la curva *s* y en el punto P, será:

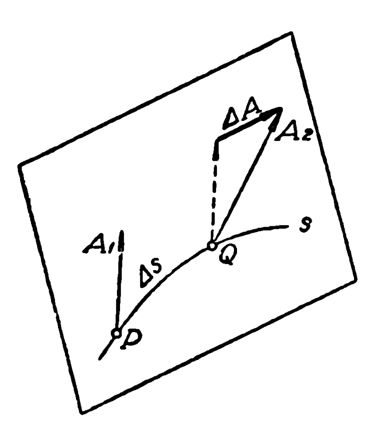


Fig. 122. — Desplazamiento de un vector.

$$\frac{dA}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta s}. \qquad [163]$$

Si sobre el plano considerado se tuviera un campo de vectores uniforme —todos de igual módulo y paralelos entre sí— la derivada dA/ds sería nula en todos los puntos. Si se tiene un solo vector y se le quiere ir trasladando sobre una curva de modo que en todas sus posiciones se mantenga igual y paralelo, será necesario y suficiente para ello, que la derivación [163] sea constantemente nula. Si sobre un contorno cerrado se efectúa este traslado del vector, siempre paralelamente a sí mismo, y la variedad es euclídea, cuando se llega al punto de partida la posición final del vector coincide, claro está, con su posición inicial.

Se trata ahora de extender esta noción de desplazamiento paralelo de un vector a variedades no euclídeas. Supondremos

para ello, primeramente, que la variedad tiene sólo dos dimensiones y a esa superficie curva la consideraremos introducida en el espacio euclídeo común de tres dimensiones.

Para trasladar el vector A aplicado en P y apoyado todo él sobre la superficie curva (para lo cual lo consideramos infinitamente pequeño) hasta el punto Q, situado en la inmediata proximidad de P (fig. 123), paralelamente a sí mismo, trazamos en Q un vector B paralelo a A en el espacio euclídeo y trazando en Q el plano π tangente a la superficie, proyectamos B sobre π. La longitud del vector B puede tomarse de tal modo, que su proyección A′ sobre el plano π sea igual al vector A. En realidad, dada una curva determinada que una P con Q, la operación de la traslación paralela debe efectuarse de un punto a otro infinitamente vecino situado sobre la curva, pues la posición final del vector trasladado dependerá, como veremos, del camino que se ha seguido. Consideremos, como ejemplo, que se traslada el vector F_1 [fig. 124 (a)], aplicado en el punto H

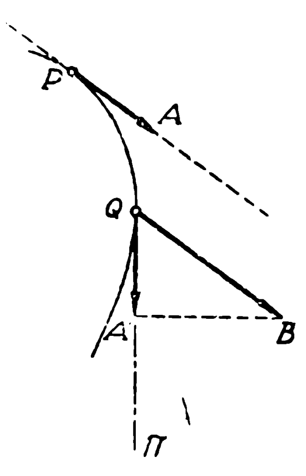


Fig. 123. — Desplazamiento paralelo de un vector.

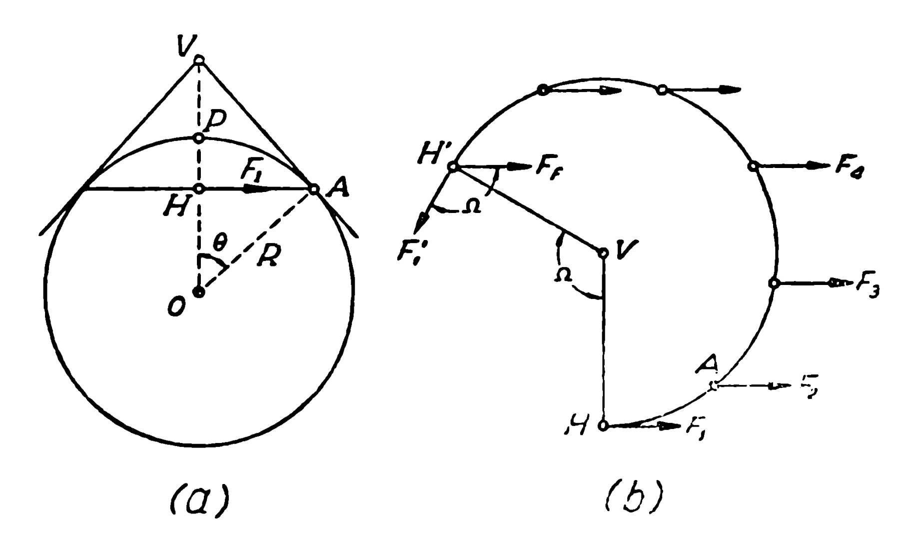


Fig. 124. — Desplazamiento paralelo a lo largo de un paralelo.

del paralelo de la superficie esférica que tiene por polo al punto P. El vector F_1 tiene en H la dirección del paralelo que pasa por allí y si consideramos la superficie cónica tangente a la esfera en el paralelo considerado y cuyo vértice es V, aquel

vector F_1 podrá considerarse que pertenece también a esa superficie cónica. Trasladar paralelamente a sí mismo al vector F sobre el paralelo de la esfera o sobre la superficie cónica, viene a ser, entonces, lo mismo.

La métrica de la superficie cónica no cambia si se la desarrolla sobre un plano, como se ve en la parte *b* de la figura. Se ha supuesto que el cono se cortó por la generatriz VH, de modo que los vectores HF_1 y $H'F'_1$ son en realidad coincidentes, lo mismo que las rectas VH y VH'. Al trasladar F_1 paralelamente a sí mismo sobre la superficie cónica, irá tomando las posiciones que en el desarrollo se representan por los vectores F_2, F_3, etc., hasta que finalmente alcanza la posición F_f que forma con la posición inicial un ángulo Ω. La longitud del arco de circunferencia HAH' es igual a la longitud total del paralelo, o sea $2\pi R \operatorname{sen}\theta$ e igual también a:

$$(2\pi - \Omega)VA = (2\pi - \Omega)R \, . \operatorname{tg}\theta$$

de donde

$$(2\pi - \Omega)\operatorname{tg}\theta = 2\pi \operatorname{sen}\theta \quad ; \quad 2\pi - \Omega = 2\pi\cos\theta \quad ;$$
$$\Omega = 2\pi(1 - \cos\theta).$$

Por otra parte, el área del casquete esférico de polo P y limitado por el paralelo que pasa por H, es:

$$\Delta S = \int_0^\theta R d\theta \, . \, 2\pi R \operatorname{sen}\theta = 2\pi R^2(1 - \cos\theta)$$

resultando, así, que

$$\Delta S = R^2\Omega \quad ; \quad \Omega = \frac{\Delta S}{R^2} \, .$$

Esto nos dice que el desplazamiento angular que experimenta un vector al trasladarse paralelamente a sí mismo, sobre una curva cerrada de una superficie esférica, es proporcional al área encerrada por la curva. En la fig. 125 se ha representado la traslación a lo largo del arco de meridiano PA, luego sobre el ecuador AB y, por último, siguiendo otro meridiano, de B hasta P. El ángulo Ω en este caso es simplemente la diferencia de longitud entre los meridianos PA y PB y se tiene, si llamamos ΔS al área PAB:

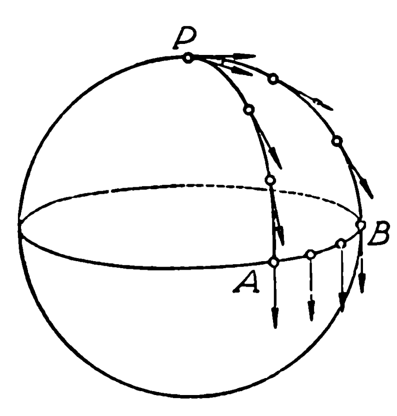


Fig. 125. — Desplazamiento paralelo a lo largo de un camino cerrado.

$$\frac{\Delta S}{2\pi R^2} = \frac{\Omega}{2\pi} \quad ; \quad \Delta S = R^2\Omega \quad ;$$

que coincide con el valor hallado anteriormente. Cuando se habla de desplazamiento paralelo sobre una curva de una variedad no euclídea no puede tratarse, naturalmente, del paralelismo común en sentido euclideano y debe pensarse que esa expresión significa: desplazamiento lo más paralelamente posible compatible con la estructura métrica de la variedad. Si ésta tiene n dimensiones puede considerarse que se asocia a cada punto P de la misma un espacio euclídeo de n dimensiones. En un entorno suficientemente pequeño del punto P, las coordenadas sobre la variedad coinciden con las de la "variedad euclídea tangente". Aunque para definir el desplazamiento paralelo sobre una superficie se utiliza el plano tangente a la misma, se llega finalmente a establecer relaciones que no dependen de las coordenadas y sí de la naturaleza intrínseca de la variedad misma. La variación angular que experimenta un vector por desplazamiento paralelo a lo largo de una curva cerrada, está vinculada a la curvatura de la superficie y puede servir para definir esa curvatura sin apelar a la variedad tangente.

Así como en una variedad euclídea, la condición para que un vector se traslade sobre cierto camino paralelamente a sí mismo es que sus derivadas respecto de las coordenadas sean nulas, *en una variedad cualquiera se cumple un desplazamiento paralelo si en todos los puntos del camino seguido se anula la derivada covariante del vector.* Luego, para que A_i experimente un desplazamiento paralelo a lo largo de una línea, es necesario que todas las componentes del tensor A_{ik} de [162] sean nulas a lo largo de la línea considerada.

De lo que hemos dicho se desprende que en una variedad no euclídea no puede hablarse de vectores paralelos situados en puntos distantes A y B de la variedad. Si partimos de A por el camino 1, por desplazamiento paralelo llegamos a B, donde el vector desplazado tiene cierta dirección, pero siguiendo otro camino 2 llegaríamos a B y el vector tendría otra dirección diferente.

Se ha buscado generalizar las métricas no euclideanas haciendo que, además de la no integrabilidad de la dirección, sea también no integrable la longitud. Supongamos que el vector trasladado paralelamente a sí mismo a lo largo de un camino cerrado está constituído por una regla métrica de longitud igual a la unidad. Este metro-patrón regresa al punto de partida después de recorrer cierto camino, conservándose siempre paralelo a sí mismo, y formará, si la variedad es no euclídea, cierto ángulo con su posición inicial. Pero hemos supuesto que la longitud, en cambio, se conserva.

¿No podría inventarse una geometría más amplia en la cual, por desplazamiento paralelo, variara también la longitud? Esta ampliación ha sido realizada efectivamente por WEYL

y EDDINGTON para poder geometrizar no sólo el campo gravitatorio, sino también el campo electromagnético. Pero desde el punto de vista físico, las teorías del campo así establecidas no son satisfactorias por diversos motivos. En particular, habría que pensar que el tamaño de los átomos de una misma substancia, y que se encuentran en las proximidades de determinado lugar, debería ser diferente según fuera la historia de cada uno de ellos, por lo cual las líneas espectrales de la luz proveniente de las estrellas deberían ser mucho más anchas de lo que realmente son. Por lo tanto, parece ser conveniente admitir que la longitud de una regla no varía cuando se la traslada: tener en el mismo lugar muchos metros-patrones, unos pequeños y otros grandes, según los caminos que hubieran recorrido, es demasiado complicado. ¡Ya es bastante con que varíe la dirección por traslación paralela!

108. **Tensor de Riemann-Christoffel.** — Multipliquemos cada una de las componentes del tensor A_{ik} de [162] por cada una de las componentes de un tensor covariante B de primer orden. Si la variedad tiene 4 dimensiones, A_{ik} tiene 16 componentes, y B será un cuadrivector, por lo cual el número total de componentes del nuevo ente será de 64. Tendremos, así, un tensor covariante de tercer orden, que indicaremos así:

[164] $$C_{ikj} = A_{ij}B_k$$

y de acuerdo con [162], será

[165] $$C_{ikj} = B_k \frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \left\{ \begin{matrix} i\ j \\ h \end{matrix} \right\} A_h B_k .$$

Análogamente, formamos el tensor

$$D_{ikj} = B_{kj}A_i \quad .$$

o sea nuevamente por [162]:

[166] $$D_{ikj} = A_i \frac{\partial B_k}{\partial x_j} - \left\{ \begin{matrix} k\ j \\ h \end{matrix} \right\} A_i B_h .$$

Sumando [165] y [166] formamos el tensor siguiente:

[167] $$E_{ikj} = B_k \frac{\partial A_i}{\partial x_j} + A_i \frac{\partial B_k}{\partial x_j} - \left\{ \begin{matrix} i\ j \\ h \end{matrix} \right\} A_h B_k - \left\{ \begin{matrix} k\ j \\ h \end{matrix} \right\} A_i B_h$$

e introduciendo el tensor de segundo orden

$$E_{ik} = A_i B_k$$

la [167] podrá escribirse:

[168] $$E_{ikj} = \frac{\partial E_{ik}}{\partial x_j} - \left\{ \begin{matrix} i\ j \\ h \end{matrix} \right\} E_{hk} - \left\{ \begin{matrix} k\ j \\ h \end{matrix} \right\} E_{ih}$$

que es la ampliación del tensor de segundo orden E_{ik}. Si en [168] reemplazamos E_{ik} por A_{ik} dado en [162], o sea:

$$E_{ik} = A_{ik} = \frac{\partial A_i}{\partial x_k} - \begin{Bmatrix} i\ k \\ r \end{Bmatrix} A_r$$

$$E_{hk} = A_{hk} = \frac{\partial A_h}{\partial x_k} - \begin{Bmatrix} h\ k \\ r \end{Bmatrix} A_r$$

$$E_{ih} = A_{ih} = \frac{\partial A_i}{\partial x_h} - \begin{Bmatrix} i\ h \\ r \end{Bmatrix} A_r$$

designando por r en todos los casos al índice móvil que en [162] es h.

Llevando estos valores a [168] y designando por A_{ikj} al tensor E_{ikj}, se tiene:

[169] $$A_{ikj} = \frac{\partial^2 A_i}{\partial x_k \partial x_j} - A_r \frac{\partial}{\partial x_j}\begin{Bmatrix} i\ k \\ r \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} i\ k \\ r \end{Bmatrix}\frac{\partial A_r}{\partial x_j} - \\ - \begin{Bmatrix} i\ j \\ h \end{Bmatrix}\frac{\partial A_h}{\partial x_k} + \begin{Bmatrix} i\ j \\ h \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} h\ k \\ r \end{Bmatrix} A_r - \begin{Bmatrix} k\ j \\ h \end{Bmatrix}\frac{\partial A_i}{\partial x_h} + \\ + \begin{Bmatrix} k\ j \\ h \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} i\ h \\ r \end{Bmatrix} A_r.$$

Si en esta expresión se permuta k con j, el primer término del segundo miembro no varía y tampoco varían los dos últimos por la simetría de los símbolos de Christoffel con respecto a los índices superiores. Tampoco varía la suma de los términos tercero y cuarto al permutar k con j, pues

$$\begin{Bmatrix} i\ k \\ r \end{Bmatrix}\frac{\partial A_r}{\partial x_j} + \begin{Bmatrix} i\ j \\ h \end{Bmatrix}\frac{\partial A_h}{\partial x_k} = \begin{Bmatrix} i\ j \\ r \end{Bmatrix}\frac{\partial A_r}{\partial x_k} + \begin{Bmatrix} i\ k \\ h \end{Bmatrix}\frac{\partial A_h}{\partial x_j}$$

desde el momento que sólo difieren en los índices móviles h y r, a los cuales podría designárseles con una misma letra. Por lo tanto, el tensor A_{ijk} tendrá la expresión:

[170] $$A_{ijk} = . - A_r \frac{\partial}{\partial x_k}\begin{Bmatrix} i\ j \\ r \end{Bmatrix} - (. + .) + \\ + \begin{Bmatrix} i\ k \\ h \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} h\ j \\ r \end{Bmatrix} A_r - . + .$$

habiéndose designado por puntos a los términos que resultan iguales a los correspondientes de [169]. Formemos el tensor dado por la diferencia de [169] y [170]:

[171] $$A_{ikj} - A_{ijk} = \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\begin{Bmatrix} i\ j \\ r \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_j}\begin{Bmatrix} i\ k \\ r \end{Bmatrix} + \\ + \begin{Bmatrix} i\ j \\ h \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} h\ k \\ r \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} i\ k \\ h \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} h\ j \\ r \end{Bmatrix}\right) A_r.$$

El primer miembro de esta expresión es un tensor covariante de tercer orden y resulta igual al producto interior del tensor covariante de primer orden A_r por la expresión encerrada entre paréntesis, que debe ser, entonces, un tensor de cuarto orden:

$$A_{ikj} - A_{ijk} = R^r{}_{ikj} A_r .$$

Por lo tanto, se tiene:

[172] $$R^r{}_{ikj} = \frac{\partial}{\partial x_k}\begin{Bmatrix} i\ j \\ r \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_j}\begin{Bmatrix} i\ k \\ r \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} i\ j \\ h \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} h\ k \\ r \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} i\ k \\ h \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} h\ j \\ r \end{Bmatrix}$$

que es el tensor de cuarto orden, covariante con respecto a los indices $i\,k\,j$ y contravariante con respecto al índice r, de Riemann-Christoffel. Obsérvese que este tensor está formado únicamente por términos que contienen las derivadas de las componentes del tensor fundamental g_{ik}. En los símbolos de Christoffel aparecen derivadas primeras de los g_{ik} y en este tensor derivado del fundamental aparecerán, a lo más, derivadas segundas de g_{ik}.

En una variedad euclídea puede adoptarse un sistema de coordenadas en que los g_{ik} sean todos constantes, y en este caso será

[173] $$R^r{}_{ikj} = 0.$$

Dado el carácter tensorial de la igualdad anterior, si se utilizaran en la variedad euclídea otras coordenadas, por ejemplo curvilíneas, algunos símbolos de Christoffel dejarían de ser nulos, pero todas las componentes del tensor de [173] seguirán siendo iguales a cero. Por lo tanto: la condición *necesaria* y *suficiente* (lo que también puede demostrarse) *para que una variedad sea euclídea es que todas las componentes del tensor de Riemann-Christoffel sean iguales a cero.*

EJEMPLO. Si el elemento lineal es

$$ds^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 d\theta^2 \quad ; \quad x_1 = \varrho \quad ; \quad x_2 = \theta \quad ;$$

que corresponde a un plano, en coordenadas polares, o a una superficie cónica, se verifica sin dificultad que las 16 componentes ($2^4 = 16$) del tensor dado en [172] son todas nulas. Los únicos símbolos de tres índices de primera especie que no se anulan, son:

$$\begin{bmatrix} 2\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} = -\varrho \quad ; \quad \begin{bmatrix} 1\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} = \varrho .$$

Como la forma es ortogonal, se tiene:

$$\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{2\ 2}{1} = g^{11}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{2\ 2}{1} = -\varrho \quad ; \quad \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{1\ 2}{2} = g^{22}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{1\ 2}{2} = \frac{1}{\varrho}.$$

Calculemos, por ejemplo, la componente

$$R^2{}_{121} = -\frac{\partial}{\partial\varrho}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{1\ 2}{2} - \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{1\ 2}{2}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{2\ 1}{2} = \frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{\varrho^2} = 0 \ ,$$

pues el primer término del segundo miembro de [172] es nulo, por ser él la derivada con respecto a x_k y para esa componente $k = 2$ y $x_2 = \theta$; y el tercero es nulo por ser $i = j = 1$ con lo cual, cualquiera que sea el valor de h, el primer factor de ese término es siempre nulo y de la suma correspondiente al último término, el único sumando no nulo es aquel en que $h = 2$.

Análogamente, se vería que las demás componentes son también nulas.

En cambio, si el elemento lineal fuera el de una superficie esférica de radio a:

$$ds^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta d\varphi^2$$

se encontraría para la componente

$$R^2{}_{121} = -\frac{d}{d\theta}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{1\ 2}{2} - \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{1\ 2}{2}^2 = 1.$$

109. El tensor contraído de Riemann-Christoffel. — Si en [172] hacemos $j = r$ y sumamos respecto de r, o sea efectuamos la operación de contracción, obtenemos:

$$[174] \qquad R_{ik} = \frac{\partial}{\partial x_k}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{i\ r}{r} - \frac{\partial}{\partial x_r}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{i\ k}{r} + $$
$$+ \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{i\ r}{h}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{k\ h}{r} - \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{i\ k}{h}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{h\ r}{r}$$

que es el tensor contraído de Riemann-Christoffel, de segundo orden, llamado también tensor de RICCI. En el segundo factor del tercer término del segundo miembro, permutamos h con k con respecto a la forma como está escrita la [172], aprovechando la simetría de los símbolos de tres índices con respecto a los índices superiores, pues de esta manera, la [174] puede recordarse más fácilmente. En el primer término y en el cuarto de la [174], aparece un símbolo de Christoffel con el índice móvil r, que indica que hay que formar todos los símbolos desde $r = 1$ a $r = n$ y sumar:

$$\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{i\ r}{r} = \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{i\ 1}{1} + \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{i\ 2}{2} + \ldots + \genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{i\ n}{n}$$

si n es el número de dimensiones de la variedad que se consi-

dera. Para los cálculos efectivos, siempre muy complicados, es conveniente expresar esos símbolos en función del valor del determinante formado por los g_{ik}. De acuerdo con la definición de los símbolos de Christoffel dada en [88] y en [91], se tiene:

$$\left\{ \begin{matrix} h\ r \\ r \end{matrix} \right\} = g^{rt} \left[\begin{matrix} h\ r \\ t \end{matrix} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} g^{rt} \frac{\partial g_{ht}}{\partial x_r} + \frac{1}{2} g^{rt} \frac{\partial g_{rt}}{\partial x_h} - \frac{1}{2} g^{rt} \frac{\partial g_{hr}}{\partial x_t} .$$

Cada uno de estos tres términos representa una suma doble, siendo r y t los índices móviles, por lo cual el primer término se anulará con el tercero, como se ve si se permuta en este último r con t, resultando, así:

[175] $$\left\{ \begin{matrix} h\ r \\ r \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{rt} \frac{\partial g_{rt}}{\partial x_h} .$$

Si llamamos g al determinante formado por los g_{rt}, la expresión de g será una suma tal como:

$$g = \ldots + g_{rt}(\text{C . A de } g_{rt}) + \ldots$$

donde g_{rt} figura como factor de un solo término y es factor, precisamente, de su complemento algebraico. Si consideramos como variables a cada uno de los elementos del determinante, la derivada parcial de g, respecto de g_{rt} será

[176] $$\frac{\partial g}{\partial g_{rt}} = \text{C . A . de } g_{rt} = g \,.\, g^{rt} \quad ,$$

donde al establecer la última igualdad se tuvo en cuenta la definición [39].

Si formamos el diferencial total de g considerando como variables a los g_{rt}, obtenemos la doble suma:

[177] $$dg = \frac{\partial g}{\partial g_{rt}} dg_{rt} \quad ,$$

y por [176]

$$dg = g \,.\, g^{rt} dg_{rt}$$

o sea

$$\frac{dg}{g} = g^{rt} dg_{rt} \quad ,$$

pudiendo también escribir

[178] $$d \log g = g^{rt} dg_{rt} .$$

Si el determinante g es negativo, y tal es el caso en la geometría pseudoeuclídea (o semieuclídea) y también en la *pseudo-*

riemanniana (o semirriemanniana) de la teoría de la relatividad, la identidad

$$\frac{d(-g)}{-g} = \frac{dg}{g}$$

permite escribir la [178] así:

$$d \log(-g) = g^{rt} dg_{rt} .$$

Si multiplicamos por 1/2 ambos miembros de esta expresión, tenemos:

$$d \log \sqrt{-g} = \frac{1}{2} g^{rt} dg_{rt} \quad ,$$

y si dividimos por el diferencial dx_h, resulta:

[179] $$\frac{\partial \log \sqrt{-g}}{\partial x_h} = \frac{1}{2} g^{rt} \frac{\partial g_{rt}}{\partial x_h} \quad ,$$

por lo cual, de acuerdo con la [175], resulta:

[180] $$\begin{Bmatrix} h & r \\ & r \end{Bmatrix} = \frac{\partial \log \sqrt{-g}}{\partial x_h} .$$

Llevando este valor a la [174], obtenemos:

[181] $$R_{ik} = \frac{\partial^2 \log \sqrt{-g}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_r} \begin{Bmatrix} i & k \\ & r \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} i & r \\ & h \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k & h \\ & r \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} i & k \\ & h \end{Bmatrix} \frac{\partial \log \sqrt{-g}}{\partial x_h} .$$

En el caso en que se elija un sistema de coordenadas en el cual $\sqrt{-g} = 1$, u otra constante cualquiera, desaparece el primero y el último término de la [181].

Obsérvese que por la simetría de los símbolos de Christoffel el tensor R_{ik} es simétrico, o sea

[182] $$R_{ik} = R_{ki} \quad ,$$

de modo que, en general, y en cuatro dimensiones, sólo se tienen 10 componentes diferentes. Si se multiplica cada una de las componentes R_{ik} por g^{ik} y se suma, se forma el invariante:

[183] $$R = g^{ik} R_{ik} \quad ,$$

llamado *invariante de Riemann* y que, en dos dimensiones, está vinculado de un modo simple con la curvatura de Gauss.

EJEMPLOS. Calculemos el invariante R de la superficie esférica de radio a:

$$ds^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta d\varphi^2$$

$$g = \begin{vmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \operatorname{sen}^2 \theta \end{vmatrix} = a^4 \operatorname{sen}^2 \theta \quad ; \quad \sqrt{g} = a^2 \operatorname{sen} \theta .$$

En este caso, como el determinante es positivo, tomamos $\sqrt{g}$ y no $\sqrt{-g}$.

Haciendo $x_1 = \theta$; $x_2 = \varphi$; deberemos calcular R_{11} y R_{22} para obtener el invariante R de [183], pues se tendrá

$$R = g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22}$$

desde el momento que, por ser la forma ortogonal es $g^{12} = 0$. Para R_{11} se tiene, de acuerdo con [181]:

$$R_{11} = \frac{\partial^2 \log \sqrt{g}}{\partial \theta^2} - \frac{\partial}{\partial \theta}\left\{ {1\ 1 \atop 1} \right\} +$$
$$+ \left\{ {1\ r \atop h} \right\}\left\{ {1\ h \atop r} \right\} - \left\{ {1\ 1 \atop 1} \right\} \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial \theta} \quad ;$$

donde hemos omitido escribir en el segundo término de [181] el sumando

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left\{ {1\ 1 \atop 2} \right\} = \frac{\partial}{\partial \varphi}\left\{ {1\ 1 \atop 2} \right\}$$

pues los g_{ik} no dependen de φ. Por esta razón, en el último término, el único sumando que se tuvo en cuenta es aquel en que $h = 1$. Como, además, es:

$$\left\{ {1\ 1 \atop 1} \right\} = g^{11}\left[{1\ 1 \atop 1} \right] = 0$$

desaparece el segundo y el último término. La doble suma del tercer término es:

$$\left\{ {1\ r \atop h} \right\}\left\{ {1\ h \atop r} \right\} = \underset{\substack{h=1 \\ r=1}}{\left\{ {1\ 1 \atop 1} \right\}\left\{ {1\ 1 \atop 1} \right\}} +$$
$$+ \underset{\substack{h=1 \\ r=2}}{\left\{ {1\ 2 \atop 1} \right\}\left\{ {1\ 1 \atop 2} \right\}} + \underset{\substack{h=2 \\ r=1}}{\left\{ {1\ 1 \atop 2} \right\}\left\{ {1\ 2 \atop 1} \right\}} + \underset{\substack{h=2 \\ r=2}}{\left\{ {1\ 2 \atop 2} \right\}\left\{ {1\ 2 \atop 2} \right\}}$$

De estos sumandos se anulan, además del primero, el segundo y el tercero, pues aparecerá en ellos la derivada de g_{11} respecto de φ. Sólo deja de ser nulo el último sumando:

$$\left\{ {1\ 2 \atop 2} \right\}\left\{ {1\ 2 \atop 2} \right\} = \left\{ {1\ 2 \atop 2} \right\}^2 = \left(g^{22}\left[{1\ 2 \atop 2} \right] \right)^2 = \left(\frac{1}{g_{22}} \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} \right)^2 =$$
$$= \left(\frac{1}{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\, a^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \right)^2 = \operatorname{cotg}^2 \theta .$$

Como, además, es:

$$\frac{\partial^2 \log \sqrt{g}}{\partial \theta^2} = - \frac{1}{\text{sen}^2 \theta}$$

resulta:

$$R_{11} = - \frac{1}{\text{sen}^2 \theta} + \text{cotg}^2 \theta = -1.$$

Análogamente, se encuentra

$$R_{22} = - \text{sen}^2 \theta$$

resultando:

$$R = - \frac{1}{a^2} - \frac{\text{sen}^2 \theta}{a^2 \,\text{sen}^2 \theta} = - \frac{2}{a^2} \; ,$$

o sea

[184] $$R = -2K \quad ; \quad K = - \frac{1}{2} R \quad ;$$

si llamamos K a la curvatura de Gauss (§ 80) de modo que, en variedades de dos dimensiones, *la curvatura gaussiana es igual a la mitad del invariante de Riemann con signo opuesto.*

CURVATURA DE LA PSEUDOESFERA. El elemento lineal de la pseudoesfera está dado en [109], y con ello el lector podrá calcular las componentes del tensor R_{ik} y verá que dicho cálculo es bastante entretenido, casi tanto como un problema de palabras cruzadas, pero mucho menos difícil. Para que le sirva de control, damos el resultado:

$$R_{11} = - \frac{1}{r^2} + \frac{2}{r^2} = \frac{1}{r^2} \; ; \quad R_{22} = \frac{3r^2}{k^2} - \frac{2r^2}{k^2} = \frac{r^2}{k^2}$$

$$R = \frac{2}{k^2} \; ; \quad K = - \frac{1}{k^2} \, .$$

Esta constante k se comporta, entonces, en forma análoga al radio de la esfera común y la analogía se hace aún más patente si se calcula la superficie y el volumen *total* de la pseudoesfera, puesto que, sin dificultad, se encuentra:

$$S = 4\pi k^2 \quad ; \quad V = \frac{2}{3} \pi k^3 .$$

110. Coordenadas "gelatinosas". — En todos los ejemplos de este capítulo hemos utilizado, hasta ahora, sistemas de coordenadas que no difieren esencialmente de los empleados en la geometría analítica elemental: coordenadas cartesianas, polares, cilíndricas, etcétera.

A causa de ello, es posible que el lector no haya advertido

aún el significado completo de la expresión según la cual, en una variedad determinada, puede efectuarse una sustitución *cualquiera* de las coordenadas. Para que se comprenda el sentido que tiene ese cualquiera, y se vea la amplia libertad de que se dispone en la elección de las coordenadas, comenzaremos por dar el siguiente ejemplo. Para individualizar los pun-

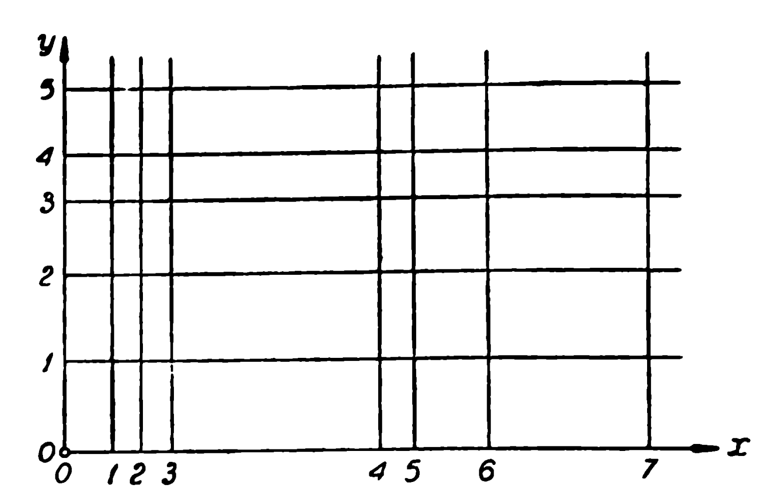


Fig. 126. — La numeración de las coordenadas puede efectuarse casi de cualquier manera.

tos de un plano, tomamos sobre el mismo dos rectas perpendiculares entre sí (fig. 126), como si se tratara de los dos ejes cartesianos comunes. Pero para efectuar las divisiones sobre los ejes, adoptaremos el siguiente criterio: Supondremos que el texto del "Quijote" está escrito sobre una tirilla de papel que puede imaginarse pegada sobre el eje x, de tal modo que la primera *a* de dicho texto coincida con el origen O; en la segunda *a* pondremos la división 1, en la tercera el 2 y así sucesivamente, en tanto que para el eje y adoptaremos la letra *e* tal como se ve en este esquema:

y: 0 1 2 3
En un lugar de la Mancha, de cuyo nombre...
x: 0 1 2 3 ....

Las divisiones intermedias entre 0 y 1, entre 1 y 2, etc., las haremos de modo que se satisfagan ciertas condiciones de continuidad. Para entender lo que esto significa, imaginemos que sobre el mismo plano trazamos una red normal de coordenadas $x'y'$ y de este modo puede pensarse que se pasa de la red normal a la red *cervantina*, estirando o comprimiendo adecuadamente a la primera. Obsérvese que lo que deformamos es la red que forma la malla de nuestro sistema de coordenadas, en

tanto que sobre el plano mismo, que puede ser el piso de nuestra habitación, no ejercemos acción alguna. En el caso del ejemplo se comprende que la x será sólo función de x', en tanto que la y dependerá únicamente de y'. En la fig. 127 se ha representado la distancia de las sucesivas a del texto del "Quijote" sobre el eje de las x, habiéndose tomado sobre el

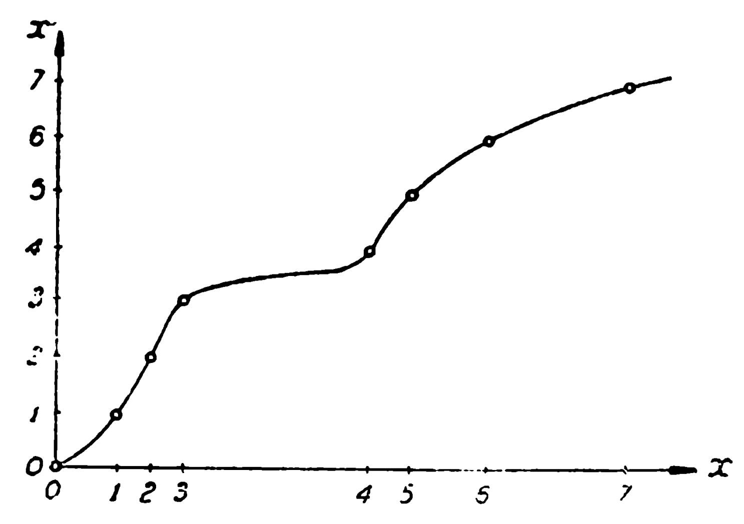


Fig. 127. — El texto del Quijote como base para un sistema "cervantino" de coordenadas.

eje x' intervalos iguales entre sí. De este modo, se tiene la representación de x' en función de x. En realidad, se tienen solamente ciertos puntos separados entre sí, pero por ellos se podrá hacer pasar siempre una curva que sea continua lo mismo que sus derivadas.

Claro está que la función x' de x tendrá que ser en todas partes monótona creciente, pues de otro modo, a un valor de x' podrían corresponder dos valores o más de x.

Utilizando la malla normal de coordenadas $x'y'$, la distancia entre dos puntos infinitamente próximos estará expresada así:

[185] $$ds^2 = dx'^2 + dy'^2$$

y siendo

$$x' = f(x) \quad ; \quad y' = \varphi(y) \quad ;$$

se tendrá

$$dx' = \frac{df}{dx}\, dx = \sqrt{g_{11}}\, dx$$

$$dy' = \frac{d\varphi}{dy}\, dy = \sqrt{g_{22}}\, dy$$

y, en consecuencia,

[186] $$ds^2 = g_{11}dx^2 + g_{22}dy^2$$

siendo g_{11} *sólo función de* x y g_{22} *sólo función de* y.

Por complicadas que sean estas funciones, la [186] corresponderá siempre a una variedad euclídea, desde el momento que de ella se puede pasar a la [185]. Como para esta última, se ve de inmediato que todas las componentes del tensor contraído de Riemann-Christoffel, R_{ik}, son nulas

[187] $$R_{11} = R_{12} = R_{22} = 0 \quad ;$$

podemos asegurar que para [186] también seguirán cumpliéndose las [187].

El lector podrá verificar esto último, como ejercicio, en forma directa, aplicando la [181]. A pesar de la estructura complicada de la [181], el cálculo puede efectuarse en contados minutos.

Si calculamos las geodésicas de [186], debemos encontrar que esas líneas son rectas. La naturaleza de la variedad no puede ser afectada por la red que utilicemos para *dar nombre* a sus puntos. Si el plano de nuestro ejemplo fuera el piso de la habitación, los ratones seguirían siempre corriendo rectamente sobre el mismo hacia el lugar donde estuviera el queso, importándoles un ardite del sistema de coordenadas que hubiéramos podido elegir para señalar su ruta.

Aplicando la ecuación de las geodésicas a la [186], teniendo en cuenta que g_{11} depende sólo de x y g_{22} sólo de y, se encuentra:

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \begin{Bmatrix} 1\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{dx}{ds}\frac{dx}{ds} = 0 \quad ,$$

pues

$$\begin{Bmatrix} 1\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0 \quad ; \quad \begin{Bmatrix} 2\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0.$$

Siendo

$$\begin{Bmatrix} 1\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = g^{11} \begin{bmatrix} 1\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2g_{11}}\frac{dg_{11}}{dx}$$

resulta

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{1}{2g_{11}}\frac{dg_{11}}{ds}\frac{dx}{ds} = 0$$

que, integrada, da:

$$\sqrt{g_{11}}\frac{dx}{ds} = A \quad ,$$

siendo A una constante de integración. Análogamente, se obtiene para y:

$$\sqrt{g_{22}}\frac{dy}{ds} = B \quad ,$$

de donde

$$\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}}\frac{dy}{dx} = \frac{B}{A} = C \quad ,$$

y en el sistema acentuado $x'y'$, será

$$\frac{dy'}{dx'} = C.$$

En particular, si se supone que la [186] tiene la forma

$$ds^2 = x^2dx^2 + dy^2 \quad ,$$

la ecuación de *las rectas* en el sistema de coordenadas elegido, sería:

$$y = C\frac{x^2}{2} + D$$

con C y D constantes.

Esta libertad en la elección de las coordenadas puede extenderse también al eje del tiempo. Esto significa que *cualquier reloj, por malo que sea,* con tal que no marche hacia atrás, puede ser utilizado sin inconveniente alguno, si se prescinde de la complicación matemática que acarrearía el uso de un tal reloj. Este aspecto no es nuevo en la física: La termodinámica se ha desarrollado usando desde el comienzo "termómetros malos", que no indicaban la temperatura termodinámica de Lord Kelvin y aún hoy seguimos muy tranquilos utilizando termómetros de alcohol o de mercurio, cuyas indicaciones dependen en forma complicada de lo que señalaría, en el mismo caso, un termómetro de gas perfecto. Cualquier substancia que reúna ciertas condiciones puede ser elegida como substancia termométrica. Habría que excluir, por ejemplo, el agua en las cercanías de los 4° C, del mismo modo que deben excluirse los relojes que, a ciertas horas, les diera por marchar hacia atrás, puesto que sus indicaciones no serían unívocas. Se tiene, también, amplia libertad en lo que se refiere a la elección de la escala termométrica, para la cual podría tomarse también una "escala cervantina" *.

Las coordenadas cervantinas de nuestro ejemplo son, en cierto sentido, todavía muy simples. La red está constituída allí por líneas rectas y podría pensarse en una malla formada por curvas, numeradas, casi, de cualquier manera. Si en la [185] se hace la sustitución

* E. LOEDEL, *Enseñanza de la física*. Editorial Kapelusz, 1949, Buenos Aires.

[188] $$x' = xy$$

[189] $$y' = x^2 - y^2$$

se tendrá:

$$dx' = ydx + xdy \quad ; \quad dy' = 2xdx - 2ydy \quad ;$$

y elevando al cuadrado y sumando, se obtiene para el elemento lineal en el nuevo sistema:

[190] $$ds^2 = (y^2 + 4x^2)dx^2 - 6xydxdy + (x^2 + 4y^2)dy^2 .$$

La manera como ha sido obtenida la [190] nos permite asegurar que se trata de una variedad euclídea, pero si no conociéramos su origen, llegaríamos a la misma conclusión calculando las componentes del tensor R_{ik} y viendo que todas ellas son iguales a cero.

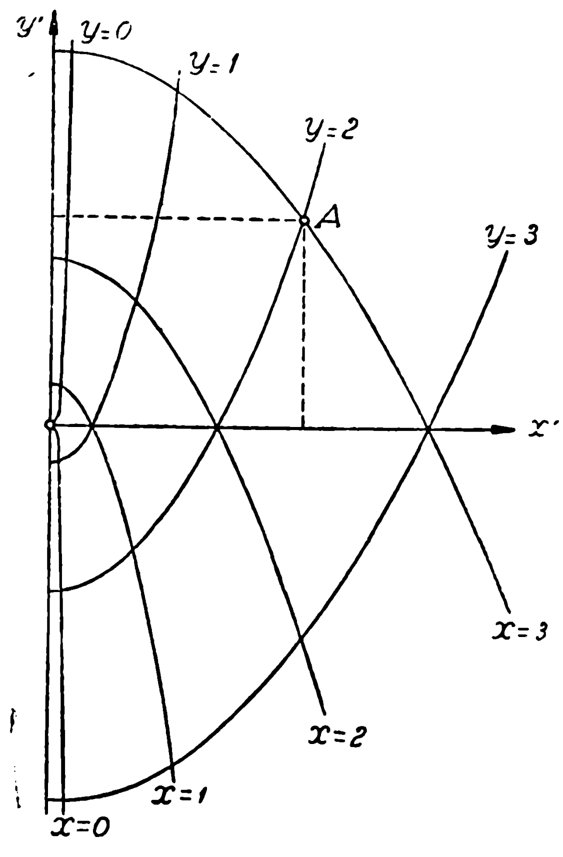


Fig. 128. — Coordenadas curvilíneas.

Puede verse fácilmente que la red de coordenadas, definidas por la sustitución [188] y [189], está constituída por dos familias de parábolas. Si en la [188] se hace

$$y = \text{constante} = a$$

se obtiene:

[191] $$y' = \frac{x'^2}{a^2} - a^2 .$$

Análogamente, haciendo

$$x = \text{constante} = b$$

resulta:

[192] $$y' = b^2 - \frac{x'^2}{b^2} .$$

Las familias de parábolas dadas en [191] y [192] se han representado en la fig. 128, en la cual se ve, por ejemplo, que al punto A le corresponden las coordenadas

$$A \begin{cases} x = 3 \quad ; \quad y = 2 \quad ; \\ x' = 6 \quad ; \quad y' = 5 \quad . \end{cases}$$

Cierto es que si se considera todo el plano, el sistema de coordenadas no daría una representación biunívoca en todos los puntos, pues cada par de parábolas (una de cada familia) se cortan en dos puntos diferentes.

En este sistema de coordenadas, la numeración de las parábolas de cada familia ha sido hecha de un modo razonable, pero nada impediría que hiciéramos intervenir a Cervantes o a Shakespeare para la designación numérica de las mismas. Esta posibilidad de cambiar de escala de punto a punto, la interpretamos, al comienzo de este párrafo, como si se tratara de estiramientos o contracciones que hacemos experimentar a una "red normal" y de ahí la designación de "coordenadas gelatinosas". Pero también puede pensarse que no ejercemos acción ninguna de estiramiento sobre la red primitiva, limitándonos tan sólo a cambiar la forma de numerar a los elementos (líneas, superficies o hipersuperficies) de la misma. El hecho de que se disponga de tanta libertad en la elección del sistema de coordenadas no puede acarrear perturbación alguna: a nadie se le ocurriría prohibir el uso de papeles cuadriculados con escalas logarítmicas, parabólicas, etcétera.

Cuando se trata de variedades euclídeas, la red que hemos llamado normal es una red cartesiana, pero no es nada fácil saber cuál es la "red normal" en una variedad no euclídea y de aquí que, por lo general, sea bastante difícil hallar el significado físico que tienen, en cada caso, las coordenadas empleadas.

111. **Expresión tensorial de las leyes naturales.** — Que para describir los hechos del mundo físico puedan utilizarse diferentes sistemas de coordenadas, es algo tan trivial, como decir que la misma mesa puede ser cubierta por diferentes manteles de cualquier trama. Pero no es trivial afirmar que todos esos sistemas sean *físicamente, dinámicamente,* equivalentes. Si esta última afirmación, que constituye el enunciado del principio general de la relatividad, no se considera también como una verdad trivial, es a causa del desarrollo histórico particular que ha tenido la mecánica.

Los sistemas de coordenadas, incluyendo en esta expresión no sólo las coordenadas espaciales, sino también el tiempo, son algo puesto por nosotros para describir los fenómenos y constituyen, en último término, una manera de designar, de dar nombre, a los puntos del universo. Poco podía importarle al ratón del ejemplo del párrafo anterior, afanado por alcanzar el queso, el sistema de coordenadas utilizado por nosotros para describir su trayectoria. Pero si se trata de un punto material que, por sí solo, respecto de un sistema de coordenadas, se mueve en línea recta y con movimiento uniforme, respecto de

otro sistema podrá aparecer moviéndose sobre una curva y con movimiento variado. Decimos, entonces, que el primer sistema es un sistema inercial y que el segundo no lo es. La ley de inercia vale respecto de un sistema y no vale respecto del otro. Del mismo modo, la ley de gravitación de Newton sólo es válida con respecto al sistema de coordenadas que se usa habitualmente en astronomía: el sistema de las estrellas fijas. Respecto de un sistema de ejes fijo a la Tierra y con relación al cual el Sol da una vuelta completa en unas 24 horas y la Luna en algo más, esa ley deja de ser válida. Por lo tanto, si pensamos que esas leyes constituyen la expresión fiel de la verdad, tendríamos que admitir que el principio general de la relatividad, lejos de ser válido, constituye un soberano disparate. A lo más, podría decirse: todos los sistemas de coordenadas, o sistemas de referencia, son entre sí cinemáticamente equivalentes, pero física y dinámicamente no lo son. Pero *lo que debe hacerse es encontrar leyes generales que sean válidas en todos los sistemas de coordenadas y para satisfacer esa condición las leyes deben expresarse tensorialmente.* Si en el espacio-tiempo de cuatro dimensiones la ley fuera

$$R_{ik} = 0 \quad ,$$

(y veremos que ésa es la ley para el espacio vacío), se cumpliría respecto de todos los sistemas imaginables de coordenadas. Como también pueden considerarse sistemas que, respecto de otros inerciales, se muevan con movimiento acelerado, y en éstos aparece, de acuerdo con el principio de equivalencia, un campo gravitatorio, se comprende que una teoría general de la relatividad debe dar cuenta también de los efectos gravitatorios genuinos, como se verá en el capítulo próximo.

CAPÍTULO VIII

ECUACIONES DEL CAMPO GRAVITATORIO

112. **El campo newtoniano.** — De acuerdo con la ley de Newton, dos masas *puntuales* M y m, separadas por la distancia r, se atraen con una fuerza f cuya expresión es

$$f = -\, G \frac{Mm}{r^2} , \tag{1}$$

siendo G la constante newtoniana de gravitación que, de acuerdo con las medidas experimentales, tiene el valor

$$G = 6{,}66 \times 10^{-8}\ [\mathrm{cm}^3\, \mathrm{gr}^{-1}\, \mathrm{seg}^{-2}] . \tag{2}$$

El signo menos traduce el hecho de que la fuerza es de atracción, pues, de ese modo, la aceleración que experimentará la masa m por la acción de M, aceleración igual a f/m, resulta negativa y tiende a hacer que disminuya la distancia r.

Si consideramos cierto número de masas puntuales, M_1, M_2, ..., situadas en lugares fijos de un determinado sistema de coordenadas, dichas masas ejercerán sobre la masa m, colocada en un punto cualquiera $x\,y\,z$, una fuerza que será la resultante de las fuerzas que cada una de las masas M ejerce sobre m. El cociente entre la fuerza total y el valor de la masa m es lo que se llama intensidad del campo gravitatorio generado por las masas M en el punto donde se considera situada m.

Comencemos por estudiar el campo generado por una única masa puntual M. La intensidad del campo F será, de acuerdo con la definición precedente y la [1]:

$$F = -\, \frac{GM}{r^2} \tag{3}$$

y en cualquier punto que se considere el vector F estará dirigido hacia M. Calculemos el "trabajo" de F para un recorrido que comienza en A (fig. 129) y termina en B. Las comillas provienen del hecho de que F no tiene las dimensiones de una fuerza, por lo cual F ds tampoco tendrá las dimensiones de un trabajo. Pero F ds, siendo ds una longitud, resulta numérica-

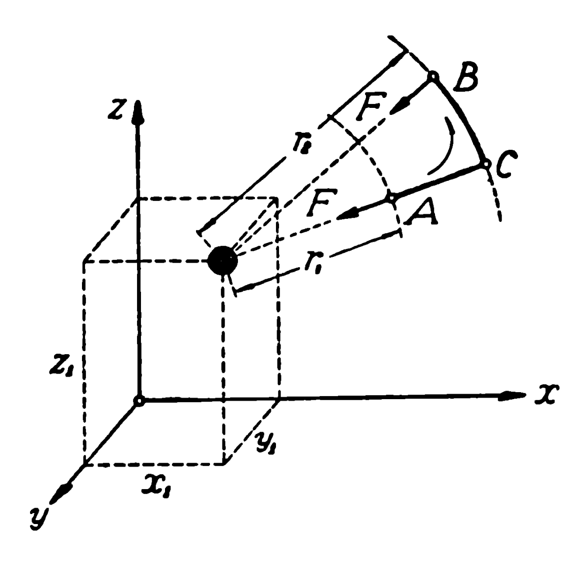


Fig. 129. — El trabajo en el campo newtoniano.

mente igual al trabajo que se realiza al transportar la unidad de masa. En realidad, F es la aceleración de caída en el punto considerado. Todavía no sabemos si el trabajo de F dependerá o no del camino elegido entre los puntos A y B. A lo largo de un camino tal como ACB, en la parte CB el trabajo será nulo, por ser allí F perpendicular al desplazamiento. Según ese camino, el trabajo será:

$$[4] \qquad \int \mathrm{F} ds = -\mathrm{GM}\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = -\left(\frac{\mathrm{GM}}{r_1} - \frac{\mathrm{GM}}{r_2}\right).$$

Las componentes X, Y, Z del vector F son:

$$[5] \qquad \mathrm{X} = -\frac{\mathrm{GM}}{r^2}\cos(rx) \quad ; \quad \mathrm{Y} = -\frac{\mathrm{GM}}{r^2}\cos(ry) \quad ;$$

$$\mathrm{Z} = -\frac{\mathrm{GM}}{r^2}\cos(rz) \quad ;$$

y si introducimos la función φ definida así:

$$[6] \qquad \varphi = -\frac{\mathrm{GM}}{r}$$

se ve que

$$[7] \qquad \mathrm{X} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} \; ; \; \mathrm{Y} = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} \; ; \; \mathrm{Z} = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} \; ;$$

puesto que de acuerdo con [6], y siendo

$$[8] \qquad r = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}$$

donde $x_1\, y_1\, z_1$ son las coordenadas de la masa M, resulta:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\mathrm{GM}}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\mathrm{GM}}{r^2}\frac{x - x_1}{r} = \frac{\mathrm{GM}}{r^2}\cos(rx) = -\mathrm{X} \quad ;$$

y análogamente se verifican las demás igualdades de [7].

Se tiene, así, que el trabajo elemental F ds, igual, por definición, al producto escalar de F y ds, es:

$$[9] \qquad Fds = Xdx + Ydy + Zdz = $$
$$= -\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx - \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy - \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = -d\varphi \quad ,$$

o sea un diferencial total de cierta función φ. Por lo tanto, la integral

$$[10] \qquad \int_A^B Fds = -\int_A^B d\varphi = -(\varphi_B - \varphi_A)$$

tiene un valor que no depende del recorrido y sí solamente de los puntos inicial y final del mismo.

La función φ, que para el caso de una sola masa está definida en [6], es el potencial newtoniano.

Si el campo estuviera generado por un número cualquiera de masas puntuales M_1, M_2, ..., situadas en puntos fijos de coordenadas $x_1\, y_1\, z_1$, $x_2\, y_2\, z_2$, ..., la intensidad F del campo resultante será igual a la suma vectorial

$$F = F_1 + F_2 + \ldots$$

y las componentes de F serán las sumas algebraicas de las componentes de las F_i, o sea:

$$[11] \qquad X = X_1 + X_2 + \ldots = \Sigma X_i \quad ; \quad Y = \Sigma Y_i \quad ; \quad Z = \Sigma Z_i .$$

Si llamamos φ_1, φ_2, etc., a los "potenciales parciales" que originaría cada una de las masas M_i por separado en un punto P cualquiera del campo, por ser, de acuerdo con [7],

$$X_1 = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} \quad ; \quad X_2 = -\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} \quad ; \quad \ldots$$

resulta, de acuerdo con [11], que

$$[12] \qquad X = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} - \ldots = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

siendo

$$[13] \qquad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots = \Sigma\varphi_i .$$

Análogamente,

$$Y = \Sigma Y_i = \Sigma - \frac{\partial\varphi_i}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\Sigma\varphi_i = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

$$Z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} .$$

Por lo tanto, cualquiera sea el número de masas que genera el campo valdrá la [9] y, en consecuencia, la [10], puesto que con el valor de φ dado en [13], siguen cumpliéndose las [7] que, vectorialmente, se escriben:

[14] $$F = -\operatorname{grad}\varphi \quad ,$$

por la definición misma de lo que es gradiente de un escalar.

Si de la distribución puntual de las masas M que generan el campo, pasamos a una distribución continua de las mismas y llamamos ϱ a la densidad, la expresión del potencial, de acuerdo con [13] y [6], será

[15] $$\varphi = -G\int \frac{\varrho dv}{r}$$

estando la integral extendida a todo el volumen donde se encuentran las masas.

113. Velocidad parabólica newtoniana. — La variación de energía cinética experimentada por un cuerpo de masa m que pasa de un punto 1 a otro 2 de un campo gravitatorio, y que está sometido solamente a la acción del campo, será, de acuerdo con [10]:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_2^2 = -m(\varphi_1 - \varphi_2) \quad ,$$

o sea

[16] $$v_1^2 - v_2^2 = 2\varphi_2 - 2\varphi_1 .$$

Consideremos como caso particular que el punto 2 "esté en el infinito" y que v_2 sea igual a cero. En este caso, el potencial φ_2 es nulo y la velocidad $v_1 = v$ recibe el nombre de velocidad parabólica. Se tiene, entonces, haciendo simplemente $\varphi_1 = \varphi$:

[17] $$v^2 = -2\varphi .$$

La velocidad parabólica en un punto de un campo gravitatorio es, pues, la velocidad mínima que debe tener un cuerpo en ese punto para que pueda alejarse indefinidamente del campo. A medida que el cuerpo se aleja su velocidad va tendiendo a cero. A esta velocidad parabólica se le llama también *velocidad de escape.* El nombre de velocidad parabólica proviene de la circunstancia de que, en un campo generado por una única masa (la masa solar, por ejemplo), la trayectoria descripta por una partícula material sometida a la acción del campo depende de la velocidad inicial de la misma, de manera que si ella es inferior a la velocidad parabólica la trayectoria es una elipse, si es mayor una hipérbola y si es igual una parábola (véase capítulo siguiente).

Para un campo generado por una única masa M, la [17] da, de acuerdo con [6],

$$[18] \qquad v^2 = \frac{2GM}{r}.$$

Para el campo gravitatorio terrestre puede considerarse que, aproximadamente, toda la masa de la Tierra actúa como si estuviera concentrada en su centro, como se verá en el párrafo siguiente, por lo cual la velocidad mínima que debería tener un proyectil para escaparse de la Tierra, será, siendo R el radio de la misma:

$$[19] \qquad v^2 = \frac{2GM}{R^2} R = 2gR$$

donde g es la aceleración de la gravedad en la superficie. Siendo R = 6370 km y $g = 9{,}80$ m/seg², resulta

$$v = \sqrt{2gR} = 11{,}2 \text{ km/seg.}$$

Con un cañón que pudiera disparar a esta velocidad se conseguiría que el proyectil se alejara indefinidamente de la Tierra. No hay que creer que para ello habría que disparar verticalmente y hacia arriba. Cualquiera sea la dirección de la bala, ésta se alejará indefinidamente del campo terrestre, si su velocidad es igual o mayor que la velocdiad parabólica. Al decir esto prescindimos del campo solar, pues podría ocurrir que, para determinada dirección de lanzamiento, la bala escapara del campo terrestre y no del campo del Sol. La velocidad parabólica del campo solar es, a la distancia de la Tierra al Sol, igual, aproximadamente, a 42,4 km/seg. Para calcular este valor, supondremos que la órbita de la Tierra es circular y de radio igual a R. Siendo M la masa del Sol y m la de la Tierra, deberá tenerse:

$$G\frac{Mm}{R^2} = \frac{mv_c^2}{R} \quad ; \quad v_c^2 = \frac{GM}{R} \quad ;$$

donde v_c es la "velocidad circular". Luego, llamando v_p a la velocidad parabólica, se tendrá:

$$v_p^2 = 2v_c^2 \quad ; \quad v_p = v_c\sqrt{2} \quad ;$$

y como v_c, velocidad de traslación de la Tierra, es igual a 30 km/seg, la velocidad parabólica resulta tener el valor que hemos dado más arriba. De modo, pues, que si se pretende que un proyectil lanzado desde la Tierra escape también del campo solar, su velocidad con respecto al Sol deberá ser, por lo menos, de unos 43 km/seg. Si un cañón pudiera disparar un proyectil a la velocidad de 13 km/seg, la bala podría escapar del campo solar si se dirigiera el caño del arma hacia el este, de

modo que coincidiera la dirección y el sentido de la velocidad del proyectil, con la dirección y el sentido de la velocidad de traslación de la Tierra.

A continuación, damos una tabla con los valores de la aceleración de caída y de la velocidad parabólica en diferentes lugares de diversos campos gravitatorios:

Astro	*Distancia al centro en radios del astro*	*Velocidad parabólica* km/seg	*Aceleración*
Tierra	1	11,17	$g = 980$ cm . seg^{-2}
Júpiter	1	59,7	$g \times 2{,}53$
Júpiter	1,59	47,4	g
Sol	1	618	$g \times 27{,}9$
Sol	5,28	269	g
Sat. de Sirio	1	3390	$g \times 29000$
Sat. de Sirio	170	260	g

114. Flujo de la intensidad del campo. — Si consideramos una superficie cualquiera Σ situada en un campo (fig. 130), el flujo del vector F a través de toda la superficie es igual a la suma de los flujos elementales $d\Phi$ a través de los elementos $d\Sigma$. El flujo $d\Phi$ a través de $d\Sigma$ es, por definición, igual al producto de la intensidad F (módulo de F) por la superficie $d\Sigma$ y por el coseno del ángulo que forme F con la normal n a $d\Sigma$:

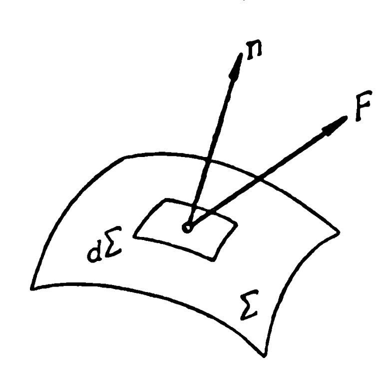


Fig. 130. — Flujo de un vector.

$$[20] \quad d\Phi = F d\Sigma \cos(nF).$$

En una superficie cerrada se conviene en elegir para la normal n el sentido que conduce hacia el exterior. Si el campo está generado por una única masa puntual M, el flujo total Φ a través de una superficie esférica con centro en M (fig. 131) y de radio igual a r será, por ser en todas partes $\cos(nF)$, igual a —1:

$$[21] \qquad \Phi = -\frac{GM}{r^2} 4\pi r^2 = -4\pi GM.$$

El signo menos significa que el flujo es entrante y se ve que el valor total del mismo *no depende* del radio de la superficie esférica que se considera. Por esta circunstancia, el flujo total a través de una *superficie cualquiera y cerrada* que contenga

en su interior a la masa M, seguirá estando dado por la [21]. Si en el interior de la superficie cerrada se tienen varias masas M_1, M_2, ..., el flujo total será

[22] $$\Phi = -4\pi G \Sigma M_i$$

y, en general, si pasamos a una distribución continua y llamamos ϱ a la densidad, tendremos

[23] $$\Phi = -4\pi G \int \varrho dv$$

debiendo extenderse la integral a todo el volumen encerrado por la superficie considerada. La [21], o su generalización, la [23], constituye el conocido teorema de GAUSS. Como consecuencias inmediatas del teorema de Gauss, obtenemos:

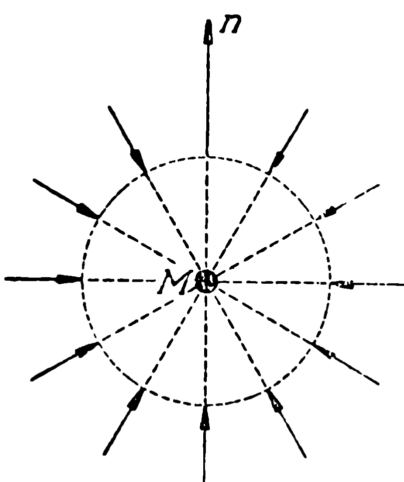


Fig. 131. — Flujo total en un campo newtoniano puntual.

a) *El campo generado por una masa esférica homogénea, o constituída por capas concéntricas de densidad constante es, en el exterior de la esfera, exactamente igual al que se generaría si toda la masa de la misma estuviera concentrada en su centro.* En el caso considerado, por simples razones de simetría, las líneas de fuerza del campo deben ser radiales y el flujo total a través de una superficie esférica, con centro en el centro de la esfera de masa total igual a M, y que la contenga totalmente, estará dado por la [21] de acuerdo con la [23].

b) *El campo en el interior de una esfera hueca, donde las masas están distribuídas en forma homogénea entre las superficies esféricas concéntricas de radios* R_1 *y* R_2, *es nulo.* Si R_1 es el radio interior, el flujo total a través de cualquier superficie esférica de radio menor que R_1, y con centro en el centro de la esfera hueca, será nulo, puesto que en el interior de la misma no hay masas, y para ello es necesario que F sea igual a cero en todo el interior.

c) *El campo en un punto interior cualquiera de una esfera maciza, formada por capas homogéneas, es exactamente igual al que se originaría si se supone condensada en el centro la masa contenida en la esfera que tiene en su superficie al punto considerado.* Naturalmente que el centro de esa esfera menor debe estar también en el centro de la esfera considerada. Este resultado es consecuencia inmediata de a) y b). Si se trata de

una esfera de densidad constante ϱ y de radio R_0, la intensidad del campo a la distancia x del centro, o sea la aceleración, será:

$$F = a = -G\frac{4}{3}\varrho\frac{\pi x^3}{x^2} = -\frac{4}{3}\pi G\varrho x \quad ,$$

y como si $x = R_0$, $a = -g$, resulta:

$$a = -\frac{g}{R_0}x \quad ,$$

siendo g el valor de la aceleración de caída sobre la superficie exterior de la esfera. La ecuación del movimiento de un punto situado en el interior del túnel de que hablamos en el párrafo 85 es, entonces:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{R_0}x = 0 \quad ,$$

de cuya integración se obtiene de inmediato la [68] del capítulo VI.

115. **Ecuaciones de Laplace y Poisson.** — Si aplicamos el teorema de Gauss a un volumen dv infinitamente pequeño, donde la densidad es ϱ, el flujo total, a través de la superficie que envuelve al volumen considerado, es

[24] $d\Phi = -4\pi G\varrho dv$.

El cociente

[25] $$\frac{d\Phi}{dv} = -4\pi G\varrho \quad ,$$

numéricamente igual al flujo entrante total del vector F por unidad de volumen en la región considerada, recibe el nombre de *divergencia* de F. Si la densidad ϱ es igual a cero, la divergencia es nula y ello significa que el flujo que entra por una parte sale por la otra. En cambio, si la densidad en el interior del elemento de volumen considerado tiene un valor finito diferente de cero, la divergencia de F es negativa y ello significa que el flujo entrante es mayor que el saliente.

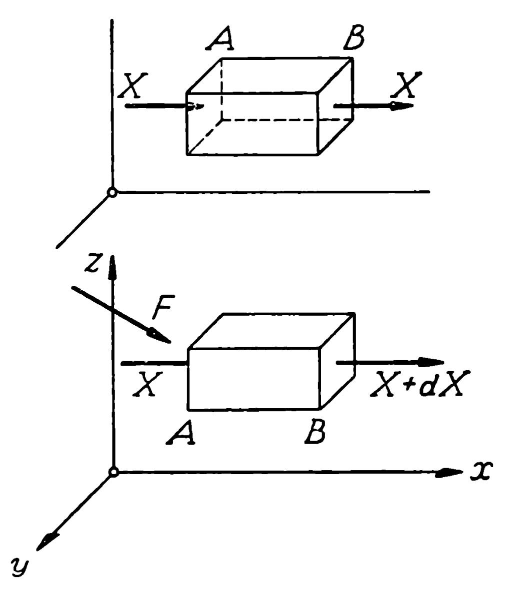


Fig. 132. — La divergencia de un vector y el flujo.

Para escribir la [25] en coordenadas cartesianas, lo más

simple es considerar que el elemento de volumen está constituído por un paralelepípedo elemental cuyas aristas, paralelas a los ejes, tienen longitudes iguales a dx, dy, dz (fig. 132). El flujo que entra por la cara A, cuya superficie es dydz, es

$$X\,dy\,dz$$

si X es en A la componente de F, según el eje x. El flujo que sale por la cara B, si allí la componente de F, según x, es X + dX, será

$$(X + dX)\,dy\,dz.$$

La diferencia de flujo saliente y entrante a lo largo del eje x es, entonces,

$$dX\,.\,dy\,dz$$

pero siendo

$$dX = \frac{\partial X}{\partial x}\,dx$$

esa diferencia será

$$\frac{\partial X}{\partial x}\,dx\,dy\,dz.$$

Análogamente, en las direcciones y z, esas diferencias son:

$$\frac{\partial Y}{\partial y}\,dx\,dy\,dz \quad ; \quad \frac{\partial Z}{\partial z}\,dx\,dy\,dz \quad ;$$

por lo cual se obtiene, como balance total para la diferencia dΦ entre el flujo saliente y el entrante:

$$d\Phi = \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz.$$

En consecuencia, la divergencia de F es:

[26] $$\text{div } F = \frac{d\Phi}{dv} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}.$$

La ecuación [25] da, entonces:

[27] $$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = -\,4\pi G\varrho.$$

Utilizando el símbolo Δ llamado laplaciano y definido por la expresión

[28] $$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \quad ,$$

la [27], teniendo en cuenta las [7], se escribe:

[29] $$\Delta\varphi = 4\pi G\varrho$$

que es la ecuación establecida por POISSON en 1813 y que comprende, como caso particular, la ecuación dada por LAPLACE en 1789, válida para el vacío, o sea para lugares donde $\varrho = 0$ y cuya expresión es

$$[30] \qquad \Delta\varphi = 0.$$

Aquí hemos obtenido la [30] como consecuencia de la [29], invirtiendo el orden histórico, pero se puede ver en forma directa que si el potencial tiene la forma dada en [6], estando r dado por [8], la [30] queda satisfecha. Se tiene, en efecto:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{GM}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{GM}{r^2}\frac{x-x_1}{r} = \frac{GM}{r^3}(x-x_1)$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = -\frac{3GM}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x}(x-x_1) + \frac{GM}{r^3} =$$

$$= -\frac{3GM}{r^5}(x-x_1)^2 + \frac{GM}{r^3}.$$

Análogamente:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = -\frac{3GM}{r^5}(y-y_1)^2 + \frac{GM}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\frac{3GM}{r^5}(z-z_1)^2 + \frac{GM}{r^3}$$

y sumando

$$\Delta\varphi = -\frac{3GM}{r^3} + 3\frac{GM}{r^3} = 0.$$

Se ve también que, si φ está dado por una suma como la [13], en que cada φ_i es un A_i/r_i con A_i constante, la [30] tiene que cumplirse.

Obsérvese que la ecuación de Poisson resume en sí los dos hechos siguientes: *Primero,* que la fuerza deriva de un potencial (ecuaciones [7]); y *segundo,* que ella actúa en razón inversa del cuadrado de la distancia, puesto que la ecuación [27] es la traducción del teorema de Gauss [21] y la independencia del flujo Φ con el radio r sólo es posible cuando la fuerza disminuye con el crecer de r en la misma proporción en que aumenta la superficie de la esfera. Si se tratara de una fuerza central que variara en razón inversa del cubo de la distancia, existiría un potencial de la forma A/r^2 y con este valor, las [7] seguirían siendo válidas, pero en cambio no se cumpliría la [21]. En este caso, no habría continuidad en el flujo y la [27] no sería válida. La anulación de la divergencia en el vacío, cuando $\varrho = 0$, significa simplemente la continuidad del flujo, y si no se cumple esa condición, el propio concepto de flujo se vuelve del todo inoperante.

La ecuación de Poisson es, entonces, la traducción lisa y llana de la ley de Newton al lenguaje del "campo". Éste, el campo, está originado por la densidad ϱ de la materia y el valor de la función potencial φ, en cada punto, depende única y exclusivamente de la distribución de las masas, o sea de cómo varía ϱ con las coordenadas *.

La solución de la [29] está dada justamente por la [15]. Dada una distribución cualquiera de las masas, podremos encontrar, entonces, la función φ, y a partir de ella, por las [7], las componentes X, Y, Z de la fuerza que actuaría en cada punto del campo sobre la unidad de masa colocada en él. Si la masa puntual, sometida a la acción del campo, es m, dicha masa estará sometida a la fuerza mF, cuyas componentes son mX, mY, mZ. Si aplicamos ahora la segunda ley de la dinámica newtoniana y tenemos en cuenta las [7], la aceleración de la partícula m será:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mX = - m \frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

por lo cual, las tres componentes de la aceleración son:

$$[31] \quad \frac{d^2x}{dt^2} = - \frac{\partial\varphi}{\partial x} \; ; \; \frac{d^2y}{dt^2} = - \frac{\partial\varphi}{\partial y} \; ; \; \frac{d^2z}{dt^2} = - \frac{\partial\varphi}{\partial z} \, .$$

Estas tres ecuaciones pueden resumirse así:

$$[32] \quad \frac{d^2x_i}{dt^2} = - \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \quad ; \quad (i = 1, 2, 3)$$

conviniendo en hacer $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$.

Cuando decimos que las masas que generan el campo tienen una distribución cualquiera y calculamos el potencial por la [15], estamos tratando un problema puramente matemático al suponer que las masas así distribuídas se encuentran fijas. Podemos plantearnos, por ejemplo, el siguiente problema: Una masa M_1 se encuentra en el origen de coordenadas y otra M_2 en un punto en que $x = a$, $y = z = 0$. Calculamos, luego, la función φ y podemos estudiar, aplicando las [31], el movimiento de una partícula en ese campo. Pero si las masas M_1 y M_2 estuvieran libres, no podrían hallarse en reposo en esos lugares fijos. Si del problema matemático queremos pasar al problema físico, debemos suponer que las masas M_1 y M_2 están sujetas a puntos determinados mediante vínculos sólidos, y si *despreciamos* la acción de esos vínculos, entonces sí, podremos continuar tranquilos con la resolución del problema propuesto.

* En el § 121 encontrará el lector un par de ejercicios en que se utiliza la ecuación de Poisson.

En resumen, toda la teoría de Newton de la gravitación está resumida en las ecuaciones siguientes:

[33]

$$\Delta\varphi = 4\pi G\varrho \quad ; \quad \varphi = -G\int \frac{\varrho dv}{r} \quad ;$$

$$\frac{d^2x_h}{dt^2} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_h} \quad ; \quad r^2 = \sum_h x_h{}^2 \quad ;$$

$$x_1 = x \quad ; \quad x_2 = y \quad ; \quad x_3 = z.$$ Teoría de Newton.

116. **Ecuaciones de Einstein.** — En la teoría de Newton un campo gravitatorio queda totalmente determinado si se conoce el potencial φ, que en el vacío satisface la ecuación de Laplace. En cambio, en la nueva teoría deben determinarse, para conocer el campo, las 10 funciones g_{ik}, que son los coeficientes del elemento lineal espacio-tiempo. ¿A qué ecuaciones satisfacen estos g_{ik} en el espacio libre de materia? Por lo pronto, si se quiere satisfacer el principio generalizado de la relatividad, esas ecuaciones deben tener forma tensorial. Además, sabemos que la teoría de Newton da cuenta, de un modo casi perfecto, de los hechos experimentales y en la ecuación de Laplace figuran sólo derivadas segundas del escalar φ. Las ecuaciones buscadas deberán ser, entonces, análogas a la ecuación de Laplace y deberán expresarse por la anulación de las componentes de cierto tensor. Este tensor deberá estar formado exclusivamente por los g_{ik} y sus derivadas primeras y segundas con respecto a las coordenadas, pues para que las ecuaciones sean análogas a las de Laplace no deberán existir en su constitución ni derivadas terceras ni cuartas, etcétera. Estas condiciones se satisfacen si se anula el tensor de cuarto orden de Riemann-Christoffel, pero la anulación de todas las componentes de este tensor conduce, necesariamente, a una variedad euclídea en la cual las geodésicas son rectas. Éste no es el caso, por ejemplo, del campo gravitatorio solar, en el que los planetas describen órbitas curvas. En cambio, la anulación de las componentes del tensor contraído de Riemann-Christoffel, o tensor de Ricci (§ 109), no conduce a ese extremo, por lo cual Einstein *postula* que las ecuaciones a que deben satisfacer los g_{ik} en el vacío, son:

[34] $$R_{ik} = 0.$$

Pero estas 10 ecuaciones no son suficientes para determinar los g_{ik}, así como la ecuación de Laplace, por sí sola, no permite determinar el potencial φ. Es necesario, por tal circunstancia, encontrar ecuaciones que sean análogas a las de Poisson, en

que el potencial φ queda determinado por la densidad ϱ de la materia y su distribución. Las ecuaciones tendrán que tener, naturalmente, forma tensorial y en el primer miembro aparecerá un tensor formado exclusivamente por los g_{ik} y sus derivadas, de carácter *puramente geométrico*. Este tensor deberá igualarse a otro tensor físico proveniente de la materia que genera el campo y que desempeñará el papel del segundo miembro de la ecuación de Poisson, igual a $4\pi G\varrho$. Pero dado que la masa y la energía son, de acuerdo con la teoría restringida de la relatividad, una misma cosa, los efectos gravitatorios deben aparecer producidos por *eso* que reúne en sí a ambos conceptos clásicos. En otras palabras: los g_{ik} deben estar determinados no sólo por la distribución de las masas, sino también por la distribución de la energía. Claro está que la energía del campo electromagnético por unidad de volumen será, en general, enteramente despreciable comparada con la energía de la materia propiamente dicha. Supongamos, entonces, que la energía por unidad de volumen esté determinada o definida por un tensor de segundo orden que denominaremos *tensor materia-energía*. En el párrafo siguiente veremos la forma que tiene este tensor en casos concretos. Por el momento, nos limitaremos a designarlo así: T_{ik}. Pero este tensor físico, cualquiera sea su forma, satisface a un principio de conservación y debe tener, en consecuencia, el mismo carácter el tensor geométrico del primer miembro de la ecuación que se trata de establecer.

Si en el espacio ordinario la divergencia de un vector es nula, ello significa que el flujo que entra en un recinto cerrado es igual al que sale, por lo cual la anulación de la divergencia implica la continuidad del flujo, como se ha visto en el párrafo anterior. Si se trata ahora de un continuo de cuatro dimensiones, en que la cuarta dimensión es el tiempo, *la anulación de la divergencia de un tensor, en el dominio cuadridimensional, implica la conservación de lo que él representa.* Por lo tanto, la divergencia del tensor físico T_{ik} deberá ser nula y sólo podrá igualarse a un tensor geométrico que satisfaga la misma condición. A partir del tensor de Ricci, R_{ik}, pueden formarse otros tensores de segundo orden, por simples operaciones algebraicas, tal como

$$R_{ik} + a g_{ik} R = R^*_{ik}$$

siendo a constante y R el invariante de Riemann (§ 109). Pues bien, para que la divergencia de un tensor de esta clase sea idénticamente nula, o sea para que se satisfagan las cuatro ecuaciones $\dfrac{\partial R^*_{ik}}{\partial x_k} = 0$, es necesario, como se demuestra por un cálculo laborioso, que la constante a sea igual a —1/2.

Por lo tanto, las ecuaciones de Einstein, análogas a las de

Poisson y que satisfacen al principio de *conservación de la energía*, son:

[35] $$R_{ik} - \tfrac{1}{2}g_{ik}R = - KT_{ik} \quad ,$$

en que K es la constante de gravitación de Einstein, vinculada a la constante newtoniana G en la forma que veremos más adelante.

Si multiplicamos ambos miembros de [35] por g^{ik} y sumamos, respecto de ambos índices, teniendo en cuenta la [46] y la [183] del capítulo anterior y llamando T al escalar

[36] $$g^{ik}T_{ik} = T$$

resulta:

[37] $$R - 2R = - KT \quad ; \quad R = KT.$$

Llevando este valor de R a [35], se obtiene:

[38] $$R_{ik} = - K(T_{ik} - \tfrac{1}{2}g_{ik}T).$$

Estas son las 10 ecuaciones del campo de Einstein que, en el espacio vacío —con rigor en espacio desprovisto hasta de radiación—, se reducen a las [34], pues en una región así, todas las componentes de T_{ik} son nulas y nulo también el escalar T.

Si hacemos

[39] $$T_{ik} - \tfrac{1}{2}g_{ik}T = T_{ik}^*$$

las [38] pueden escribirse:

[40] $$R_{ik} = - KT_{ik}^*.$$

117. Integración aproximada de las ecuaciones de Einstein. La teoría de Newton obtenida en primera aproximación. — En una región galileana donde el campo gravitatorio es nulo, puede elegirse siempre un sistema de coordenadas en el cual los g_{ik} sean constantes, y para determinado sistema, puede hacerse que aquéllos tomen los valores dados en el cuadro siguiente:

$$\begin{matrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{matrix} \qquad [A]$$

Esto significa que el elemento lineal es

$$ds^2 = du^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

si se hace

$$x_0 = u = ct \quad ; \quad x_1 = x \quad ; \quad x_2 = y \quad ; \quad x_3 = z.$$

Los valores de los g^{ik} están dados también por los números del cuadro [A].

El determinante g formado con los g_{ik} se ve que es igual a —1 y, por lo tanto,

[41] $$\sqrt{-g} = 1.$$

Pasemos a considerar ahora una región no galileana. Los g_{ik} ya no tendrán los valores constantes del cuadro [A], pero siempre podrá elegirse un sistema de coordenadas respecto del cual el determinante de los g_{ik} valga —1. Respecto de un sistema de coordenadas así, se cumplirá la [41] y la expresión del tensor R_{ik} será, de acuerdo con la fórmula [181] del capítulo anterior:

$$[42] \qquad R_{ik} = -\frac{\partial}{\partial x_r}\begin{Bmatrix} i\ k \\ r \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} i\ r \\ h \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} k\ h \\ r \end{Bmatrix}.$$

Como *primer criterio* de aproximación, se supondrá que las funciones g_{ik} difieren de los valores constantes dados en [A] en cantidades muy pequeñas, que pueden ser consideradas como infinitésimos de primer orden. Si designamos a los números del cuadro [A] por E_{ik} (la letra E es para que se tenga presente la naturaleza euclídea de la variedad definida por esos valores), los g_{ik} podrán expresarse así:

$$[43] \qquad g_{ik} = E_{ik} + \varepsilon_{ik} \quad ,$$

donde estas ε_{ik} son funciones de las coordenadas y sus valores son cantidades pequeñas de primer orden, lo mismo que sus derivadas primeras. De acuerdo con esto, todos los símbolos de Christoffel que figuran en [42] son, por lo menos, pequeños de primer orden (puesto que aparecen en ellos las derivadas primeras de los g_{ik}) y, en consecuencia, los términos de la suma representada por el último término de [42] podrán despreciarse como infinitésimos de orden superior. Por lo tanto, de acuerdo con el primer criterio de aproximación adoptado por Einstein, la expresión del tensor de Ricci se reduce a

$$[44] \qquad R_{ik} = -\frac{\partial}{\partial x_r}\begin{Bmatrix} i\ k \\ r \end{Bmatrix}.$$

Además, las componentes contravariantes g^{ik} del tensor fundamental tendrán valores que diferirán de los del cuadro [A], también en cantidades pequeñas de primer orden, y podrán expresarse así:

$$[45] \qquad g^{ik} = E^{ik} + \gamma^{ik} \quad ,$$

donde los E^{ik} son los mismos números del cuadro [A]. Para obtener de las ecuaciones del campo de Einstein la teoría de Newton como primera aproximación, es necesario suponer todavía como *segundo criterio* aproximativo que la materia que genera el campo se mueve, con respecto del sistema de coordenadas elegido, con velocidad pequeña respecto de la de la luz y, *además*, que la partícula móvil en el campo, tiene también velocidad pequeña respecto del patrón luminoso.

Veamos ahora cuál es la expresión que debe dársele al ten-

sor materia-energía. Si designamos por ϱ a la densidad de la materia en reposo (ϱ igual a la densidad propia), podemos formar el tensor contravariante de segundo orden, definido así:

$$[46] \qquad T^{ik} = \varrho \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds}$$

puesto que ϱ es un escalar y dx_i dx_k cuadrivectores contravariantes libremente elegibles, siendo ds invariante. La [46] es la expresión más simple del tensor materia-energía y se refiere al caso del llamado "flúido incoherente". Para tratar tensorialmente las ecuaciones de la hidrodinámica, es necesario agregar a la [46] un segundo término correspondiente a la presión P. En este caso, la expresión del tensor materia-energía es:

$$[47] \qquad T^{ik} = - g^{ik}P + \varrho \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds} .$$

Para calcular el campo gravitatorio con todo rigor en el *interior* de un flúido, es necesario tener en cuenta la forma completa [47], aunque el efecto correspondiente a la presión es siempre muy pequeño en comparación con el término que contiene a ϱ. Pero para el campo *exterior* a una masa determinada, puede considerarse únicamente la [46] como expresión del tensor materia-energía, puesto que el efecto gravitatorio de las tensiones internas se traducirá simplemente en una variación de ϱ. Digamos finalmente que la expresión exacta, para todos los casos, del tensor materia-energía no es conocida. La naturaleza granular de la materia y la electricidad no entra en el marco de la teoría de la relatividad, que es una teoría del continuo.

Del tensor contravariante definido en [46] se obtiene el tensor covariante asociado al mismo, del modo siguiente:

$$[48] \qquad T_{ik} = \varrho g_{ih} \frac{dx_h}{ds} g_{kj} \frac{dx_j}{ds} ,$$

debiéndose sumar respecto de los índices móviles h y j.

Veamos ahora el valor de las componentes de los tensores T^{ik}, T_{ik} y del invariante T definido en [36], de acuerdo con el segundo criterio de aproximación. Si la materia que genera el campo está en reposo respecto del sistema de coordenadas elegido, o las velocidades de las diferentes porciones son pequeñas, la única componente no nula de T^{ik}, de acuerdo con [46], será

$$T^{00} = \varrho \left(\frac{dx_0}{ds} \right)^2 ,$$

y siendo $dx_0 = du = cdt$ y ds también igual a cdt, resulta

$$[49] \qquad T^{00} = \varrho .$$

Del mismo modo, la única componente no nula de T_{ik}, de acuerdo con [48], es T_{00}, y su valor resulta, también:

[50] $$T_{00} = \varrho \quad ,$$

pues de acuerdo con el primer criterio de aproximación, los g_{ik} son iguales a uno o a cero, a menos de infinitésimos de primer orden.

El invariante T será también igual a ϱ de acuerdo con [36] y a lo que precede:

[51] $$T = g^{00}T_{00} = \varrho .$$

En realidad, las [49], [50] y [51] sólo son válidas con todo rigor en una región galileana y para velocidades iguales a cero.

De acuerdo con lo que precede, las componentes del tensor "estrellado" definido en [39] son:

$$T_{00}^* = T_{00} - \tfrac{1}{2}g_{00}T = \varrho - \tfrac{1}{2}\varrho = \tfrac{1}{2}\varrho \quad ;$$
$$T_{11}^* = T_{11} - \tfrac{1}{2}g_{11}T = -\tfrac{1}{2}(-1)\varrho = \tfrac{1}{2}\varrho \quad ;$$

calculándose en forma análoga las restantes, resultando así que dichas componentes están dadas por los valores indicados en el cuadro siguiente:

$$T_{ik}^* = \left\{ \begin{matrix} \varrho/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varrho/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varrho/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varrho/2 \end{matrix} \right. \qquad [B]$$

De las 10 ecuaciones dadas en [40] consideremos a la primera de ellas:

$$R_{00} = -KT_{00}^* = -\frac{K}{2}\varrho \quad ,$$

y teniendo en cuenta la [44], resulta:

[52] $$\frac{\partial}{\partial x_r}\begin{Bmatrix} 0\ 0 \\ r \end{Bmatrix} = \frac{K}{2}\varrho$$

que, escrita explícitamente, es:

[53] $$\frac{\partial}{\partial x_0}\begin{Bmatrix} 0\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_1}\begin{Bmatrix} 0\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} + $$
$$+ \frac{\partial}{\partial x_2}\begin{Bmatrix} 0\ 0 \\ 2 \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_3}\begin{Bmatrix} 0\ 0 \\ 3 \end{Bmatrix} = \frac{K}{2}\varrho .$$

Admitiendo que se trata de un campo *estacionario* en el cual los g_{ik} *no dependen del tiempo*, el primer término del primer miembro es nulo, y en cuanto a los símbolos que aparecen en los términos restantes se tiene (capítulo anterior [91]):

$$\left\{\begin{matrix}0\ 0\\1\end{matrix}\right\} = g^{10}\left[\begin{matrix}0\ 0\\1\end{matrix}\right] + g^{11}\left[\begin{matrix}0\ 0\\1\end{matrix}\right] + g^{12}\left[\begin{matrix}0\ 0\\2\end{matrix}\right] + g^{13}\left[\begin{matrix}0\ 0\\3\end{matrix}\right].$$

De acuerdo con el primer criterio de aproximación, tomaremos:

$$g^{10} = g^{12} = g^{13} = 0 \quad ; \quad g^{11} = -1$$

por lo cual

$$\left\{\begin{matrix}0\ 0\\1\end{matrix}\right\} = -\left[\begin{matrix}0\ 0\\1\end{matrix}\right] = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x_1}.$$

Análogamente,

$$\left\{\begin{matrix}0\ 0\\2\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x_2} \quad ; \quad \left\{\begin{matrix}0\ 0\\3\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x_3}.$$

Con estos valores, la [53] da, utilizando el laplaciano ∇ definido en [28]:

[54] $$\Delta g_{00} = K\varrho \quad ,$$

que es enteramente análoga a la ecuación de Poisson [29].

Para comparar con la teoría newtoniana, debemos tener en cuenta las ecuaciones de las geodésicas (VII, [93]).

Según ellas, es:

[55] $$\frac{d^2x_h}{ds^2} = -\left\{\begin{matrix}i\ k\\h\end{matrix}\right\}\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds}.$$

De acuerdo con el primer criterio de aproximación, es:

$$\frac{dx_0}{ds} = \frac{du}{ds} = 1 \quad ; \quad \frac{dx_i}{ds} = 0, \quad \text{para} \quad i = 1, 2, 3,$$

por lo cual, de la doble suma del segundo miembro de [55] (respecto de los índices i k), sólo deja de ser nulo un solo término, teniéndose, en consecuencia,

[56] $$\frac{d^2x_h}{ds^2} = -\left\{\begin{matrix}0\ 0\\h\end{matrix}\right\}$$

o explícitamente:

[57] $$\frac{d^2x_0}{ds^2} = -\left\{\begin{matrix}0\ 0\\0\end{matrix}\right\} = 0 \quad ; \quad \frac{d^2x_1}{ds^2} = -\left\{\begin{matrix}0\ 0\\1\end{matrix}\right\} \quad ;$$
$$\frac{d^2x_2}{ds^2} = -\left\{\begin{matrix}0\ 0\\2\end{matrix}\right\} \quad ; \quad \frac{d^2x_3}{ds^2} = -\left\{\begin{matrix}0\ 0\\3\end{matrix}\right\}.$$

Como, además, es

$$\frac{d^2x_h}{ds^2} = \frac{1}{c^2}\frac{d^2x_h}{dt^2}$$

teniendo en cuenta los valores de los símbolos que ya hemos calculado, resulta:

[58]
$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\frac{c^2}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x_1} \;; \quad \frac{d^2x_2}{dt^2} = -\frac{c^2}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x_2} \;;$$
$$\frac{d^2x_3}{dt^2} = -\frac{c^2}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x_3} \,.$$

Comparando estas expresiones con las [31] de la teoría newtoniana, ambas se identifican si hacemos:

[59]
$$\frac{c^2}{2} g_{00} = \varphi + \text{constante.}$$

El valor de esta constante lo hallamos teniendo en cuenta que para $\varphi = 0$ (a distancia infinita de las masas que generan el campo), g_{00} debe ser igual a 1. Se tiene, así, que la constante de [59] debe ser igual a $c^2/2$, de donde

[60]
$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2} \,.$$

Llevando este valor a la [54], obtenemos:

$$\frac{2}{c^2}\Delta\varphi = K\varrho \quad ,$$

y comparando con la ecuación de Poisson [29], resulta:

$$\Delta\varphi = \frac{Kc^2}{2}\varrho = 4\pi G\varrho \quad ,$$

de donde la constante einsteiniana K está vinculada con G de la manera siguiente:

[61]
$$K = \frac{8\pi}{c^2} G.$$

De modo, pues, que en primera aproximación, para velocidades pequeñas en comparación con la de la luz, tanto de las masas que generan el campo como de la masa en movimiento en el mismo, la teoría de Einstein coincide, en los resultados, con la teoría clásica.

La expresión del elemento lineal que se obtiene en esta primera aproximación es, entonces (reemplazando du por cdt):

[62]
$$ds^2 = c^2\left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right) dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad ,$$

donde φ debe calcularse por la [15]. En particular, si el campo está generado por una única masa M, concentrada en un punto, en lugar de [60] se tendrá

[63] $$g_{00} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r},$$

siendo r la distancia entre M y el punto que se considere. De este modo, en lugar de [62] se tendrá:

[64] $$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) du^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Obsérvese que en esta primera aproximación [62], el espacio propiamente dicho se conserva euclídeo, siendo verdaderamente notable la preponderancia que en los efectos gravitatorios tiene la componente g_{00} del tensor fundamental.

Es necesario hacer notar todavía que los g_{ik} de [62] pueden considerarse que satisfacen en primera aproximación las ecuaciones del campo, *pero sólo para la parte exterior del mismo.* Así, por ejemplo, para R_{11} se obtiene, de acuerdo con [44] y dentro de esta primera aproximación:

$$R_{11} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x_1^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x_2^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x_3^2} = 0.$$

Esta igualdad se cumple en todas partes, siendo $g_{11} = -1$, y, por lo tanto, también en un lugar donde la densidad de la materia fuera igual a ϱ. Pero de acuerdo con [40] y los valores del cuadro [B], debería resultar para esos lugares

$$R_{11} = -\frac{K}{2}\varrho.$$

118. Segunda solución de Einstein para una masa puntual. — Para obtener en primera aproximación la teoría newtoniana basta calcular, como vimos, g_{00}, pues, dentro de este grado de aproximación, sólo interviene ese coeficiente en el cálculo de las geodésicas, que se reducen a las [56] escritas explícitamente en [58]. Pero debe tenerse presente que se había supuesto que el determinante de los g_{ik} debía ser igual a -1. Claro está que esta condición no se satisface si g_{00} tiene el valor dado en [63] y $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$, siendo iguales a cero los restantes g_{ik}. Para una única masa puntual M situada en el origen de coordenadas, da Einstein la siguiente solución con simetría radial (siendo $x_0 = u = ct$):

$$g_{00} = 1 - \frac{r_0}{r} \quad ; \quad g_{0i} = 0 \quad ; \quad r_0 = \frac{2GM}{c^2}$$

[65] $$g_{ik} = -\delta_{ik} - \frac{r_0}{r^3} x_i x_k \quad ; \quad r^2 = \Sigma x_i^2$$

$$i, k = 1, 2, 3,$$

donde δ_{ik} es el símbolo de Kronecker (VIII, [50]). Se puede ver, efectivamente, que con estos valores las ecuaciones del campo quedan satisfechas en *primera aproximación.* Dichas ecuaciones, para el vacío, de acuerdo con [34] y [42], serían:

$$\frac{\partial}{\partial x_r}\left\{\begin{matrix} i\ k \\ r \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} i\ r \\ h \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} k\ h \\ r \end{matrix}\right\} = 0$$

siempre que el determinante de los g_{ik} fuera igual a —1. Con los valores dados en [65], el determinante de g_{ik} resulta:

$$| g_{ik} | = - \left(1 - \frac{r_0{}^2}{r^2}\right) ,$$

pero como r_0/r es siempre muy pequeño con relación a 1, de este modo se obtiene una aproximación mayor que con los g_{ik} de [64]. Si se pasa a coordenadas polares, el elemento lineal de la solución [65] de Einstein resulta ser el siguiente:

[66] $$ds^2 = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) du^2 - \left(1 + \frac{r_0}{r}\right) dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \operatorname{sen}^2 \theta d\varphi^2 .$$

119. Solución de Schwarzschild. — Para una masa *puntual* M situada en el origen de coordenadas o para el *campo exterior* de una masa esférica distribuída en forma homogénea (la densidad ϱ debe depender únicamente del radio r) K. SCHWARZSCHILD dió, en 1916, la *solución exacta* de las ecuaciones del campo que ya hemos utilizado en nuestros ejercicios del capítulo precedente y que escribimos nuevamente aquí:

[67] $$ds^2 = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) du^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_0}{r}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \operatorname{sen}^2 \theta d\varphi^2 .$$

Se ve que si se desprecian las potencias de grado segundo o superior, de r_0/r, la [67] coincide con la [66], pues en ese caso puede escribirse

$$\frac{1}{1 - \frac{r_0}{r}} = 1 + \frac{r_0}{r} .$$

En coordenadas cartesianas, los g_{ik} de la solución de Schwarzschild los hemos hallado en (VII, [75]) y pueden compararse con los valores aproximados de la solución de Einstein dados en [65].

En la práctica, dada la pequeñez de r_0/r, es indiferente calcular con la [66] o con la [67] y por esta razón Einstein pudo, con las fórmulas aproximadas [65], llegar a los mismos resultados que se obtienen a partir de la solución exacta de Schwarzschild. Como veremos más adelante, todas las consecuencias verificadas hasta hoy de la teoría general de la relatividad se deducen de la [67], cuya estructura, extremadamente simple, no está en consonancia con la extraordinaria complicación de las ecuaciones del campo.

Esto hace pensar en la posibilidad de que se pueda llegar a la misma de algún modo más directo y, sobre todo, más intuitivo. En el capítulo X se tratará de este asunto con todo detalle.

Entretanto, nos ocuparemos aquí de verificar que, efectivamente, los g_{ik} de [67] satisfacen a las ecuaciones del campo de Einstein. Hay que verificar 10 ecuaciones que, de acuerdo con la [181] del capítulo precedente y la [34] de este capítulo, tienen la forma:

[68] $$R_{ik} = -\frac{\partial}{\partial x_h}\begin{Bmatrix} i\ k \\ h \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} i\ j \\ h \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} k\ h \\ j \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} i\ k \\ h \end{Bmatrix}\frac{\partial \log\sqrt{-g}}{\partial x_h} + \frac{\partial^2 \log\sqrt{-g}}{\partial x_i \partial x_k} = 0.$$

Aquí hemos cambiado el orden de los términos y, además, reemplazamos el índice móvil r de [181] por h, para evitar confusiones con la r de [67]. Siendo

$$x_0 = u \quad ; \quad x_1 = r \quad ; \quad x_2 = \theta \quad ; \quad x_3 = \varphi \quad ;$$

los g_{ik} de Schwarzschild son:

$$g_{00} = 1 - \frac{r_0}{r} = \gamma \quad ; \quad g_{11} = -\frac{1}{\gamma} \quad ; \quad g_{22} = -r^2 \quad ;$$
$$g_{33} = -r^2 \operatorname{sen}^2\theta$$

e iguales a cero todos los restantes. Como la forma es ortogonal, las componentes contravariantes del tensor fundamental se hallan de inmediato:

$$g^{00} = \frac{1}{\gamma} \quad ; \quad g^{11} = -\gamma \quad ; \quad g^{22} = -\frac{1}{r^2} \quad ;$$
$$g^{33} = -\frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta} \quad ;$$

siendo también iguales a cero las demás componentes. La ortogonalidad de la forma [67] facilita el cálculo de los símbolos de Christoffel de segunda especie, y como g_{00}, g_{11} y g_{22} sólo dependen de x_1, en tanto que g_{33} depende de x_1 y x_2, no dependiendo ninguno de ellos ni de x_0 ni de x_3, sólo habrá que

calcular unos pocos de esos símbolos. Comencemos por ver si, efectivamente, es $R_{00} = 0$. Para ello, hagamos en [68] $i = 0$, $k = 0$. Como

$$\sqrt{-g} = r^2 \operatorname{sen} \theta$$

el último término de [68] será igual a cero y en cuanto al penúltimo se tendrá

$$\begin{Bmatrix} 0\ 0 \\ h \end{Bmatrix} \frac{\partial \log \sqrt{-g}}{\partial x_h} .$$

De los cuatro sumandos de esta suma para $h = 0$, $h = 1$, $h = 2$, $h = 3$, sólo puede ser diferente de cero aquel en el cual $h = 1$, pues si $h = 2$, la derivada será diferente de cero, pero

$$\begin{Bmatrix} 0\ 0 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0 \quad ,$$

pues g_{00} no depende de $x_2 = \theta$. Se tiene, así,

$$\begin{Bmatrix} 0\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial \log \sqrt{-g}}{\partial r} = g^{11} \begin{bmatrix} 0\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{2}{r} =$$

$$= (-\gamma)\left(-\frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{00}}{\partial x_1}\right)\frac{2}{r} = \frac{\gamma r_0}{r^3} = \frac{r_0}{r^3} - \frac{r_0^2}{r^4} .$$

De la suma representada en el primer término de [68], el único sumando no nulo es:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\begin{Bmatrix} 0\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial r} g^{11} \begin{bmatrix} 0\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{d}{dr}\left(\frac{\gamma r_0}{2r^2}\right) =$$

$$= -\frac{r_0}{r^3} + \frac{3}{2}\,\frac{r_0^2}{r^4} .$$

La doble suma representada en el segundo término de [68] da:

$$\begin{Bmatrix} 0\ j \\ h \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 0\ h \\ j \end{Bmatrix} = \underset{\substack{h=0 \\ j=1}}{\begin{Bmatrix} 0\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 0\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}} + \underset{\substack{h=1 \\ j=0}}{\begin{Bmatrix} 0\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 0\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}} = 2\begin{Bmatrix} 0\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 0\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

pues si $h = 0$ y $j = 0$ por no depender g_{00} del tiempo (x_0), los símbolos correspondientes son nulos, al igual que tomando otros valores de h y j. Resulta, así:

$$2\begin{Bmatrix} 0\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 0\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = 2g^{00}\begin{bmatrix} 0\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot g^{11}\begin{bmatrix} 0\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= (-2)\left(-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x_1}\right)^2 = \frac{1}{2}\,\frac{r_0^2}{r^4} .$$

Reemplazando los valores obtenidos, se obtiene:

$$R_{00} = \frac{r_0}{r^3} - \frac{3}{2}\frac{r_0^2}{r^4} + \frac{1}{2}\frac{r_0^2}{r^4} - \frac{r_0}{r^3} + \frac{r_0^2}{r^4} = 0.$$

Análogamente, se verifican las 9 ecuaciones restantes y dicha verificación resulta inmediata para R_{01}, R_{02}, R_{03}, pues en estos casos cada uno de los términos de [68] se anula por separado, como se ve fácilmente. Dejamos al lector la tarea de verificar las 6 ecuaciones restantes:

$$R_{11} = R_{22} = R_{33} = R_{12} = R_{13} = R_{23} = 0.$$

Si la verificación se lleva a cabo utilizando coordenadas cartesianas, o sea tomando para los g_{ik} y g^{ik} los valores dados en [75] y [79] del capítulo precedente, sólo se tienen que verificar dos ecuaciones (además de $R_{00} = 0$ y $R_{0i} = 0$), por ejemplo, R_{11} y R_{12}, dada la simetría de las fórmulas respecto de las coordenadas. Además, en este caso, por ser $\sqrt{-g} = 1$, los dos últimos términos de [68] son nulos. Pero a pesar de todo esto, los cálculos siguen siendo complicados y se emplea menos tiempo en verificar 6 ecuaciones en coordenadas polares que 2 en coordenadas cartesianas.

120. **Significado de la fórmula de Schwarzschild.** — Si en la [67] se hace que r tienda a infinito, el elemento lineal se convierte en

$$[69] \qquad ds^2 = du^2 - (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta d\varphi^2)$$

y como la parte encerrada entre paréntesis es el elemento lineal de espacio euclídeo en coordenadas polares, resulta que el elemento lineal de [67] tiende a convertirse en el elemento lineal de Minkowski a medida que nos alejamos de la masa que genera el campo. La parte puramente espacial de [67] es:

$$[70] \qquad d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r_0}{r}} + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta d\varphi^2.$$

El coeficiente del primer término del segundo miembro, dependiente de r, muestra que esta variedad de tres dimensiones no es euclídea. Para formarnos una idea acerca de su estructura, estudiaremos las superficies de dos dimensiones de la misma que se obtienen haciendo φ = constante. Se trata, entonces, de ver la forma que tienen los "planos" meridianos del espacio representado por [70]. Llamando da al elemento lineal correspondiente de esa superficie, se tiene:

$$[71] \qquad da^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r_0}{r}} + r^2 d\theta^2.$$

Obsérvese que el "plano ecuatorial" para el cual $\theta =$ constante $= \pi/2$, tiene exactamente la misma estructura que [71], con un simple cambio de letras.

Por lo tanto, como el *polo* a partir del cual se comienza a contar el ángulo θ puede ser cualquiera, la [71] representa la superficie que se obtiene al cortar el espacio dado en [70] por un "plano" cualquiera que pase por el origen. Si r_0 fuera igual a cero, el elemento lineal de [71] correspondería a un plano euclídeo, utilizando coordenadas polares r y θ. Pero siendo r_0 diferente de cero, el coeficiente del primer término del segundo

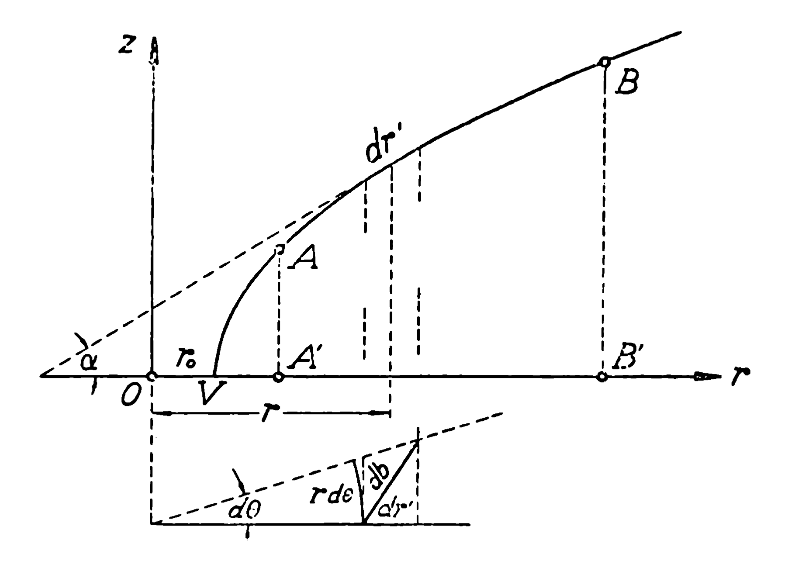


Fig. 133. — Forma de una sección espacial del campo de Schwarzschild.

miembro depende de r y sólo de r. Con esto se ve ya que la [71] da el elemento lineal de una superficie de revolución. Imaginemos, por ejemplo, que la curva de la fig. 133 perteneciente al plano zr gira alrededor del eje z. Si llamamos dr' al elemento de longitud de un arco de esta curva meridiana, el elemento lineal db de la superficie que genera al girar, es:

[72] $$db^2 = dr'^2 + r^2 d\theta^2.$$

Por otra parte, si la tangente a la curva en el punto que se considera forma con el eje r un ángulo α, se tendrá:

[73] $$dr = dr' \cos\alpha \quad ; \quad dr' = \frac{dr}{\cos\alpha} \quad ;$$

por lo cual,

[74] $$db^2 = \frac{dr^2}{\cos^2\alpha} + r^2 d\theta^2.$$

Si identificamos [71] con [74], tendremos

[75] $$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{r_0}{r} ,$$

con lo cual

[76] $$\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{r_0}{r} ,$$

y de aquí

[77] $$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{r_0}{r - r_0}} = \frac{dz}{dr} .$$

De la [77] obtenemos

$$z = \int \sqrt{\frac{r_0}{r - r_0}} dr = 2 \sqrt{r_0} \sqrt{r - r_0} + C .$$

Haciendo igual a cero la constante de integración, resulta

[78] $$z^2 = 4r_0 (r - r_0) ,$$

que representa, en coordenadas cilíndricas, z, r, θ, un paraboloide de revolución alrededor del eje z.

La [73], con la [75], da:

[79] $$dr = dr' \cos \alpha = dr' \sqrt{1 - \frac{r_0}{r}} ,$$

lo que significa que la naturaleza no euclídea de la variedad considerada *equivale* a una contracción de las reglas de medida cuando se las coloca en sentido radial. De acuerdo con lo dicho en el párrafo 84, podría conservarse la geometría euclideana si se admitiera que las reglas de medida se contraen *realmente* por la acción del campo gravitatorio. La *medida natural* de una longitud radial, comprendida entre los puntos A y B de la fig. 133, es la que se obtendría llevando la regla unitaria sobre el arco AB determinado número de veces. Esa medición natural daría la longitud del arco AB, en tanto que a ella corresponde, en el sistema de coordenadas y unidades elegido, una distancia igual al segmento A′B′. El r que figura en la fórmula de Schwarzschild no corresponde, entonces, a las medidas naturales de las distancias en sentido radial. Pero ésta es una afirmación de carácter negativo, ya que nos limitamos a decir: r no es la medida natural de la distancia en sentido radial, pero con ello no decimos lo que es. Al estudiar solamente un corte de nuestro espacio no euclídeo obtenemos una superficie de dos dimensiones y, considerándola sumergida en un espacio euclídeo de tres, la r aparece así como una distancia euclídea. Pero este recurso es inoperante cuando la

variedad que debemos considerar tiene ya las tres dimensiones del espacio. Físicamente, no tendría sentido sumergir nuestra variedad en otra euclídea de un número de dimensiones mayor que tres, para poder decir cuál es el significado de r.

Pero lo cierto es que en las aplicaciones se va a identificar esta r, que aún no sabemos lo que es, con la distancia que se obtiene a partir de las medidas de la paralaje y suponiendo que vale la geometría euclideana. Para poder decir si al operar de esta manera se comete un error grande o pequeño, es indispensable saber antes el significado preciso de esa r. Si suponemos que la distancia de la Tierra al Sol se lleva a cabo colocando la unidad de medida sobre el radio de la órbita terrestre, obtendremos de este modo el valor *natural* de esa distancia que llamaremos L, y si se supone que nuestra regla unitaria se contrae realmente en cada lugar de acuerdo con [79], podremos calcular r en función de L. Se tendrá, así (véase fig. 133):

$$\frac{r}{\mathrm{L}} = \frac{\mathrm{OB'}}{\mathrm{arco\ VB}} .$$

Para la longitud de este arco de parábola, igual a L, puesto que $\mathrm{OB'} = r$, se obtiene el valor:

[80]
$$\mathrm{L} = \sqrt{r(r - r_0)} + r_0[\log(\sqrt{r_0(r - r_0)} + \sqrt{rr_0}) - \log r_0] \quad ,$$

y como el valor de r_0 es enteramente despreciable en comparación de r, puede tomarse, y ahora con entera tranquilidad de conciencia, si $r >> r_0$,

[81]
$$\mathrm{L} = r.$$

Para el caso del Sol, el valor de r_0 es (tomando para M el valor aproximado 2×10^{33} gramos):

[82]
$$\underset{(\mathrm{Sol})}{r_0} = \frac{2\mathrm{GM}}{c^2} = 2{,}96 \times 10^5 \text{ cm} \cong 3 \text{ km} \quad ,$$

y para la Tierra, siendo $\mathrm{M} = 6 \times 10^{27}$ gramos:

[83]
$$\underset{(\mathrm{Tierra})}{r_0} = 0{,}89 \text{ cm}.$$

Este radio crítico r_0, de sólo 3 kilómetros para la masa solar, resulta enteramente despreciable frente, no ya al radio de la órbita terrestre o a la distancia de los demás planetas, sino al propio radio del Sol, que es de unos 700 000 kilómetros, y lo mismo cabe decir en el caso de la Tierra, cuyo radio es de 6 370 kilómetros.

Si se desarrolla la [80], puede tomarse con suficiente aproximación

[84] $$L = r - \frac{r_0}{2} + r_0 \log \sqrt{\frac{4r}{r_0}}$$

y si consideramos

$$r = R = 150\,000\,000 \text{ km} \quad ,$$

distancia de la Tierra al Sol, con el valor de r_0 dado en [82], se obtiene

[85] $$L = R + 27 \text{ km.}$$

Estos 27 km están y estarán siempre muy por debajo de los errores de observación, por lo cual no cabe esperar que, por medidas directas, pueda revelarse la naturaleza no euclídea de nuestro espacio y, lo que es más importante, podremos, de acuerdo con [81], considerar que el parámetro r representa la distancia del punto que se considera al centro de la masa que genera el campo.

Desde luego que la naturaleza no euclídea del espacio propiamente dicho, se hace también irrevelable mediante medidas directas llevadas a cabo sobre la superficie de la Tierra. Si imaginamos otra vez a los geómetras chatos viviendo sobre el paraboloide de la fig. 133 y a una distancia grande del origen, considerarían que su mundo es perfectamente plano. Llegarían a otro resultado si pudieran acercarse al origen y, en nuestro caso, advertiríamos la naturaleza no euclídea del espacio si toda la masa de la Tierra estuviera concentrada en aquella esferita de menos de un centímetro de radio [83] y pudiéramos efectuar medidas a unos pocos centímetros, o cuando mucho, metros, de su centro.

Es importante hacer notar la singularidad que aparece en la solución de Schwarzschild para $r = r_0$. La fórmula sólo tiene sentido para valores de r mayores que r_0. En el espacio-tiempo euclídeo (o semieuclídeo), en el cual es posible siempre adoptar un sistema de coordenadas tal que los g_{ik} sean constantes, las ecuaciones del campo se satisfacen y la variedad puede ser regular en todas partes. Pero si la variedad es no euclídea y las ecuaciones del campo son satisfechas ($R_{ik} = 0$), *deben existir necesariamente* regiones singulares. Éstas coinciden con un entorno de los puntos donde se supone concentrada la masa que genera el campo.

Para completar el estudio geométrico de la [70], nos ocuparemos ahora de la estructura de la superficie que se obtiene al seccionar esa variedad por un plano $z = h =$ constante, siendo esta constante diferente de cero. Al hablar del plano $z =$ = constante debe pensarse que se utilizan coordenadas cartesianas. Lo que se busca es, para decirlo brevemente, conocer la estructura de los "planos" paralelos al "plano" ecuatorial,

siendo este último el paraboloide de revolución que ya estudiamos. Si pensamos en el caso de la Tierra y se supone que toda la masa está concentrada en el punto O (fig. 134), cortaremos a la variedad [70] por un plano AB que no pasa por el centro O. Si el plano AB pasara por O, el tal plano no euclídeo sería el paraboloide que ya conocemos, con un agujero en el centro donde forma una garganta parecida a la parte interior de un toroide de radio r_0. En nuestro plano AB tomaremos coordenadas polares ϱ y φ haciendo:

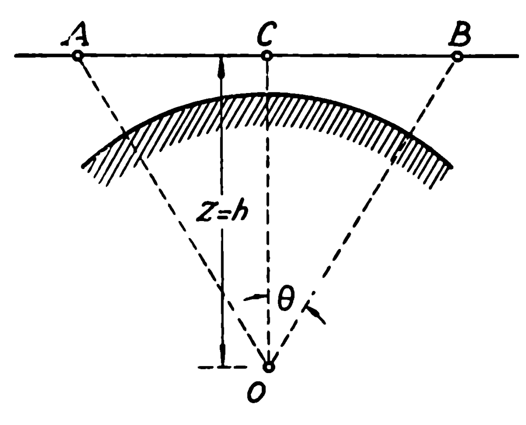


Fig. 134. —

$$\varrho = r \operatorname{sen} \theta \quad ; \quad \varphi = \varphi \quad ; \quad r^2 = \varrho^2 + h^2 .$$

Con esto, utilizando la [70] se obtiene, después de algunos cálculos sencillos, la expresión:

$$[86] \quad dl^2 = \frac{1}{\varrho^2 + h^2} \left(\frac{\varrho^2}{1 - \dfrac{r_0}{\sqrt{\varrho^2 + h^2}}} + h^2 \right) d\varrho^2 + \varrho^2 d\varphi^2 \quad ,$$

que corresponde al elemento lineal dl de nuestro plano no euclídeo. Se ve que si $r_0 = 0$, la [86] corresponde realmente a un plano euclídeo. Suponiendo que r_0 sea pequeño en comparación de h, la expresión anterior puede escribirse:

$$[87] \qquad dl^2 = \left(1 + \frac{r_0 \varrho^2}{(\varrho^2 + h^2)^{3/2}} \right) d\varrho^2 + \varrho^2 d\varphi^2 .$$

Para tener una idea acerca del apartamiento de la geometría de nuestro espacio, con respecto a la geometría euclídea, calculemos, utilizando la [87], el valor de π que se obtendría si sobre la superficie de la Tierra se midiera una circunferencia AB de centro C (fig. 134). Para la longitud de la circunferencia se obtiene:

$$[88] \qquad L = \varrho \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi\varrho \quad ,$$

y para el radio R de la misma

$$R = \int_0^{\varrho} \left(1 + \frac{r_0 \varrho^2}{(\varrho^2 + h^2)^{3/2}} \right)^{1/2} d\varrho .$$

Haciendo nuevamente uso de la pequeñez de r_0 y efectuando el cambio de variables $\varrho = h \operatorname{tg} \theta$, se obtiene sin dificultad:

$$R = \varrho + \frac{r_0}{2}\left[\int_0^\theta \frac{d\theta}{\cos\theta} - \int_0^\theta \cos\theta d\theta\right] =$$

$$= \varrho + \frac{r_0}{2}\left[\log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right) - \operatorname{sen}\theta\right].$$

Desarrollando en serie, tomando sólo los primeros términos, y haciendo $\theta = \varrho/h$, resulta finalmente:

$$[89] \qquad R = \varrho\left(1 + \frac{r_0\varrho}{4h^2}\right).$$

Dividiendo [88] por el doble de [89] y llamando π' al cociente, resulta, teniendo en cuenta, nuevamente, la pequeñez de r_0:

$$[90] \qquad \pi' = \pi\left(1 - \frac{r_0\varrho}{4h^2}\right).$$

Si suponemos que ϱ es igual a 111 km, para un plano horizontal de la Tierra distante 6 370 km del centro, se obtiene:

$$\pi - \pi' = 1{,}9 \times 10^{-11} \quad ,$$

lo que significa que, entonces, se modificaría la decimal undésima de π. El radio de 111 km resulta aumentado en sólo unos dos micrones. En cambio, si la medida se efectuara sobre la propia superficie terrestre, para ese radio de 111 km (1 grado), se modificaría ya la primera decimal de π. En la fig. 135 se ha representado el "ecuador" y algunos "planos paralelos" al mismo. El lector debe imaginar las superficies de revolución que se generan al hacer girar la figura alrededor del eje z.

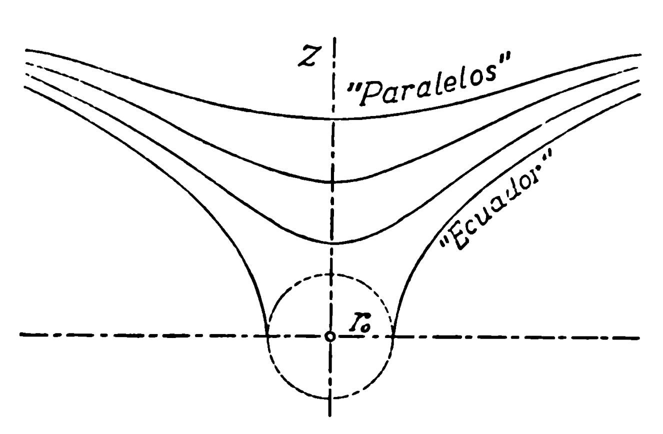


Fig. 135. — "Plano" ecuatorial y "planos" paralelos del campo de Schwarzschild.

Hasta ahora nos hemos ocupado únicamente de la parte espacial de la [67], parte que se obtiene del universo cuadridi-

mensional haciendo u = constante. El estudio geométrico que hemos hecho nos permitió conocer el comportamiento de las reglas de medida en el campo, pues todo ocurre en el mismo como si ellas experimentaran, cuando se las coloca en sentido radial, una contracción dada por la [79], conservando, en cambio, su longitud, si se las coloca en dirección perpendicular a la dirección radial. Decir que una regla experimenta una contracción cuando se la coloca en un campo, significa que se la compara con otra regla situada fuera del campo. En nuestro caso, la regla unitaria patrón tendría que estar en reposo respecto de la masa M e infinitamente alejada de ella.

A la contracción de la regla unitaria corresponde una dilatación del tiempo, pues lo que aparece como divisor de $\mathrm{d}r^2$ en [67] figura allí como factor de $\mathrm{d}u^2$. Que el "tiempo" experimente una dilatación en un campo gravitatorio significa que los relojes colocados en el campo deben marchar más lentamente que los que están situados fuera del mismo, o sea, alejados de la masa M. Un *buen reloj* es —como ya sabemos— un instrumento cuyas indicaciones deben satisfacer al postulado de la constancia de la velocidad de la luz. Pero ese postulado es sólo válido en los sistemas inerciales, pues únicamente en ellos la luz se propaga en línea recta en cualquier dirección. Si tenemos un reloj en una región de un campo gravitatorio, ¿qué criterio adoptaremos para decir que nuestro reloj marcha bien? El reloj-patrón sigue estando constituído siempre por un rayo de luz, pero si el reloj se encuentra en un campo gravitatorio, tendremos que referirnos a trayectos recorridos por el rayo que sean infinitamente pequeños. Por lo tanto, *para las medidas naturales efectuadas en una pequeña región de un campo gravitatorio, con reglas y relojes situados en la inmediata vecindad de la misma, sigue valiendo el postulado de la constancia de la velocidad de la luz en el vacío.* Si el rayo de luz efectúa un recorrido $\mathrm{d}l'$ y emplea un tiempo $\mathrm{d}t'$, estando $\mathrm{d}l'$ medido con reglas situadas en el lugar y $\mathrm{d}t'$ con relojes situados también en la inmediata vecindad de ese mismo lugar, se tendrá:

[91] $$c = \frac{\mathrm{d}l'}{\mathrm{d}t'} ,$$

cualquiera sea la dirección del segmento $\mathrm{d}l'$ y teniendo c el mismo valor que en un sistema inercial. El intervalo o distancia cronotópica $\mathrm{d}s$, que separa dos acontecimientos que ocurren en lugares infinitamente próximos, medido dicho intervalo en *forma natural* (con reglas y relojes situados en la región), se expresaría, entonces:

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t'^2 - \mathrm{d}l'^2 = \mathrm{d}u'^2 - \mathrm{d}l'^2 .$$

Si elegimos para la región espacial considerada un sistema

cartesiano de coordenadas $x'\ y'\ z'$, respecto de ese *sistema local* el elemento lineal se expresará:

$$[92] \qquad ds^2 = du'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2.$$

En la literatura relativista se entiende con el nombre de "sistema local" al sistema de coordenadas que acabamos de introducir y, además, a un segundo sistema respecto del cual las derivadas primeras de los g_{ik} son todas nulas en el punto elegido como origen. En ambos sistemas locales, la expresión del elemento lineal *en el entorno* del punto elegido está dada por la [92], pero en el "primer sistema local" las derivadas primeras de los g_{ik} en ese punto, no son necesariamente nulas. El segundo sistema local, respecto del cual se anulan las derivadas primeras de los g_{ik}, corresponde físicamente a un sistema que cae libremente en la región considerada. Respecto de esa "caja" en caída libre, el universo resulta llano como el universo de Minkowski, pues con respecto a ella no existe —en una pequeña región— campo gravitatorio alguno. En cambio, respecto del primer sistema local existe un campo y los g_{ik} valen, en el punto que puede tomarse como origen del sistema, 1, —1, —1, —1, pero sus valores no son constantes: sus derivadas primeras son, en general, diferentes de cero. Si el campo gravitatorio está generado por una única masa, respecto del primer sistema local esa masa que genera el campo está en reposo, en tanto que no lo está respecto del segundo sistema local que se llama también *sistema geodésico*. Debe tenerse presente que la [92] es la simple expresión del principio de la constancia de la velocidad de la luz trasladado a lo infinitamente pequeño.

Consideremos ahora que la [67] y la [92] se refieran al mismo par de acontecimientos. Las dos expresan lo mismo, pero en diferentes sistemas de coordenadas. Orientando los ejes espaciales $x'\ y'\ z'$ convenientemente, podremos identificar, en ambas fórmulas, cada uno de los términos:

$$[93] \qquad du' = \sqrt{1 - \frac{r_0}{r}}\, du = \sqrt{\gamma}\, du$$

$$[94] \qquad dx' = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\, dr \quad ; \quad dy' = r d\theta \quad ; \quad dz' = r \operatorname{sen} \theta d\varphi .$$

Las [94] nos dan el comportamiento de la regla unitaria en el campo, comportamiento que ya hemos analizado y que equivale a una contracción cuando la regla se coloca en dirección radial, vertical, conservando, en cambio, su longitud si la dirección de la misma es *horizontal*. La [93] indica cuál es el comportamiento de los relojes situados en el campo, y se ve que, de acuerdo con esa relación, un reloj debe marchar tanto

más lentamente cuanto más cerca se encuentre de la masa M. La [93], en efecto, puede escribirse:

[95] $$dt' = \sqrt{\gamma}\, dt \quad ; \quad t' = \sqrt{\gamma} \, . \, t.$$

EJEMPLO. Un reloj colocado en la superficie del Sol donde $r_0 = 3$ km y $r = 700\,000$ km, atrasaría 1 segundo cada 5 días (aproximadamente), con respecto a otro reloj idéntico situado a una distancia muy grande del centro del Sol, tal que pueda tomarse para ese lugar $r_0/r = 0$. Dejamos al lector la tarea de verificar el ejemplo.

La marcha de dos relojes colocados respectivamente a las distancias r_1 y r_2 de la masa M será tal, que

$$\left(1 - \frac{r_0}{r_1}\right) dt^2 = dt_1{}^2$$

$$\left(1 - \frac{r_0}{r_2}\right) dt^2 = dt_2{}^2$$

siendo dt_1 y dt_2 los tiempos propios o locales indicados por relojes situados en el campo y dt, en cambio, el intervalo correspondiente que indicaría otro reloj situado en el infinito. Resulta, así:

[96] $$\frac{dt_1}{dt_2} = \frac{\sqrt{1 - \frac{r_0}{r_1}}}{\sqrt{1 - \frac{r_0}{r_2}}} = \frac{\sqrt{\gamma_1}}{\sqrt{\gamma_2}} \, .$$

Fig. 136. — Los relojes situados en las cercanías de M marchan más lentamente.

Esta expresión relaciona dos intervalos de tiempo, indicados por dos relojes fijos en lugares diferentes del campo y que corresponden a un mismo lapso, indicado por un *tercer* reloj situado en el infinito.

En la fig. 135 se ha representado t' en función de r de

acuerdo con la [95], habiéndose supuesto que t es igual a 6 horas. De este modo, el reloj D, que está muy alejado de la masa puntual M que genera el campo, indica la hora 6, señalando de ese modo que hace 6 horas que se puso en marcha.

Los otros relojes representados en la figura se supone que comenzaron a andar también en el mismo instante * que el reloj D. Si todos marcharan con el mismo ritmo, todos deberían marcar la hora 6. Pero el reloj C, situado a una distancia de M igual a $10\,r_0$, indica $5^h\,41^m\,30^s$ porque marcha más despacio que el reloj D, atrasando más de 18 minutos por cada seis horas. El reloj B atrasa más todavía, pues indica sólo $5^h\,22^m$. El tiempo se detiene para valores de $r = r_0$. Claro está que todo esto es en el supuesto de que se pudiera tener una masa M concentrada en un punto. El valor de r_0 para el caso del Sol es de unos 3 km, pero la fórmula de Schwarzschild del campo solar sólo se aplica para valores del radio r que sean mayorse que el radio R = 700 000 km, del Sol. En otros términos: el campo exterior al Sol es tal como si toda su masa estuviera concentrada en un punto, que es el centro del Sol, pero para el campo interior, dentro de la masa solar, no vale tal cosa.

121. **La marcha de los relojes en un campo cualquiera.** — De acuerdo con la [62] y la [92], se tendrá:

$$[97] \qquad dt' = dt\sqrt{1+\frac{2\varphi}{c^2}} \quad ; \quad t' = t\sqrt{1+\frac{2\varphi}{c^2}} \quad ;$$

donde t es el intervalo de tiempo que indica un reloj colocado en el infinito ($\varphi = 0$), y t' el intervalo correspondiente indicado por otro reloj idéntico al primero y situado en un lugar donde el potencial newtoniano es φ. Como la [62] satisface a las ecuaciones del campo sólo en primera aproximación, cabe esperar que la [97] valga, en general, sólo en forma aproximada, aun cuando para una masa puntual única se obtiene de ella el valor exacto dado por la fórmula de Schwarzschild. Si se conoce la distribución de las masas que generan el campo, se sabe calcular siempre el potencial φ y podrá conocerse de ese modo la marcha de un reloj situado en cualquier lugar. Consideremos, a título de ejemplo, que el campo está generado por una única masa esférica de radio R y densidad ϱ constante. Para calcular el potnecial φ en todos los puntos, exteriores e interiores, lo más simple es utilizar la ley de Poisson [29]. En el párrafo 114, parte c), vimos que en el interior de una

* Obsérvese que los relojes están en reposo unos respecto de los otros. Por está razón, si el reloj C *atrasa* con respecto al D, el D *adelanta* con respecto al C. Por esto se dice que el atraso de los relojes en un campo gravitatorio es *real*, queriéndose significar con ello que no se trata, como en la relatividad restringida, de un atraso recíproco.

esfera de densidad constante, la fuerza de atracción, dirigida hacia el centro de la misma, es proporcional a la distancia, y por ser la fuerza, de acuerdo con las [7], la derivada del potencial, este último, en el interior de la esfera, deberá variar como el cuadrado de la distancia r al centro. Por lo tanto, consideraremos que el potencial φ en el interior de la esfera tiene la forma:

[98] $$\varphi = Ar^2 + B \qquad (r \leqslant R)$$

donde A y B son constantes que deben determinarse de manera que se satisfagan la ecuación [29] y ciertas condiciones límites. Por lo pronto, de la [98] tenemos:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2Ar\frac{\partial r}{\partial x} = 2Ar \, . \frac{x}{r} = 2Ax \quad ,$$

pues

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Resulta, así:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 2A$$

y lo mismo para las derivadas segundas respecto de las otras variables y z. Por lo tanto, para que la [29] se satisfaga, debe ser:

$$\Delta\varphi = 6A = 4\pi G\varrho \quad ,$$

o sea

[99] $$A = \frac{2}{3}\pi G\varrho = \frac{GM}{2R^3} \quad ,$$

si llamamos M a la masa total de la esfera.

Para la parte exterior tomaremos para φ la expresión

[100] $$\varphi = \frac{C}{r} \qquad (r \geqslant R)$$

que, cualquiera sea la constante C, satisface, como sabemos, a la ecuación de Laplace. Nos quedan por determinar las constantes B de [98] y C de [100], que se hallan de inmediato si se tiene en cuenta que, en el límite, entre el campo exterior e interior, o sea para $r = R$, la derivada de φ respecto de r, calculada a partir de [98] o a partir de [100], debe darnos el mismo valor. Esta condición, que traduce la continuidad de la fuerza, permite escribir:

$$2AR = -\frac{C}{R^2} \quad ,$$

de donde, teniendo en cuenta [99], resulta:

[101] $$C = -2AR^3 = -GM.$$

Por último, la constante B la determinamos teniendo en cuenta que para $r = R$, φ debe darnos el mismo valor calculando con [98] o con [100]:

$$\frac{2}{3}\pi G\varrho R^2 + B = -\frac{4}{3}\frac{\pi G\varrho R^3}{R}$$

o sea

[102] $$B = -2\pi G\varrho R^2 = -\frac{3}{2}\frac{GM}{R}.$$

En consecuencia, se obtiene:

[103] $$\varphi = \frac{GM}{2R^3}r^2 - \frac{3}{2}\frac{GM}{R} \quad ; \quad r \leqslant R$$

$$\varphi = -\frac{GM}{r} \quad ; \quad r \geqslant R$$

Como segundo ejemplo, calcularemos el potencial newtoniano, suponiendo que el campo está generado por una esfera hueca de radio interior R_1 y radio exterior igual a R_2, siendo la densidad ϱ, entre ambas capas concéntricas, constante. Si suponemos

$$\varphi = A_0 \quad ; \quad r \leqslant R_1$$

[104] $$\varphi = A_1 r^2 + \frac{A_2}{r} + A_3 \quad ; \quad R_1 \leqslant r \leqslant R_2$$

$$\varphi = \frac{A_4}{r} \quad ; \quad r \geqslant R_2$$

con A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 constantes, la ecuación de Poisson se satisface en todas partes, donde ϱ es diferente de cero o donde ϱ es cero, siempre que sea:

[105] $$6A_1 = 4\pi G\varrho \quad ; \quad A_1 = \frac{2}{3}\pi G\varrho.$$

La continuidad de las derivadas de φ respecto de r para $r = R_1$ permite escribir:

$$0 = 2A_1R_1 - \frac{A_2}{R_1^2}$$

de donde, por [105]:

[106] $$A_2 = 2A_1R_1^3 = \frac{4}{3}\pi G\varrho R_1^3.$$

La continuidad de la derivada de φ respecto de r para $r = R_2$ permite hallar A_4:

[107] $$A_4 = -\frac{4}{3}\pi G\varrho(R_2^3 - R_1^3) = -GM \quad ,$$

siendo M la masa total de la cáscara esférica considerada. Por la continuidad de φ, para $r = R_2$, se obtiene:

[108] $$A_3 = -2\pi G\varrho R_2^2 \quad ,$$

y por último, por esa misma continuidad, para $r = R_1$, debe ser:

[109] $$A_0 = -2\pi G\varrho (R_2^2 - R_1^2).$$

De este modo, se conoce la función φ en todas partes y, en consecuencia, podrá calcularse, aplicando la [97], la marcha de un reloj situado en cualquier lugar del campo.

Antes de abandonar este asunto del ritmo de los relojes en un campo gravitatorio, observemos que la "fuerza gravitatoria" está dirigida siempre hacia los lugares donde los relojes marchan más lentamente, del mismo modo que, en un disco giratorio, y por el mismo motivo, los cuerpos tienden a alejarse del eje del giro. En un lenguaje no muy ortodoxo, por cierto, podría denominarse a esta tendencia de los cuerpos a ubicarse en lugares donde el tiempo transcurre con mayor lentitud, la ley de la pereza universal, que sería la traducción libre de la expresión: De los diez potenciales gravitatorios de Einstein, el más importante, el que produce los efectos gravitacionales. es el coeficiente del tiempo g_{00} (fórmulas [58] y [95], pues γ es g_{00}).

122. Velocidad de la luz en el campo. — En el párrafo 121 vimos que la velocidad de la luz en el vacío, medida *naturalmente* y en un trayecto infinitamente pequeño, es constante. Su valor, que no depende de la dirección, coincide con el valor que se obtiene cuando la luz se propaga en una región galileana donde el campo gravitatorio es nulo y respecto de un sistema inercial. Pero si se mide la velocidad de la luz con reglas y relojes situados fuera del campo, su valor resulta variable.

Para un rayo de luz la distancia cronotópica ds es, en todos los casos, igual a cero. Si en la [67] hacemos $ds = 0$ y suponemos que el rayo se propaga en la dirección de r, se obtiene

$$\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) c^2 dt^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r_0}{r}}$$

de donde la velocidad radial de la luz, en el sentido de la vertical del lugar V_v, medida desde el infinito, resulta:

[110] $$V_v = \frac{dr}{dt} = c\left(1 - \frac{r_0}{r}\right).$$

Para la velocidad transversal, u horizontal, se obtiene, en cambio:

$$[111] \qquad V_h = \frac{rd\theta}{dt} = c\sqrt{1 - \frac{r_0}{r}}\,.$$

Se ve, así, que para r tendiendo a r_0, la velocidad de la luz tiende a cero, pero la velocidad natural de la misma es, en todas partes, igual a c.

Si un rayo de luz se propaga en un punto P del campo formando un ángulo φ con el plano horizontal del lugar (plano perpendicular a r en el punto P), las componentes de la velocidad de la luz, medidas en el campo, *componentes naturales*, serían:

Según la vertical:	$c \operatorname{sen} \varphi$	componentes
Horizontalmente:	$c \cos \varphi$	naturales

en tanto que, medidas desde el infinito dichas componentes, son:

Según la vertical:	$c \operatorname{sen} \varphi \cdot \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)$	componentes medidas desde una región galileana.
Horizontalmente:	$c \cos \varphi \cdot \sqrt{1 - \frac{r_0}{r}}$	

El módulo de la velocidad de la luz $V\varphi$, medido desde el exterior del campo, es:

$$[112] \; V^2{}_\varphi = c^2\left[\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^2 \operatorname{sen}^2 \varphi + \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)\cos^2 \varphi\right].$$

Despreciando las potencias de r_0, de grado superior al primero, resulta:

$$V^2{}_\varphi = c^2\left[1 - \frac{2r_0}{r}\operatorname{sen}^2 \varphi - \frac{r_0}{r}\cos^2 \varphi\right].$$

Extrayendo la raíz cuadrada y despreciando nuevamente las potencias superiores de r_0, se obtiene:

$$[113] \qquad V_\varphi = c\left[1 - \frac{r_0}{r}\operatorname{sen}^2 \varphi - \frac{r_0}{2r}\cos^2 \varphi\right]$$

que da el valor de la velocidad de la luz en cualquier punto del campo, en función de la distancia r y el ángulo φ que forma la dirección del rayo con el plano horizontal del lugar.

123. Restricciones físicas en la elección del sistema de coordenadas. El problema de la rotación de la Tierra en la teoría general de la relatividad. — En el párrafo 110 hicimos notar la amplia libertad que se tiene en la elección del sistema de coordenadas, y en el 88 vimos las condiciones de carácter matemático que deben cumplir las sustituciones que se lleven a cabo sobre las mismas. Hicimos notar también que, físicamente, es necesario tener en cuenta que de las cuatro coordenadas utilizadas, una de ellas tiene carácter temporal, por lo cual, transformaciones matemáticamente lícitas, serían físicamente absurdas. Si consideramos un acontecimiento O, un punto de universo, que en determinado sistema tiene las coordenadas $x_0\, x_1\, x_2\, x_3$, siendo x_0 el instante en el cual aquél se produce, podemos clasificar a los demás puntos del universo con respecto a O del modo siguiente: 1º) Puntos que se encuentran en el futuro absoluto de O, o sea acontecimientos sobre los cuales se puede influir desde O; en otros términos, O puede ser causa de esos acontecimientos situados en el futuro. 2º) Puntos situados en el pasado absoluto de O, sobre los cuales desde O no puede influirse, pudiéndose, por el contrario, considerar a O como efecto de alguno de ellos. 3º) Puntos independientes de O y que en el universo de Minkowski se encontraban entre las dos hojas de los conos que separaban el futuro del pasado (§ 43, fig. 66). Estas relaciones causales son independientes del sistema de coordenadas, por lo cual deben ser excluídos aquellos sistemas en que el orden precedente se altere. Pero este orden se alteraría si se admitieran transformaciones según las cuales un punto material en reposo en un sistema, tuviera, respecto de otro, una velocidad superior a la de la luz en ese lugar. Podemos describir los acontecimientos del universo adoptando un sistema de ejes fijo a la Tierra. Pero respecto de este sistema, las velocidades de las estrellas serían muy superiores a la de la luz, pues tendrían que recorrer una circunferencia, cuyo radio se mide en años-luz, en sólo 24 horas.

Ya Neptuno tendría que moverse con una velocidad superior a la de la luz.

Pero, en realidad, no es esto lo importante, puesto que aun así, la luz siempre tendría, *respecto del sistema considerado*, una velocidad mayor, en cada lugar, de la que tienen los puntos materiales que allí se encuentran. *Lo importante es que, con respecto a un sistema de ejes fijos a la Tierra, a partir de cierta distancia, no puede existir ningún punto material que se encuentre en reposo.*

Si respecto de un sistema inercial un cuerpo gira con la velocidad angular constante ω, un punto que se encuentra en reposo con respecto al cuerpo, situado a una distancia r del eje de giro, tendrá, con respecto al sistema inercial, una velocidad igual a ωr. Para una distancia r mayor que c/ω, el punto ten-

dría respecto del sistema inercial una velocidad superior a la de la luz. Un sistema de coordenadas *físico* que no permita poner mojones materiales fijos en diferentes lugares debe ser descartado, por lo menos, para describir lo que ocurre en dichos lugares. En otros términos: puede elegirse siempre un sistema de coordenadas en rotación (ya precisaremos lo que esto significa), pero dicho sistema sólo podrá aplicarse a una región limitada del espacio, y en nuestro caso, a puntos que se encuentren próximos al eje de giro. Sobre el problema de la rotación en la teoría general de la relatividad, se ha discutido mucho. En el libro de H. REICHENBACH (*Philosophie der Raum-Zeit-Lehre*, Berlín, 1928) se trata del asunto con detenimiento, pero consideramos, siguiendo sobre todo a H. WEYL (*Raum-Zeit-Materie*, Berlín, 1923), que la tesis que allí se sustenta no es acertada.

En la mecánica newtoniana se distingue perfectamente entre un sistema inercial y otro que gira respecto de él con movimiento uniforme. Ambos sistemas, en lo que se refiere a la mera descripción de los acontecimientos, son cinemáticamente equivalentes, pero dinámicamente no lo son. En el sistema inercial vale la ley: fuerza igual masa × aceleración, pero en el otro esa ley deja de cumplirse, por lo cual, dinámicamente, no son equivalentes.

En la teoría de la relatividad general, en cambio, la misma ley dinámica, la misma ley física, se cumple en ambos sistemas, y esa ley es: $R_{ik} = 0$.

En consecuencia, parecería —y esto es lo que sostiene Reichenbach— que, aceptando la teoría general de la relatividad, no hay diferencia alguna entre las dos afirmaciones siguientes:

La Tierra gira con respecto a las estrellas;

Las estrellas giran con respecto a la Tierra.

En este último caso, es necesario que nuestro sistema de coordenadas, fijo a la Tierra, sea irreal para puntos alejados del eje y por eso Reichenbach distingue entre sistemas *reales* e *irreales*, sin darle mayor importancia, al parecer, a esa distinción. Tanto es así, que en su libro *De Copérnico a Einstein* * (págs. 116 y 117), se afirma: "Hasta la concepción copernicana del mundo parece conmovida por esta consideración. Carece de sentido, correlativamente, hablar de una diferencia real entre Copérnico y Ptolomeo: ambas concepciones son igualmente admisibles". En cambio, HERMANN WEYL, en la página 269 de la quinta edición de su enjundioso libro *Espacio-Tiempo-Materia*, subraya la afirmación:

La concepción del mundo por la cual luchó Galileo no se modifica en lo más mínimo a causa de la teoría general de la

* Traducción castellana de L. Mirlas, Editorial Poseidón, Buenos Aires, 1945.

relatividad, sino que, por el contrario, ella precisa su significado *.

A continuación, seguimos a Weyl casi al pie de la letra, indicando entre paréntesis, con la inicial W, la página de su libro donde se encuentra lo esencial de lo que afirmamos.

El problema de la rotación es un caso particular entre otros muchos y la contradicción que aparece entre la relatividad de cualquier clase de movimiento y las fuerzas de inercia, proviene del hecho de considerar al espacio-tiempo como a una variedad sin estructura alguna (W. 221). El movimiento real de un cuerpo proviene de la "lucha" de dos acciones distintas: por una parte, la acción del *campo-guía* (Führungsfeld) y por la otra, la acción de la *fuerza* que lo desvía de su trayectoria natural, que es simplemente una geodésica del espacio-tiempo (W. 220). Si consideramos un tren en marcha que, en un momento dado, choca y se destroza y nos preguntamos porqué es el tren el que se deshace, en tanto que la torre de la iglesia cercana continúa imperturbable, a pesar de que la aceleración relativa entre ambos es la misma, la respuesta no puede ser más que la siguiente: Por la acción del choque, a causa de las fuerzas moleculares, el tren ha sido sacado de su trayectoria natural y esto no ha ocurrido en el caso de la torre. Hasta el más mínimo detalle de ese acontecimiento puede ser explicado de esa manera (W. 220). Desaparecen todas las dificultades si se considera a ese *campo-guía* como algo real. No se trata de algo formal, como en la mecánica newtoniana o en la relatividad restringida, en que la materia y su estado no tiene sobre *eso* (el espacio absoluto de Newton) influencia alguna. El *campo-guía está determinado por la materia y es influído y modificado por ella* del mismo modo que un campo eléctrico es producido por cargas eléctricas (W. 221).

Por lo tanto, en el caso del choque del tren, en lugar de la explicación newtoniana, en la cual hay que distinguir entre reposo y movimiento en un espacio absoluto; o en lugar de la explicación de la teoría restringida de la relatividad, en la cual aparecen traslaciones uniformes o aceleradas, interviene aquí la diferencia entre un movimiento que sigue al campo-guía y otro que ha sido arrancado de su "trayectoria natural" (W. 268).

En consecuencia, si hablamos de la rotación de un cuerpo alrededor de O, con ello entendemos rotación con respecto a un *compás inercial* (Trägheitskompass) que se mueva junto con O (W. 268). Este compás inercial se realiza físicamente mediante una brújula giroscópica o por el plano del péndulo de Foucault y con él, en principio, en una variedad cualquie-

* *Die Weltansicht, für welche Galilei gekämpft hat, wird durch die allgemeine Relativitätstheorie nicht kritisch gedeutet.*

ra, puede realizarse el desplazamiento paralelo de Levi-Civita (W. 268). Como ejemplo concreto, puede considerarse una esfera líquida: si la esfera gira, el resultado es uno y si no gira, otro. Las soluciones de ambos problemas no son equivalentes, pues no se puede pasar de una solución a la otra por un simple cambio de coordenadas (W. 269). Del mismo modo, H. THIRRING calcula, basándose en las ecuaciones del campo de Einstein, los efectos que se producen por la rotación de una enorme esfera hueca de gran masa, K, en la parte interior de la misma donde se encuentra una pequeña esfera, *k*, y los resultados que se obtienen muestran que *es totalmente diferente* el suponer que K gire y *k* esté en reposo o viceversa. "Reposo" y "rotación" deben entenderse en el sentido en que se ha definido, o sea con respecto al compás inercial. Por lo tanto, puede decirse, en cada caso, si es la esfera grande o la pequeña la que realmente gira y en el mismo sentido resulta que es la *Tierra la que realmente gira y no el cielo de las estrellas fijas* (W. 269).

"El compás (o brújula) más antiguo es el cielo estrellado. Como las velocidades de las estrellas no pueden ser nunca mayores que la velocidad de la luz, por la observación de estrellas infinitamente lejanas, estamos en condiciones de poder fijar exactamente una dirección en el espacio" (W. 269).

Claro está que no es correcto decir que la Tierra gira con respecto a las estrellas fijas, y no es correcto porque éstas se hallan infinitamente alejadas; pero sí es correcto decir que la Tierra gira con respecto a cuerpos que en un lugar O de la Tierra podrían formarse con los rayos de luz que provienen de las estrellas (W. 269). En otros términos: la Tierra gira con relación al anteojo de un ecuatorial en cuyo retículo permanece fija la imagen de determinada estrella.

La brújula de inercia y la brújula constituída por el cielo estrellado se diferencian claramente entre sí. La primera podría denominarse brújula de *permanencia* (Beharrung), por la tendencia que tiene la materia de permanecer, por inercia, en su mismo estado, en tanto que la segunda constituye una brújula de *posición* (Einstellung). En las brújulas o compases de inercia, como el péndulo de Foucault o el giróscopo, se conserva la dirección de instante a instante, por la tendencia de la materia a permanecer en su estado. En ellas la dirección inicial es completamente arbitraria, pues la misma no está determinada por la constitución del compás. Por el contrario, la brújula celeste, constituída por los rayos de luz que provienen de las estrellas, es una brújula de posición, como lo es una aguja magnética que en un campo dado se coloca de determinada manera. La dirección de la aguja magnética no es arbitraria, pues está perfectamente determinada por el campo que la envuelve y ella no depende de la posición que pudo tener

en un instante anterior (W. 271). La masa total del universo es la que produce el campo-guía homogéneo que se extiende por todas partes y es ella la que mantiene fijo al plano del péndulo de Foucault con respecto al cielo estrellado (W. 291).

Es posible, también, que la masa inerte de un cuerpo, o sea la resistencia que opone a desviarse de su trayectoria natural, dependa de algún modo de las masas restantes del universo entero (W. 297).

Debido a la merecida reputación de que goza Hans Reichenbach y a la amplia difusión que tienen sus libros, no nos pareció adecuado oponernos a él directamente y por ello apelamos a una autoridad indiscutida en el dominio de la teoría de la relatividad: Hermann Weyl. Deseamos ahora agregar algunas palabras por nuestra cuenta. Cuando en la relatividad restringida decimos que los sistemas (inerciales) S y S′ son equivalentes, podemos agregar todavía: todo ocurre en S como en S′, o sea el comportamiento de S es exactamente igual que el comportamiento de S′. Para que tal cosa ocurriera, el barco de Galileo debía moverse "plácidamente" sobre las aguas tranquilas del lago. Si el barco se mueve en un mar agitado, ya deja de ser cierto que todo ocurra en él como en la orilla. Claro está que puede tomarse un sistema de coordenadas fijo al barco y respecto del cual se bamboleará todo el universo. Para explicar lo que ocurre dentro del barco y en sus cercanías, ese sistema es perfectamente lícito. Respecto de él se cumple también, sin ningún género de dudas, la ley fundamental: $R_{ik} = 0$, aunque la forma de los g_{ik} sería sumamente complicada y ellos dependerían de las coordenadas espaciales y del tiempo. En otros términos: los pasajeros del barco pueden suponerse en reposo en un campo gravitatorio variable, campo gravitatorio que hace que los platos se caigan y que las sillas rueden por el suelo. El sistema de coordenadas fijo a la orilla y el sistema fijo al barco, son equivalentes porque en ambos vale la misma ley fundamental ($R_{ik} = 0$), pero el *comportamiento* de ambos no es el mismo. Del barco puede decirse que se mueve con respecto a un giróscopo fijo al mismo y si los platos se caen y las sillas ruedan, es porque tratan de *persistir* en su trayectoria natural determinada por el campo-guía al cual se aferra el eje del giróscopo. En la relatividad restringida, equivalencia entre los sistemas y comportamiento idéntico de los mismos, son sinónimos. Pero esto no ocurre en la relatividad generalizada. En un sistema donde todos los g_{ik} son constantes, se anulan todos los símbolos de Christoffel y la aceleración de un punto material libre es, en ese sistema, igual a cero. Si hacemos un cambio de coordenadas cualquiera, o sea si consideramos otro sistema que respecto del primero gire u oscile o se mueva con movimiento acelerado, matemáticamente el cambio de sistema se traducirá por una sustitución de las coordenadas en que las

x'_i serán funciones de las x_h, y en el nuevo sistema, los g'_{ik} ya no serán constantes. Los símbolos de Christoffel serán ahora diferentes de cero y el punto libre se moverá siguiendo una trayectoria curva con movimiento variado. El comportamiento de los dos sistemas es diferente, pero en el nuevo, como en el viejo, vale, naturalmente, la ley tensorial $R_{ik} = 0$. En la relatividad restringida, la equivalencia de todos los sistemas conducía a este resultado: es imposible, mediante experimentos internos, deducir si un sistema se traslada o no.

En la relatividad generalizada no ocurre lo mismo. Todos los sistemas son equivalentes, puesto que en todos ellos (en el vacío) se anulan las diez componentes del tensor de Ricci, pero es posible, no obstante, decidir, mediante experimentos internos, si el sistema oscila o gira con respecto a un giróscopo cuyo soporte esté fijo al mismo. Pero lo más extraordinario es que el movimiento del sistema, el barco que se mueve en un mar agitado, por ejemplo, con respecto al giróscopo, sea exactamente el mismo que el movimiento con respecto a un tubo que apuntara siempre hacia la misma estrella.

Las dos brújulas, la inercial y la estelar, dan indicaciones coincidentes.

Cabe pensar, por ello, que el campo de inercia, el campo-guía, está producido por el conjunto de todas las masas estelares.

El hecho de que, a pesar de que valga en todos los sistemas la misma ley fundamental, esos sistemas puedan comportarse de un modo diferente, es lo que debe entenderse, si se quiere entender la teoría general de la relatividad.

Cuando apareció la ley de Newton ocurrió una situación análoga. La gente oía hablar de que, según la nueva ley, la Luna era atraída por la Tierra del mismo modo que la manzana y no acertaba a comprender cómo obedeciendo a la misma ley, aquélla no cayera lo mismo que ésta. Una ley amplia puede incluir en sí comportamientos muy diversos, y tal es el caso del principio general de la relatividad, que afirma que todos los sistemas imaginables son *equivalentes*; pero esto *no significa que se comporten de la misma manera.*

Nada impide que use un sistema de coordenadas vinculado al sillón giratorio sobre el cual me encuentro sentado en este momento; pero sería absurdo que dijera que al dar una vuelta en el mismo puse en rotación a todo el universo. Si usted se encontrara sentado frente a mí, cuando yo giro en mi sillón, y pretendiera hacerle creer que es usted el que da vueltas en torno mío, me prestaría tanto crédito como el que le damos al solipsista que afirma que el universo entero se aniquila cuando él se digna cerrar sus ojos. En el sistema de mi sillón girato-

rio y en el de su poltrona vale la misma ley general, esto es cierto, pero mientras las células de su cerebro describen líneas del tiempo paralelas entre sí, las del mío van recorriendo hélices, y por esta razón yo me mareo y usted no (fig. 137). La ley es la misma, pero el comportamiento es diferente; el espacio-tiempo tiene una estructura y esa estructura se manifiesta por la fuerza que debemos hacer para apartar a un cuerpo de su trayectoria natural, que es siempre una geodésica del campo.

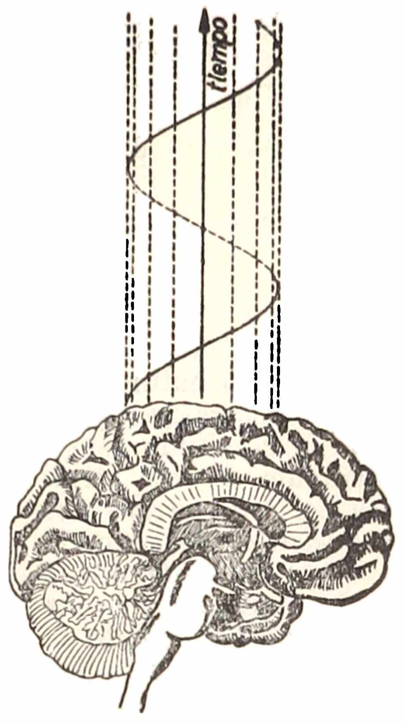


Fig. 137. — La rotación como algo absoluto y el mareo en la teoría general de la relatividad.

124. Sistema en rotación. — En una región galileana, adoptando coordenadas cilíndricas, z', r' y θ', el elemento lineal en este sistema K′ puede expresarse

[114] $$ds^2 = du'^2 - dr'^2 - r'^2 d\theta'^2 - dz'^2.$$

Si hacemos el cambio de coordenadas

[115] $$u' = u \quad ; \quad r' = r \quad ; \quad z' = z \quad ; \quad \theta' = \theta - \frac{\omega}{c} u \quad ;$$

este cambio implica que el segundo sistema K, el no acentuado, gira respecto del primero con la velocidad angular ω, constante, alrededor del eje z. Se tendrá:

$$du' = du \quad ; \quad dr' = dr \quad ; \quad dz' = dz \quad ; \quad d\theta' = d\theta - \frac{\omega}{c} du \quad ;$$

y llevando estos valores a la [114], se obtiene:

[116] $$ds^2 = \left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right) du^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - dz^2 + + \frac{2\omega r^2}{c} du d\theta.$$

Para la [114], como su forma es euclídea, se cumple evidentemente que $R_{ik} = 0$, y, naturalmente, sigue valiendo la misma igualdad para la [116]. Al poner $u' = u$, ello significa que en el sistema en rotación K se adopta, para la medida del tiempo, el tiempo de K′ y no el tiempo natural de K. Para

$r = 0$ ambos tiempos coinciden, pues si llamamos u'' al tiempo natural de K, el primer término de la [116] sería simplemente du''^2 resultando, así,

$$du'' = \sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}} \,.\, du \quad ,$$

o sea

$$T''_{(\text{natural})} = \sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}} \,.\, T \quad ,$$

donde T indica el tiempo del sistema galileano que coincide con el tiempo natural de K para $r = 0$. Pero a medida que r aumenta, los relojes fijos al sistema K marchan cada vez más despacio, resultado éste que ya conocíamos por la relatividad restringida. Y este atraso es *real* y no recíproco: los relojes de la periferia *atrasan* con respecto al del centro y el del centro *adelanta* con respecto a los de la periferia, análogamente a lo visto en el párrafo 42. De la [116] se puede obtener también la contracción de las reglas de medida cuando se las coloca perpendicularmente al radio r, pero el cálculo de una longitud puramente espacial, $d\sigma$, *no se obtiene* de la [116], como podría creerse, con sólo hacer $du = 0$. Las cosas se complican a causa del último término de la [116] en que aparece el producto de dos diferenciales, en el cual uno tiene carácter temporal y el otro espacial. Si consideramos que

$$u = x_0 \quad ; \quad r = x_1 \quad ; \quad \theta = x_2 \quad ; \quad z = x_3 \quad ;$$

el coeficiente

$$g_{02} = g_{20} = \frac{\omega r^2}{c}$$

es diferente de cero. Cuando los g_{ik} no dependen del tiempo, que es el caso de la [116], se dice que se trata de un sistema *estacionario* y si, además, fuera

$$g_{01} = g_{02} = g_{03} = 0 \quad ,$$

se habla de un sistema *estático*. Si los g_{ik} dependieran del tiempo, el sistema sería dinámico.

Si se calculan las geodésicas de la [116], se obtiene sin dificultad, además del valor de la aceleración centrífuga (§ 106, b), la aceleración de *Coriolis*. La [116] en coordenadas cartesianas puede escribirse:

$$[117] \quad ds^2 = \left[1 - \frac{\omega^2 (x^2 + y^2)}{c^2} \right] du^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 +$$

$$+ \frac{2\omega}{c} (y dx - x dy) du \quad ,$$

como podrá calcular el lector, al cual le recomendamos que halle las geodésicas de esta expresión, pues así se familiarizará con el cálculo de símbolos de Christoffel de segunda especie.

Importa hacer notar que la [116] o la [117] sólo tiene sentido para valores de r, tales que

[118] $$\omega^2 r^2 < c^2 \quad ; \quad \omega r < c \quad ;$$

en concordancia con lo que se dijo en el párrafo anterior.

Capítulo IX

PRUEBAS EXPERIMENTALES DE LA TEORÍA DE LA GRAVITACIÓN DE EINSTEIN. LOS TRES EFECTOS CRUCIALES

Sabemos ya que en primera aproximación, la teoría de Einstein coincide, en cuanto a los resultados experimentales, con la teoría de Newton. Por lo tanto, todos los éxitos de la ley newtoniana —que no son pocos— pueden ser agregados a la columna del haber de la nueva teoría. Dicha columna debería ser encabezada con la explicación de la rigurosa proporcionalidad observada entre las masas pesantes e inertes de todos los cuerpos. Además de todo esto, la teoría einsteiniana de la gravitación pudo prever dos hechos nuevos que se comprobaron más tarde, y son: el corrimiento hacia el rojo de las líneas espectrales provenientes de ciertas estrellas y la flexión de los rayos de luz por el campo gravitatorio solar. Otro hecho ya conocido desde la época de Leverrier (mediados del siglo pasado) y que no podía explicarse por la teoría clásica, es el corrimiento secular del perihelio de la órbita de Mercurio que, en la teoría de Einstein, se presenta como consecuencia directa de la misma.

Estos tres efectos:

Desplazamiento del perihelio de Mercurio;
Curvatura de los rayos de luz en el campo solar;
Corrimiento hacia el rojo de las líneas espectrales provenientes de la luz del Sol y otras estrellas;

constituyen los tres efectos cruciales de la teoría einsteiniana, que estudiaremos en el presente capítulo.

A) Corrimiento del perihelio de Mercurio

125. **Ecuaciones del movimiento central en la teoría de Einstein.** — El cálculo se reduce a escribir primero e integrar después las ecuaciones de las geodésicas de la variedad definida por la fórmula de Schwarzschild (VIII, 67). Haciendo corresponder en esta última el índice cero al tiempo u y los índices 1, 2, 3 a r, θ y φ, respectivamente, comencemos por hacer en

las ecuaciones de los geodésicas (VII, 93) $h = 2$, con lo cual obtenemos:

$$[1] \qquad \frac{d^2\theta}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} i & k \\ & 2 & \end{matrix} \right\} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds} = 0.$$

Los únicos símbolos no nulos con el índice inferior igual a 2, son:

$$\left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 2 & \end{matrix} \right\} = g^{22} \left[\begin{matrix} 1 & 2 \\ & 2 & \end{matrix} \right] = \frac{1}{2} g^{22} \frac{\partial g_{22}}{\partial r} = \frac{1}{r} \quad ;$$

$$\left\{ \begin{matrix} 3 & 3 \\ & 2 & \end{matrix} \right\} = g^{22} \left[\begin{matrix} 3 & 3 \\ & 2 & \end{matrix} \right] = -\frac{1}{2} g^{22} \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} = -\operatorname{sen}\theta \cos\theta \quad ;$$

con lo cual, la [1] da:

$$[2] \qquad \frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\theta}{ds} - \operatorname{sen}\theta \cos\theta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = 0.$$

Esta ecuación se satisface si hacemos

$$\theta = \frac{\pi}{2} = \text{constante} \quad ,$$

lo que significa que la trayectoria permanece en ese "plano" si inicialmente es

$$\frac{d\theta}{ds} = 0.$$

Por lo tanto, no se restringe en nada la generalidad del problema si en lo sucesivo nos limitamos a hallar las geodésicas de la variedad

$$[3] \qquad ds^2 = \gamma du^2 - \frac{1}{\gamma} dr^2 - r^2 d\varphi^2$$

que es la fórmula de Schwarzschild para $\theta = \pi/2 =$ constante. En otros términos: como sabemos ya que la trayectoria es "plana", podremos elegir siempre el polo de nuestro sistema de coordenadas de tal modo, que el "plano" de la trayectoria coincida con el "plano del ecuador". Recordemos que es:

$$[4] \qquad \gamma = 1 - \frac{r_0}{r} \; ; \; r_0 = \frac{2GM}{c^2}.$$

Haremos corresponder ahora en la [3] el índice cero a u y los índices 1 y 2 a r y a φ, respectivamente. Haciendo $h = 2$ en las ecuaciones de las geodésicas, resulta:

$$[5] \qquad \frac{d^2\varphi}{ds^2} + 2 \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 2 & \end{matrix} \right\} \frac{dr}{ds} \frac{d\varphi}{ds} = 0 \quad ,$$

pues éste es el único símbolo no nulo de índice inferior igual a 2 y cuyo valor es:

$$\begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix} = g^{22} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} g^{22} \frac{\partial g_{22}}{\partial r} = \frac{1}{r}$$

con lo cual, la [5] se convierte en

[6] $$\frac{d^2\varphi}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\varphi}{ds} = 0.$$

Una primera integración da:

[7] $$r^2 \frac{d\varphi}{ds} = K \quad ,$$

siendo K una constante de integración. La [7] es la expresión equivalente a la ley de las áreas de la mecánica newtoniana. Observemos que si inicialmente es $d\varphi/ds = 0$, la constante K debe ser nula y, en tal caso, la trayectoria tiene la dirección radial y las geodésicas pueden calcularse *cortando* la fórmula de Schwarzschild como lo hicimos en los ejercicios del párrafo 104, en los cuales se calcularon las geodésicas de la expresión [110].

Si en las ecuaciones de las geodésicas hacemos ahora $h = 0$, obtenemos:

$$\frac{d^2u}{ds^2} + 2 \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{Bmatrix} \frac{du}{ds} \frac{dr}{ds} = 0 \quad ,$$

y por ser

$$\begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} g^{00} \frac{\partial g_{00}}{\partial r} = \frac{1}{2\gamma} \frac{d\gamma}{dr}$$

resulta:

[8] $$\frac{d^2u}{ds^2} + \frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{ds} \frac{du}{ds} = 0.$$

De aquí una primera integración da:

[9] $$\gamma \frac{du}{ds} = A \quad ,$$

siendo A una constante. Dividiendo la [3] por ds^2, se obtiene:

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + \gamma r^2 \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = \gamma^2 \left(\frac{du}{ds}\right)^2 - \gamma \quad ,$$

y dividiendo por la [7] elevada al cuadrado y teniendo en cuenta [9], resulta:

$$\frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{\gamma}{r^2} = \frac{A^2}{K^2} - \frac{\gamma}{K^2} \quad ,$$

que con el valor de γ dado en [4] y haciendo el cambio de variables,

[10] $$r = \frac{1}{\varrho}$$

se convierte en:

[11] $$\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{A^2 - 1}{K^2} + \frac{r_0}{K^2}\varrho - \varrho^2 + r_0\varrho^3.$$

Para hallar el significado de la constante A, hagamos en la [3] $\gamma = 1$, lo que equivale a suponer que r es infinito. Si llamamos $d\sigma$ a la distancia espacial, para $\gamma = 1$ por [3] y por [9], se tendrá:

$$A^2 = \left(\frac{du}{ds}\right)^2 = \frac{du^2}{du^2 - d\sigma^2} = \frac{c^2dt^2}{c^2dt^2 - d\sigma^2},$$

y haciendo

[12] $$E = \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 \quad (\text{para } r = \infty)$$

resulta

[13] $$A^2 = \frac{c^2}{c^2 - E}.$$

La constante E es, entonces, el cuadrado de la velocidad que tendría la partícula en el infinito. Se tiene, por tanto:

[14] $$A^2 - 1 = \frac{E}{c^2\left(1 - \frac{E}{c^2}\right)}.$$

Si hacemos

[15] $$E' = \frac{E}{1 - \frac{E}{c^2}}$$

la [11] podría escribirse:

[16] $$\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{E'}{c^2K^2} + \frac{r_0}{K^2}\varrho - \varrho^2 + r_0\varrho^3.$$

En esta ecuación se vincula el valor inverso de "la distancia al centro de atracción" de la partícula móvil con el ángulo φ, por lo cual, la misma permite hallar la forma de la trayectoria. La [16] apenas difiere de la ecuación de la trayectoria en el movimiento central newtoniano, por lo cual, antes de ocuparnos de su integración, nos ocuparemos del movimiento central en la mecánica newtoniana.

126. El movimiento central en la mecánica newtoniana. — Si un punto de masa m es atraído constantemente hacia un centro fijo O por cierta fuerza F, que podría depender de la distancia de cualquier manera, el punto se movería en el plano determinado por el radio vector que va del centro al punto y la velocidad inicial. Si tomamos un sistema de coordenadas con origen en el centro O, tal que el plano $x\,y$ coincida con el plano de la trayectoria, la componente de la fuerza de atracción, según el eje z, será constantemente nula. Llamando X, Y a las componentes de la fuerza según $x\,y$, como F está dirigida constantemente hacia O, se cumplirá:

[17] $$\frac{X}{Y} = \frac{x}{y}\,.$$

Por las ecuaciones de movimiento se tiene, además:

[18] $$X = \frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{dt}\right) \;;\; Y = \frac{d}{dt}\left(m\frac{dy}{dt}\right).$$

Dividiendo estas ecuaciones miembro a miembro y teniendo en cuenta [17], resulta:

$$x\frac{d}{dt}\left(m\frac{dy}{dt}\right) = y\frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{dt}\right)$$

que puede escribirse

[19] $$\frac{d}{dt}\left[x\left(m\frac{dy}{dt}\right) - y\left(m\frac{dx}{dt}\right)\right] = 0 \quad ,$$

que se integra de inmediato, dando, en el caso de suponer que la masa m se mantiene constante,

[20] $$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = k \quad ,$$

siendo k una constante. La [20] es la expresión de la ley de las áreas, lo que se ve fácilmente utilizando coordenadas polares:

$$x = r\cos\varphi \quad ; \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\varphi \quad ;$$

pues, de este modo, aquélla se convierte en:

[21] $$r^2\frac{d\varphi}{dt} = k.$$

El área elemental barrida por el radio vector del planeta en el tiempo dt es

$$\tfrac{1}{2}\,r\,.\,r d\varphi \quad ,$$

a menos de infinitésimos de orden superior, por lo cual, la constante k es igual al doble de la velocidad areal. La [21] puede escribirse:

[22] $$r\frac{rd\varphi}{dt} = r \,.\, V_H = k \quad ,$$

siendo V_H la componente de la velocidad del punto móvil perpendicular al radio vector r. El subíndice H es para recordar que se trata de la componente "horizontal" de la velocidad. La [22] expresa que el momento de la velocidad del planeta con respecto al centro de atracción se mantiene constante, pues el momento de la componente "vertical" (según r) es cero. Esto mismo se puede "leer" directamente en la [20].

La otra ecuación del movimiento planetario es la ecuación de la energía que se obtiene de inmediato, haciendo igual a una constante la suma de la energía cinética y potencial:

[23] $$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - \frac{2GM}{r} = E \quad ,$$

donde E es una constante. En esta ecuación ya se ha dividido todo por la mitad de la masa de la partícula ($m/2$), por lo cual cada término tiene las dimensiones de una velocidad al cuadrado. Si la constante E es cero, la velocidad de la partícula en cada punto es igual a la velocidad parabólica (§ 113) correspondiente a ese mismo punto y la trayectoria es, en tal caso, como se verá, una parábola.

Si E tiene un valor positivo, dicho valor es igual al cuadrado de la velocidad de la partícula (los dos primeros términos de la [23]), cuando r tiende a infinito. En este caso, se verá que la trayectoria es una hipérbola. En cambio, si la constante E tiene un valor negativo, para r igual a infinito la velocidad resulta imaginaria, y la trayectoria es entonces una elipse.

Dividiendo la [23] por el cuadrado de la [21] para eliminar el tiempo y utilizando luego la sustitución [10], resulta:

[24] $$\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{E}{k^2} + \frac{2GM}{k^2}\varrho - \varrho^2 \quad ,$$

que es la ecuación que da la forma de la trayectoria en la mecánica newtoniana. El segundo miembro es un trinomio de segundo grado en ϱ y haciendo

[25] $$f(\varrho) = \frac{E}{k^2} + \frac{2GM}{k^2}\varrho - \varrho^2$$

podremos escribir

[26] $$d\varphi = \frac{d\varrho}{\sqrt{f(\varrho)}} \quad ,$$

que nos dará valores reales de φ sólo para valores positivos

del trinomio dado en [25]. En la fig. 138 se ha representado esta función; en (*a*) para $E < 0$, en (*b*) para $E = 0$ y en (*c*) para $E > 0$. Si designamos por ϱ_1 y ϱ_2 a las raíces del

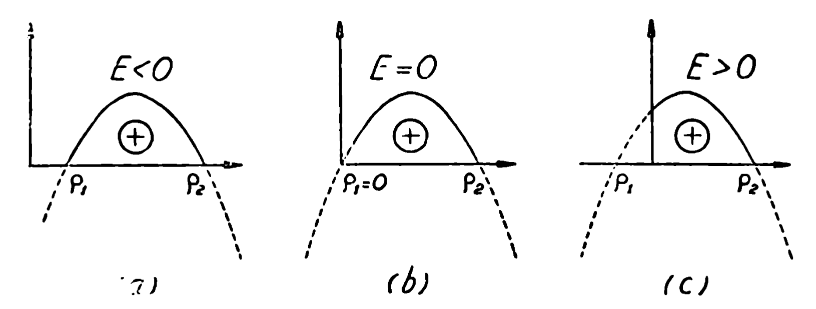


Fig. 138. — Los tres casos posibles que dan lugar a trayectorias elípticas (*a*), parabólicas (*b*) o hiperbólicas (*c*).

trinomio [25] igualado a cero, la función $f(\varrho)$ podrá expresarse:

[27] $$f(\varrho) = (\varrho - \varrho_1)(\varrho_2 - \varrho)$$

y, en consecuencia, la [26] será:

[28] $$d\varphi = \frac{d\varrho}{\sqrt{(\varrho - \varrho_1)(\varrho_2 - \varrho)}} .$$

Integrando, resulta:

[29] $$\varphi - \varphi_0 = \text{arc sen}\, \frac{\varrho - \frac{1}{2}(\varrho_2 + \varrho_1)}{\frac{1}{2}(\varrho_2 - \varrho_1)} ,$$

si designamos por φ_0 a la constante de integración. Teniendo en cuenta el significado de ϱ, que es el valor inverso de la distancia r, podremos escribir:

$$\varrho_2 + \varrho_1 = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1} = \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2} = \frac{2a}{(a + \text{f})(a - \text{f})}$$

$$\varrho_2 - \varrho_1 = \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2} = \frac{2\text{f}}{(a + \text{f})(a - \text{f})}$$

o sea

[30] $$\varrho_2 + \varrho_1 = \frac{2}{a(1 - e^2)} ;$$

[31] $$\varrho_2 - \varrho_1 = \frac{2e}{a(1 - e^2)} .$$

Al escribir estas ecuaciones, las letras a, f, e son únicamente designaciones de ciertas constantes. Claro está que se han escrito pensando en una elipse, pero con ello no se ha supuesto nada acerca de la forma de la trayectoria. Reemplazando en

[29] los valores dados en [30] y [31], aquélla podrá escribirse:

[32] $$\varrho = \frac{e \operatorname{sen}(\varphi - \varphi_0) + 1}{a(1 - e^2)}$$

y si hacemos

[33] $$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2} \quad ; \quad a(1 - e^2) = p$$

la [32], teniendo en cuenta la [10], se convierte:

[34] $$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} \;,$$

que es la ecuación general de una cónica en coordenadas polares con origen en uno de los focos, recibiendo p el nombre de parámetro y e el de excentricidad. Se tendrá

una elipse si es	$0 < e < 1$	;	$(E < 0)$;
una parábola si es	$e = 1$	;	$(E = 0)$;
una hipérbola si es	$e > 1$	;	$(E > 0)$.

Veamos ahora cómo se deduce de las ecuaciones obtenidas, la tercera ley de Kepler. La suma de las raíces que se obtienen igualando a cero la [25] es igual al coeficiente de ϱ, por el modo como se escribió la [27], por lo cual, teniendo en cuenta la [30], resulta:

$$\varrho_1 + \varrho_2 = \frac{2GM}{k^2} = \frac{2}{a(1 - e^2)} \;,$$

o sea:

[35] $$k^2 = GMa(1 - e^2).$$

Por otra parte, como ya hemos dicho, la constante k de la ley de las áreas [21] es igual al doble de la velocidad areal del planeta y, por lo tanto, si designamos por T al período o tiempo de una revolución, siendo a y b los semiejes de la elipse, se tendrá:

[36] $$2\frac{\pi ab}{T} = k.$$

Además, es

$$b = a\sqrt{1 - e^2} \;,$$

por lo cual, elevando al cuadrado la [36], resulta:

$$\frac{4\pi^2 a^4 (1 - e^2)}{T^2} = k^2 \;,$$

y teniendo en cuenta [35], se obtiene:

[37]
$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} = \text{constante} \quad ,$$

que es la expresión de la tercera ley de Kepler.

En la [34] se supone que φ se cuenta a partir del perihelio y se ve que el parámetro p es igual al radio vector perpendicular al eje mayor de la elipse (fig. 139). Si se conocen la velocidad inicial (módulo y dirección) de la partícula móvil (planeta), así como su distancia r, es fácil calcular, con las fórmulas establecidas, las tres constantes: e, p y φ_0.

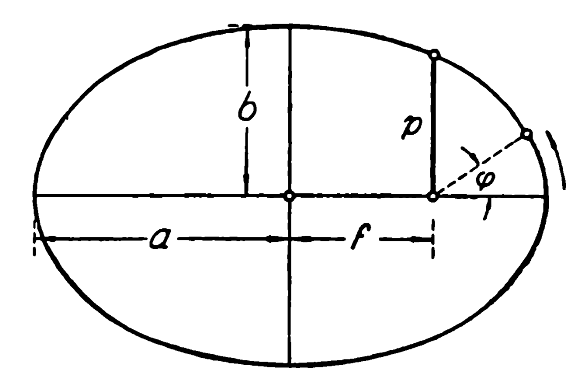


Fig. 139. — El parámetro p de la órbita elíptica.

Para hallar en todo momento la posición del planeta en función del tiempo, debe llevarse el valor de r dado en [34] a la [21], con lo cual se tiene:

[38]
$$t = \int \frac{p^2 d\varphi}{k(1 + e\cos\varphi)^2} \quad ,$$

cuyo cálculo da origen a un largo desarrollo, del cual se obtienen las complicadas fórmulas que se utilizan a tal efecto en la práctica.

127. El movimiento orbital en la teoría de Einstein. — Comparando la [16], que es la ecuación que da la forma de la trayectoria en la teoría de Einstein, con la [24], que es la correspondiente ecuación newtoniana, se ve que, si se hace

[39]
$$K^2 = \frac{k^2}{c^2} \quad ,$$

ambas ecuaciones resultan casi idénticas. La [16] con [39], teniendo en cuenta el valor de r_0 dado en [4], se convierte en:

[40]
$$\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{E'}{k^2} + \frac{2GM}{k^2}\varrho - \varrho^2 + r_0\varrho^3 \quad ,$$

y salvo el último término, esta expresión coincide con la [24] aunque, en verdad, E′ no es exactamente igual a E, como puede verse por la [15]. En consecuencia, si se desprecia el último término de la [40], se obtienen las elipses keplerianas en la forma que se explicó en el párrafo precedente. Pasemos ahora a estudiar la [40], sin despreciar ese último término. Si

igualamos a cero el segundo miembro de la [40], tendremos una ecuación de tercer grado en ρ, cuya forma es, después de dividir todo por r_0:

$$[41] \qquad \rho^3 - \frac{1}{r_0}\rho^2 + \frac{c^2}{k^2}\rho + \frac{E'}{r_0 k^2} = 0 \quad ,$$

donde se ha tenido en cuenta, al escribir el tercer término, el valor de r_0. Si llamamos ρ_1, ρ_2, ρ_3 a las tres raíces de la [41] y se identifican los coeficientes del desarrollo de

$$(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)(\rho - \rho_3)$$

con los de [41], se encuentra que la suma de las tres raíces debe ser igual al coeficiente de ρ^2 con signo opuesto, por lo cual será

$$[42] \qquad \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = \frac{1}{r_0} .$$

Como r_0 tiene un valor muy pequeño, dos de estas tres raíces, digamos ρ_1 y ρ_2, deben coincidir, casi, con los valores que se obtienen suponiendo $r_0 = 0$. Para $r_0 = 0$, la tercera raíz, ρ_3, debería ser infinita para que se cumpla la [42]. Se ve, así, que ρ_3 debe tener un valor muy grande, al cual le corresponderá un valor r_3 sumamente pequeño. La marcha de la función constituída por el segundo miembro de [40] está representada en la fig. 140. Como el primer miembro de [40] es necesariamente positivo, el planeta tendrá que moverse forzosamente en regiones donde el valor de ρ esté comprendido entre ρ_1 y ρ_2, que ya se ve que corresponderán al afelio y al perihelio, *respectivamente* (r es la inversa de ρ), pues en esos lugares $d\rho/d\varphi$ se anula. Al valor ρ_3, al cual corresponde un r_3 muy próximo a r_0, no corresponde ninguna posición real del planeta y tampoco para valores de ρ mayores que ρ_3, a pesar de que para tales valores el segundo miembro de [40] es también positivo. Ese segundo miembro, en función de las tres raíces, y teniendo en cuenta [42], podrá expresarse:

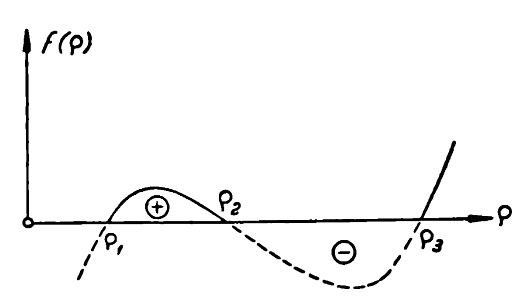


Fig. 140. — La marcha de la función representada por el segundo miembro de la (40).

$$r_0(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)(\rho - \rho_3) = r_0(\rho - \rho_1)(\rho_2 - \rho)(\rho_3 - \rho) =$$

$$[43] \qquad = (\rho - \rho_1)(\rho_2 - \rho) . r_0 \left(\frac{1}{r_0} - \rho_1 - \rho_2 - \rho \right) =$$

$$= (\rho - \rho_1)(\rho_2 - \rho)[1 - r_0(\rho_1 + \rho_2 + \rho)] .$$

Llevando, entonces, este valor al segundo miembro de la [40], se obtiene

$$[44] \quad d\varphi = \frac{d\varrho}{\sqrt{(\varrho-\varrho_1)(\varrho_2-\varrho)}\ \sqrt{1-r_0(\varrho_1+\varrho_2+\varrho)}} .$$

Si nos limitamos a considerar términos de primer grado en r_0, la expresión anterior se convierte:

$$[45] \qquad d\varphi = \frac{\left[1+\frac{r_0}{2}(\varrho_1+\varrho_2+\varrho)\right]d\varrho}{\sqrt{(\varrho-\varrho_1)(\varrho_2-\varrho)}} ,$$

o sea:

$$[46] \qquad d\varphi = \frac{d\varrho}{\sqrt{\ }} + \frac{r_0}{2}(\varrho_1+\varrho_2)\frac{d\varrho}{\sqrt{\ }} + \frac{r_0}{2}\frac{\varrho d\varrho}{\sqrt{\ }} ,$$

donde el radical vacío representa el denominador de [45]. Comparando la [46] con la [28], vemos que ya sabemos integrar los dos primeros términos del segundo miembro y en cuanto al tercero, es fácil transformarlo de manera que en el numerador aparezca la derivada de la expresión que está dentro del radical. Esta derivada es:

$$\frac{d}{d\varrho}[(\varrho-\varrho_1)(\varrho_2-\varrho)] = \varrho_1+\varrho_2-2\varrho .$$

La identidad

$$\frac{2\varrho}{2\sqrt{\ }} = \frac{2\varrho}{2\sqrt{\ }} - \frac{\varrho_1+\varrho_2}{2\sqrt{\ }} + \frac{\varrho_1+\varrho_2}{2\sqrt{\ }} =$$

$$= \frac{\varrho_1+\varrho_2}{2\sqrt{\ }} - \frac{\varrho_1+\varrho_2-2\varrho}{2\sqrt{\ }} ,$$

permite escribir la [46] del modo siguiente:

$$[47] \quad d\varphi = \left[1+\frac{3r_0}{4}(\varrho_1+\varrho_2)\right]\frac{d\varrho}{\sqrt{\ }} - \frac{r_0}{2}\frac{\varrho_1+\varrho_2-2\varrho}{2\sqrt{\ }}d\varrho$$

de la cual resulta, teniendo en cuenta que la integral de [28] da [29], lo siguiente:

$$[48] \quad \varphi-\varphi_0 = \left[1+\frac{3r_0}{4}(\varrho_1+\varrho_2)\right]\operatorname{arc\,sen}\frac{\varrho-\frac{1}{2}(\varrho_2+\varrho_1)}{\frac{1}{2}(\varrho_2-\varrho_1)} -$$

$$-\frac{r_0}{2}\sqrt{(\varrho-\varrho_1)(\varrho_2-\varrho)} .$$

Si en esta expresión hacemos $\varrho=\varrho_2$, tendremos los valores de φ correspondientes al perihelio y como para dicho valor es

$$[49] \qquad \operatorname{arc\,sen}(1) = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

siendo n un número entero, resulta que entre dos pasajes consecutivos del planeta, por el perihelio (o por el afelio), el ángulo φ recorrido por el mismo será:

$$[50] \qquad \varphi_n - \varphi_{n-1} = 2\pi\left[1 + \frac{3r_0}{4}(\varrho_1 + \varrho_2)\right].$$

Este ángulo es, entonces, algo mayor que 2π y el movimiento del planeta puede considerarse como si se efectuara sobre una elipse que, en conjunto, va girando en el mismo sentido del movimiento de una manera enteramente análoga a lo que ocurre en un péndulo esférico (§ 106, d). La diferencia entre ambos casos consiste en que la elipse planetaria gira alrededor del foco (fig. 141), y la elipse del péndulo esférico (fig. 121) alrededor del centro.

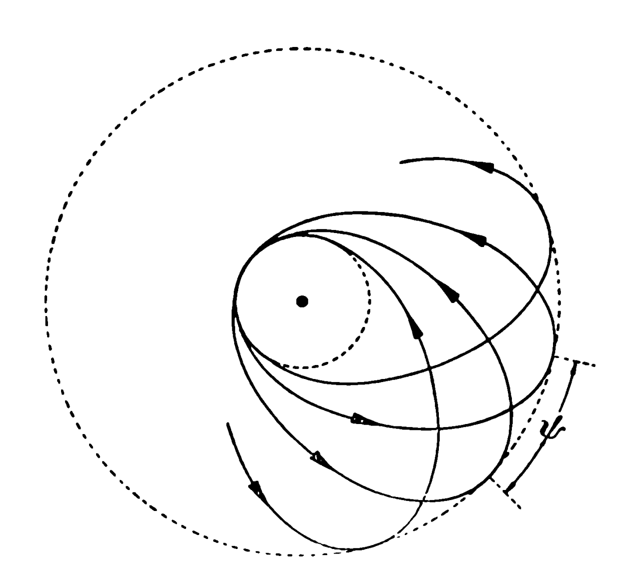


Fig. 141. — Rotación de las elipses planetarias.

El avance del perihelio por vuelta es, entonces, de acuerdo con [50]:

$$[51] \qquad \psi = \frac{3\pi}{2} r_0(\varrho_1 + \varrho_2)$$

que con la [30] y teniendo en cuenta el valor de r_0 dado en [4], se convierte en

$$[52] \qquad \psi = \frac{6\pi GM}{c^2 a(1 - e^2)}$$

que es la célebre fórmula de Einstein que da el avance del perihelio de un planeta por vuelta en función del semieje mayor de la órbita y de la excentricidad de la misma.

Observemos que si en la [45] se reemplaza el valor variable de ϱ, que figura en el numerador (dentro del paréntesis donde aparece como factor $r_0/2$ que es muy pequeño), por el valor constante dado por la semisuma de ϱ_1 y ϱ_2, se obtiene

así rápidamente la [52], pero al proceder de esa manera, no figura en la integral el último término de la [48], que es, por cierto, muy pequeño.

Para el cálculo efectivo conviene reemplazar en [52] GM/a por su valor en función del tiempo T de revolución del planeta, utilizando la tercera ley de Kepler [37], y así resulta:

[53] $$\psi = \frac{24\pi^3 a^2}{c^2(1 - e^2)T^2} .$$

Para Mercurio, se tienen los siguientes valores:

$$a = 5{,}786 \,.\, 10^{12} \text{ cm} \quad ; \quad e = 0{,}2056$$
$$T = 87{,}97 \text{ días} = 3600 \times 24 \times 87{,}97 \text{ seg.}$$

Si se quiere el corrimiento por siglo, habrá que multiplicar todavía por el número de vueltas que el planeta efectúa en ese lapso, que en este caso es:

$$\frac{100 \times 365{,}25}{87{,}97} = 415{,}2 .$$

Para pasar de radianes a segundos de arco, habrá que multiplicar por

$$\frac{180 \times 3600}{\pi}$$

resultando, de este modo, para el desplazamiento secular ε del perihelio de Mercurio, el valor

[54] $$\varepsilon = 43'' .$$

Ésta es, justamente, la diferencia que quedaba sin explicación en la teoría newtoniana. El corrimiento real observado del perihelio de Mercurio por siglo es, según una comunicación de G. M. CLEMENCE de 1947,

$$\varepsilon_{(\text{observado})} = 5599'',7 \pm 0{,}4 .$$

Teniendo en cuenta las perturbaciones de los demás planetas y aplicando la ley de Newton, resulta, para el valor calculado:

$$\varepsilon_{(\text{calculado})} = 5557'',2 \pm 0{,}8 .$$

La diferencia entre estos últimos valores es:

[55] $$\Delta\varepsilon = 42'',5 \pm 1''$$

que, como se ve, coincide con el valor relativista dado en [54].

Para los tres planetas que siguen a Mercurio, los corrimientos calculados por siglo son:

Venus: 8'',6 ;

Tierra: 3'',8 ;

Marte: 1'',3 .

Estos valores resultan demasiado pequeños para que puedan servir de prueba a la teoría al confrontarlos con los valores observados, pues ha de tenerse en cuenta que, como *valores observados,* deben figurar en este caso las *diferencias* entre los corrimientos verdaderamente observados y los que se obtienen calculando las perturbaciones de los demás planetas utilizando la ley de Newton.

Ya en 1859, LEVERRIER hizo notar que las perturbaciones de los demás planetas conocidos no eran suficientes para explicar el corrimiento del perihelio de Mercurio y sugirió entonces que el tal corrimiento podría deberse a la acción de otro planeta situado entre el Sol y Mercurio. Hasta se llegó a bautizar al supuesto planeta, culpable del desplazamiento del perihelio de Mercurio, con el nombre de Vulcano, pero el tal Vulcano jamás pudo ser observado. Otros astrónomos trataron, entonces, de dar cuenta del fenómeno de diferente manera, pensando, algunos, que el efecto podría explicarse, siempre dentro del marco de la ley de Newton, por la acción de una nube de polvo que rodearía al Sol, mientras otros proponían modificar ligeramente el exponente 2 de la ley newtoniana o agregarle a la misma un segundo término constituído por un coeficiente muy pequeño, dimensionado, dividido por la cuarta potencia de la distancia. De esta última manera, se ve fácilmente que la fórmula clásica [24] puede hacerse coincidir con la [40], por lo menos para el caso de Mercurio. Pero claro está que ninguno de estos intentos constituyen una explicación del fenómeno, pues en todos los casos se trata más bien de un arreglo ***hecho a dedo*** y *a posteriori*

B) DESVIACIÓN DE LA LUZ EN UN CAMPO GRAVITATORIO

128. Cálculo de la desviación de los rayos de luz en el campo solar. — Para un rayo de luz la distancia cronotópica ds es igual a cero, por lo cual, si en la [3] se hace $ds = 0$, resulta:

$$\frac{1}{\gamma}\,dr^2 + r^2 d\varphi^2 = \gamma du^2 \quad , \tag{56}$$

de la cual se obtiene:

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \gamma r^2 = \gamma^2\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 . \tag{57}$$

Las integrales [7] y [9] de las líneas geodésicas pueden ser utilizadas aquí sólo después de eliminar entre las mismas a ds, pues aquéllas, para $ds = 0$, carecen de sentido. Dividiendo [9] por [7] y elevando al cuadrado, se tiene:

[58] $$\gamma^2 \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{A^2}{K^2} r^4.$$

Llevando este valor a la [57] y haciendo el cambio de variables [10], resulta, teniendo en cuenta el valor de γ [4]:

[59] $$\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{A^2}{K^2} - \varrho^2 + r_0\varrho^3.$$

Ésta es la ecuación de la trayectoria del recorrido espacial del rayo de luz en el campo gravitatorio. Encontremos primeramente el significado de la constante que aparece en el primer término del segundo miembro. Si llamamos x a la distancia mínima del rayo al centro del campo (centro del Sol), siendo ϱ_0 su valor correspondiente, se tendrá

[60] $$\varrho_0 = \frac{1}{x}.$$

Para ese punto, tanto $dr/d\varphi$ como $d\varrho/d\varphi$ son nulos, por lo cual, si en [59] ponemos ϱ_0 en lugar de ϱ, se tendrá

[61] $$\frac{A^2}{K^2} = h^2 = \varrho_0^2 - r_0\varrho_0^3 = \varrho_0^2(1 - r_0\varrho_0).$$

Introduciendo el valor de la constante h, que tiene un valor determinado para cada ϱ_0 y, por lo tanto, para cada x, la [59] podrá escribirse:

[62] $$\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 = h^2 - \varrho^2(1 - r_0\varrho)$$

y de aquí

[63] $$d\varphi = \frac{d\varrho}{\sqrt{h^2 - \varrho^2(1 - r_0\varrho)}}.$$

Si se toma como nueva variable

[64] $$z = \frac{\varrho}{h}\sqrt{1 - r_0\varrho}$$

que, despreciando las potencias de grado superior al primero en r_0, puede escribirse

$$z = \frac{\varrho}{h}\left(1 - \frac{r_0}{2}\varrho\right),$$

de aquí, podremos poner ϱ en función de z con sólo resolver una ecuación de segundo grado, resultando:

[65] $$\varrho = \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0}\sqrt{1 - 2hr_0z}.$$

Aquí tomamos el signo menos, pues, de acuerdo con [64], debe ser $\varrho = 0$ si $z = 0$. De la [65] se obtiene:

[66] $$d\varrho = \frac{h\,dz}{\sqrt{1 - 2hr_0 z}} = h(1 + hr_0 z)\,dz$$

si nuevamente despreciamos las potencias de grado superior de r_0. De este modo, la [63] se convierte

[67] $$d\varphi = \frac{(1 + hr_0 z)\,dz}{\sqrt{1 - z^2}} .$$

La desviación angular que experimenta el rayo se calcula fácilmente a partir de esta última expresión. Para el infinito es de acuerdo con [10] $\varrho = 0$ y por [64] será también $z = 0$. Para el punto P (fig. 142) es $\varrho = \varrho_0$, y de acuerdo con [64] y [61], se obtiene entonces, para ese punto, $z = 1$. Por lo tanto, el ángulo φ que se obtiene integrando la [67] entre cero y uno, es:

[68] $$\varphi = \left| \text{arc sen}\, z - hr_0 \sqrt{1 - z^2} \right|_0^1 = \frac{\pi}{2} + hr_0$$

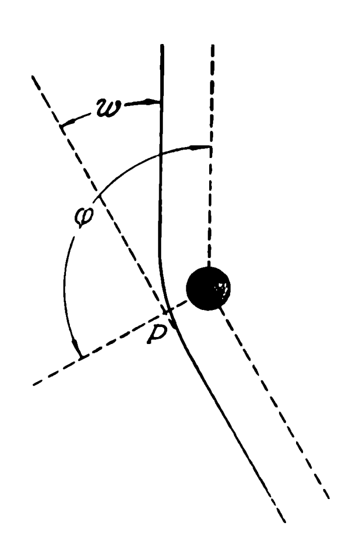


Fig. 142. — Desviación de los rayos de luz por la acción del campo gravitatorio.

y el doble de este ángulo es:

$$2\varphi = \pi + 2hr_0 \quad ,$$

de donde el ángulo ω de desviación será:

[69] $$\omega = 2hr_0 .$$

Teniendo en cuenta el valor de r_0 [4] y el de h [61] con [60] y despreciando el término donde aparece el cuadrado de r_0, se obtiene:

[70] $$\omega = \frac{4GM}{c^2 x} \quad ,$$

que es la fórmula de Einstein para la desviación de un rayo de luz, cuya distancia mínima al centro de la masa M es x. Si hacemos x igual al radio del Sol, considerando que el rayo pasa rasante junto al disco solar, se obtiene para ω:

[71] $$\omega_0 = 1'',75 .$$

Obsérvese que si se indica con v a la velocidad parabólica newtoniana (§ 113, fórmula 18), la [70] puede escribirse

[72] $$\omega = 2\frac{v^2}{c^2} .$$

129. La desviación de la luz en el campo solar si el espacio fuera euclídeo. — Hagamos el mismo cálculo que precede, pero tomando para el elemento lineal la expresión

$$[73] \qquad ds^2 = \gamma du^2 - dr^2 - r^2 d\varphi^2$$

en lugar de la [3]. En este caso, la parte espacial es euclídea, pues se ha hecho igual a menos uno al coeficiente de dr^2. Procediendo exactamente igual que antes, se encuentra que siguen siendo válidas la [7] y la [9], pudiéndose utilizar, en consecuencia, la [58]. Si en [73] se hace $ds = 0$ y se combina lo que así se obtiene con la [58], se llega sin dificultad, despreciando las potencias de grado superior en r_0, a la ecuación:

$$[74] \qquad \left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 = \varrho_0^2 - r_0\varrho^3 + r_0\varrho_0^2\varrho - \varrho^2.$$

Las raíces del segundo miembro de esta ecuación, igualado a cero, son:

$$[75] \qquad \varrho_2 = \varrho_0 \quad ; \quad \varrho_1 = r_0\varrho_0^2 - \varrho_0 \quad ;$$

y la [74] podrá integrarse exactamente igual que la [28], por lo cual, sustituyendo en [29] los valores dados en [75], resulta:

$$[76] \qquad \varphi - \varphi_0 = \text{arc sen}\,\frac{\varrho - \frac{1}{2}r_0\varrho_0^2}{\varrho_0 - \frac{1}{2}r_0\varrho_0^2}.$$

Si llamamos $\psi/2$ a lo que varía el ángulo φ al variar ϱ entre ϱ_0 y cero, se tiene:

$$\frac{\psi}{2} = \frac{\pi}{2} - \text{arc sen}\,\frac{-\frac{1}{2}r_0\varrho_0}{1 - \frac{1}{2}r_0\varrho_0}$$

y despreciando las potencias superiores de r_0 y tomando el seno igual al arco, resulta

$$\frac{\psi}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}r_0\varrho_0 \quad ,$$

de donde

$$[77] \qquad \psi - \pi = \omega_E = r_0\varrho_0 = \frac{2GM}{c^2 x}.$$

Se ve que la desviación así calculada, considerando al espacio euclídeo y teniendo en cuenta sólo la curvatura del tiempo, resulta exactamente igual a la mitad del valor exacto dado en [70], donde se tomó en consideración la curvatura del espacio propiamente dicho.

130. **La desviación de la luz en la teoría newtoniana.** — La ecuación de la trayectoria es, en este caso, la [24], siendo la constante E, de acuerdo con [23], igual al cuadrado de la velocidad de la luz, c^2, en lugares muy alejados de la masa M o sea para r tendiendo a infinito. Se tendrá, así,

[78] $$\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{c^2}{k^2} + \frac{2GM}{k^2}\varrho - \varrho^2.$$

Como para $\varrho = \varrho_0$ es $d\varrho/d\varphi = 0$, resulta

[79] $$k^2 = \frac{c^2}{\varrho_0^2} + \frac{2GM}{\varrho_0} ,$$

y las raíces del segundo miembro de [78] igualado a cero son:

[80] $$\varrho_2 = \varrho_0 \quad ; \quad \varrho_1 = \frac{2GM\varrho_0^2}{c^2 + 2GM\varrho_0} - \varrho_0 \quad ;$$

y sustituyendo estos valores en la [29] y dándole a ϱ los valores ϱ_0 y cero, se obtiene para lo que varía el ángulo φ entre esos límites:

$$\frac{\psi}{2} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,sen} \frac{-GM\varrho_0^2}{\varrho_0 c^2 + GM\varrho_0^2}$$

y, por lo tanto, para la desviación angular que experimenta el rayo se obtiene, en primera aproximación:

[81] $$\omega_N = \psi - \pi = \frac{2GM}{c^2 x} ,$$

que coincide con la [77], siendo entonces el valor newtoniano igual a la mitad del que resulta aplicando la teoría de Einstein [70]. Esta desviación de la línea recta que debe experimentar un rayo de luz, fué calculada ya en 1801 por J. SOLDNER (1776-1836), suponiendo que el rayo luminoso, o los corpúsculos que lo constituirían, de acuerdo con la teoría de la emisión, estuvieran sometidos, como cualquier otra partícula material, a la ley de la atracción de Newton.

El valor [81] se obtiene también sin presuponer que la luz esté constituída por partículas materiales aceptando, de acuerdo con la teoría restringida de la relatividad, que masa y energía son una misma cosa. Si se agrega a esto el principio de equivalencia que asegura la proporcionalidad entre las masas pesantes e inertes, se comprende que la energía radiante no podrá sustraerse a la acción de los campos gravitatorios. Razonando así, y aplicando la ley de Newton, Einstein obtuvo en 1911 (véase la cita de § 76) la [81]. Cuatro años más tarde encontró la [70] y dió de la misma la demostración que reproducimos a continuación (véase cita del párrafo 86).

131. Deducción de la desviación de la luz aplicando el principio de Huyghens. — Como la velocidad de la luz en un campo gravitatorio varía de punto a punto (§ 122), el campo se comporta, en lo referente a la propagación de la luz, como un medio de índice de refracción variable. De este modo, podrá calcularse la desviación que experimenta un rayo de luz, al pasar cerca de la masa M (fig. 143), por los procedimientos comunes de la óptica. Supongamos que el rayo se propaga, en primera aproximación, paralelamente al eje y. Esto significa que, si se prescinde de la acción del campo, el rayo seguiría la recta representada en la figura. Consideremos ahora una parte de la superficie de onda correspondiente a este rayo y representada por la traza AB. En los lugares más cercanos a la masa M, la velocidad de la luz es menor de acuerdo con [110] y [111] del párrafo 122. Por esta razón, al cabo de cierto tiempo Δt, la superficie de onda ocupará una posición tal como A_1B_1, siendo el ángulo de desviación $\Delta\omega$ tal, que:

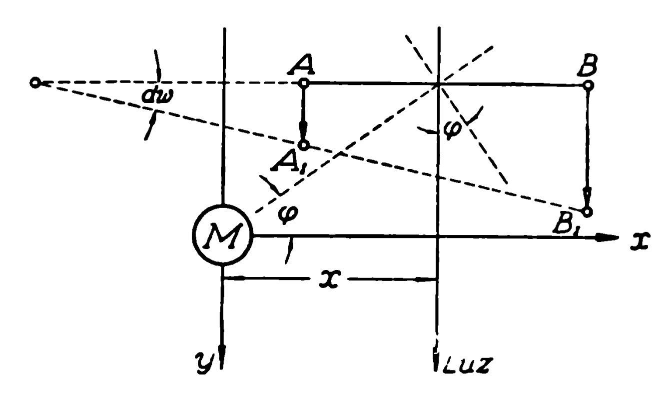


Fig. 143. — La luz se desvía porque en las proximidades de M su velocidad es menor.

$$\Delta\omega = \frac{(V_B - V_A) \, . \, \Delta t}{x_B - x_A}$$

y como es

$$\Delta t = \frac{\Delta y}{V_y}$$

resulta:

[82] $$d\omega = \frac{1}{V_y} \frac{\partial V_y}{\partial x} dy .$$

De la [113] del párrafo 122 calculamos inmediatamente el valor de V_y, teniendo en cuenta que

$$\operatorname{sen}^2 \varphi = \frac{y^2}{r^2} \quad ; \quad \cos^2 \varphi = 1 - \frac{y^2}{r^2} \quad ;$$

con lo cual se obtiene:

[83] $$V_y = c \left(1 - \frac{r_0}{2r} - \frac{r_0}{2r^3} \, y^2 \right) .$$

La derivada que figura en [82] es:

$$\frac{\partial V_v}{\partial x} = c\left(\frac{r_0}{2r^3}\,x + \frac{3}{2}\,\frac{r_0 y^2}{r^5}\,x\right)$$

y se ve, dado el valor [83], que si nos limitamos a considerar las potencias de primer grado en r_0, se cumple

$$\frac{1}{V_v}\,\frac{\partial V_v}{\partial x} = \frac{1}{c}\,\frac{\partial V_v}{\partial x}$$

por lo cual la [82] da:

$$d\omega = \left(\frac{r_0}{2r^3}\,x + \frac{3}{2}\,\frac{r_0 y^2}{r^5}\,x\right) dy.$$

Poniendo todo en función de x (constante) y de φ, resulta

[84] $$d\omega = \frac{r_0}{2x}\cos\varphi\, d\varphi + \frac{3}{2}\,\frac{r_0}{x}\,\mathrm{sen}^2\varphi\cos\varphi\, d\varphi.$$

Integrando entre $+\pi/2$ y $-\pi/2$ tendremos:

[85] $$\omega = \frac{2r_0}{x} = \frac{4GM}{c^2 x},$$

que coincide con la [70].

132. **Confrontación con la experiencia.** — En los contados minutos que puede durar un eclipse total de Sol, es posible fotografiar la región del fondo del cielo sobre la cual se proyecta el disco solar oscurecido por la intercepción de la Luna. En la placa fotográfica así tomada se imprimirán las imágenes de ciertas estrellas y, si realmente, por la acción del campo gravitatorio solar, los rayos de luz experimentan alguna desviación, esas imágenes deberán aparecer desplazadas. Para medir dicho desplazamiento, bastará comparar la placa así obtenida con otra tomada de la misma región celeste algunos meses antes o después del eclipse, cuando el Sol no se proyecta sobre la misma. Si el efecto previsto por Einstein se produce realmente, habrá que esperar que las imágenes de las estrellas que aparecen junto al borde del disco del Sol, experimenten un desplazamiento hacia el exterior, como si las mismas fueran repelidas (las imágenes, no la luz) desde el centro del disco oscuro y en una magnitud equivalente a 1″75. Como el efecto está en razón inversa de la distancia x de los rayos al centro del Sol, las imágenes situadas en la placa a una distancia igual a dos veces el radio del disco oscuro, deberán desplazarse sólo 0″,87. En la fig. 144 se ha representado una parte del borde del Sol cuyo centro se encuentra hacia O. El rayo proveniente de la estrella E y que se ha representado punteado, seguiría el trayecto que se ha indicado en el dibujo sólo en el caso de

que el Sol no se encontrara en ese lugar. El centro óptico del objetivo del anteojo, que recibe los rayos de luz, se supone que está en el vértice del ángulo ω, siendo P el plano focal del mismo, donde se coloca una placa fotográfica. Si la figura estuviera hecha a escala, el tamaño de nuestro anteojo resultaría un poquito exagerado, pero no nos preocupemos por ello.

Encontrándose el Sol donde se encuentra, el rayo de luz punteado no podrá penetrar en el anteojo porque se desviará hacia la izquierda. Pero en cambio, el rayo que se ha dibujado por un trazo continuo, y que proviene de la misma estrella E, llega justo al anteojo y es así como en la placa P se forma en E_1 la imagen de la estrella como si la misma se encontrara en E′. La placa ya revelada se ve en la parte inferior del dibujo, donde aparece en O′ la imagen del centro del disco del Sol. Sobre E'_0 cae la imagen de la estrella E al fotografiar la misma región celeste cuando el Sol no se proyecta sobre ella. Puede suponerse que se superponen ambas placas y así se podrá medir la distancia (del orden de los centésimos de milímetro) entre E'_0 y E'_1. Conociendo la distancia focal de nuestro anteojo, podremos calcular de este modo el ángulo ω de desviación. El valor x que figura en la fórmula lo hallamos midiendo la distancia $O'E'_1$ y el radio R′ de la imagen del disco solar, pues de ese modo, siendo R el radio del Sol, se tendrá

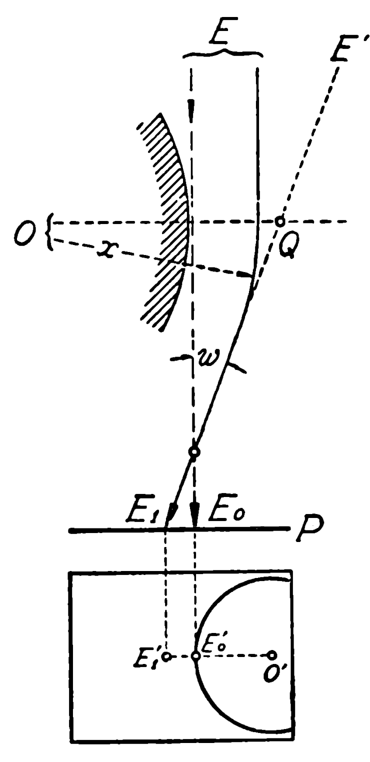


Fig. 144. — Manera de medir la desviación de la luz en un eclipse total de Sol.

$$\frac{O'E'_1}{R'} = \frac{x}{R} ,$$

pues prácticamente x es igual a OQ.

Como el radio angular del Sol es aproximadamente igual a $15' = 900''$, resulta de aquí que las desviaciones medidas sobre la placa son siempre menores que la milésima parte del radio con que en ella aparece el disco oscurecido del Sol, puesto que, debido a la luz de la corona solar, sólo aparecen nítidamente fotografiadas las estrellas para las cuales es $x > 2R$ y, en consecuencia, ω bastante menor que $1''$.

La circunstancia de que el desplazamiento a esperarse sería sólo igual a la mitad si el espacio fuera euclídeo, hizo que desde el comienzo se pusiera el mayor empeño en estudiar el fenómeno que, en lenguaje popular, debía decidir acerca de estas dos cuestiones:

Si la luz pesa;

Si el espacio es realmente curvo.

La teoría de Einstein apareció en Alemania durante la primera guerra mundial (1914-1918), pero, a pesar de ello, alcanzó pronta difusión en todo el mundo científico. En particular, el astrónomo inglés SIR ARTHUR EDDINGTON fué uno de los primeros en ponerse a estudiar seriamente la teoría del sabio "enemigo", mostrando así que para la ciencia no deben existir fronteras.

Se había calculado que el 29 de mayo de 1919 se produciría un eclipse total de Sol particularmente apto para verificar el efecto Einstein, pues el disco solar oscurecido se proyectaría sobre un grupo de estrellas muy brillantes: las Hyadas. El armisticio se firmó el 11 de noviembre de 1918 y el comité de sabios presidido por Eddington para estudiar el efecto, se puso a trabajar febrilmente con el objeto de proyectar el envío de expediciones científicas a lugares donde el eclipse total tuviera mayor duración.

Se decidió, al fin, enviar dos expediciones: una a Sobral, en el norte del Brasil, y la otra a la isla del Príncipe, en el golfo de Guinea, al oeste de África, pues, de este modo, era poco probable que en ambos lugares, tan distantes entre sí, las condiciones atmosféricas fueran simultáneamente adversas.

He aquí cómo relata Eddington los momentos del eclipse en la isla del Príncipe *:

"El día del eclipse el tiempo era desfavorable. Cuando llegó a su culminar, el oscuro disco de la luna rodeado por la corona era visible a través de las nubes, en la misma forma que suele verse algunas noches por entre las nubes, incluso cuando las estrellas no son visibles. No podíamos hacer otra cosa que procurar llevar a cabo el experimento, con la esperanza de conseguir algún resultado positivo. Un observador se ocupaba de cambiar rápidamente las placas, mientras otro les daba la exposición que precisaban con una pantalla colocada delante del espejo, con todo cuidado de evitar la menor oscilación en la orientación del telescopio.

" Seguíamos con todo interés el desarrollo del fenómeno. Sobre nosotros se producía un maravilloso espectáculo; como las fotografías revelarían más tarde, una llamarada gigantesca

* Ésta y otras citas del presente párrafo las tomamos del libro de PHILIP FRANK titulado "Einstein" y editado, en versión castellana de Eduardo de Guzmán, por JOSÉ JANÉS, Barcelona, 1949.

se alzaba cien mil millas por encima de la superficie del Sol. Pero no teníamos tiempo de mirarlo, concentrada nuestra atención en los aparatos. Nos dábamos cuenta tan sólo del oscurecimiento de los campos cercanos, del silencio sobrecogedor de la naturaleza, roto tan sólo por las llamadas de los observadores y por el batir del metrónomo que iba contando los 302 segundos de duración del fenómeno.

" Obtuvimos dieciséis fotografías, con tiempos de exposición que oscilaban entre los 2 y los 20 segundos. En las primeras fotografías no se veían estrellas... pero, al parecer, las nubes se debilitaron al final del fenómeno y en las últimas placas aparecieron algunas. En la mayoría, éstas o aquéllas de las estrellas esenciales quedaban ocultas y no podíamos utilizarlas; pero una de las placas mostraba magníficas imágenes de cinco estrellas, suficientes para llegar a una conclusión."

Las placas tomadas en la isla del Príncipe y en Sobral fueron luego medidas cuidadosamente en Inglaterra. Debe tenerse presente que los desplazamientos de las imágenes estelares en las placas son, como ya dijimos, del orden de los centésimos de milímetro, por lo cual, además de medirlas con toda precisión, deben tenerse en cuenta todas las posibles causas de error. La comunicación oficial de los resultados de las dos expediciones fué hecha en una reunión conjunta celebrada por la Royal Society y la Royal Astronomical Society de Londres el 6 de noviembre de 1919. El matemático y filósofo A. N. WHITEHEAD relata la sesión en los siguientes términos:

"Quiso mi buena fortuna que estuviera presente en la reunión de la Royal Society de Londres cuando el astrónomo real de Inglaterra anunció que las placas fotográficas del famoso eclipse, una vez medidas cuidadosamente por sus colegas del Observatorio de Greenwich, habían demostrado la predicción de Einstein de que los rayos de la luz son desviados al pasar por las cercanías del Sol. El aire de emoción que envolvía la escena era la misma de un drama griego. Nosotros éramos el coro comentando las consecuencias de una determinación del destino en el curso de un acontecimiento histórico. Dando mayor dramatismo y solemnidad al acontecimiento estaba el escenario: la ceremonia se efectuaba en el gran salón presidido por el retrato de Newton, que nos recordaba vivamente que el más grande de los científicos generalizadores acababa de sufrir ahora, dos siglos después de su muerte, la primera modificación seria de sus postulados. También había un interés puramente humano: era como si una gran aventura terminara llegando los protagonistas a puerto seguro.

" La esencia de la tragedia no es la desgracia. Reside en el inexorable curso de las cosas... Este curso inexorable es lo que procura conocer el pensamiento científico. Las leyes de la física son como las determinaciones del destino."

La sesión había sido abierta por J. J. THOMSON, entonces presidente de la Royal Society, el cual, al referirse a la teoría de Einstein, dijo:

"No es el descubrimiento de una isla remota sino de todo un continente de nuevas ideas científicas. Es el mayor descubrimiento respecto de la gravitación desde que Newton enunció sus principios."

Finalmente, el astrónomo real informó que las observaciones efectuadas en Sobral y en la isla del Príncipe daban una desviación de la luz igual a 1,64 segundos de arco para rayos tangentes al disco solar, mientras que la teoría había previsto el valor de 1,75. Por esta razón, terminó afirmando, "es concluyente que el campo gravitatorio del Sol produce la desviación anunciada por la teoría general de la relatividad de Einstein".

Insertamos a continuación una tabla que contiene las desviaciones observadas y calculadas correspondientes a siete estrellas cuyas imágenes aparecieron particularmente nítidas:

Número de la estrella	*Corrimiento en segundos de arco*				*Distancia mínima del rayo de luz al centro del Sol en radios solares*
	De Este a Oeste		*De Sur a Norte*		
	Observado	*Calculado*	*Observado*	*Calculado*	
11	— 0,19	— 0,22	+ 0,16	+ 0,02	8,0
5	— 0,29	— 0,31	— 0,46	— 0,43	3,3
4	— 0,11	— 0,10	+ 0,83	+ 0,74	2,4
3	— 0,20	— 0,12	+ 1,00	+ 0,87	2,0
6	— 0,10	+ 0,04	+ 0,57	+ 0,40	4,4
10	— 0,08	+ 0,09	+ 0,35	+ 0,32	5,3
2	+ 0,95	+ 0,85	— 0,27	— 0,09	2,1

En la fig. 145 se ha representado, en las abscisas, el valor inverso de la distancia angular de la estrella al centro del Sol. Como el radio angular del Sol es, aproximadamente, igual a 15′, donde se lea 30′, significa que el rayo proveniente de la estrella pasa a una distancia x del centro del Sol igual a 2 radios solares. En las ordenadas se representan las desviaciones en segundos de arco y los puntos corresponden a las observaciones de la tabla anterior, en tanto que la línea llena representa la desviación teórica.

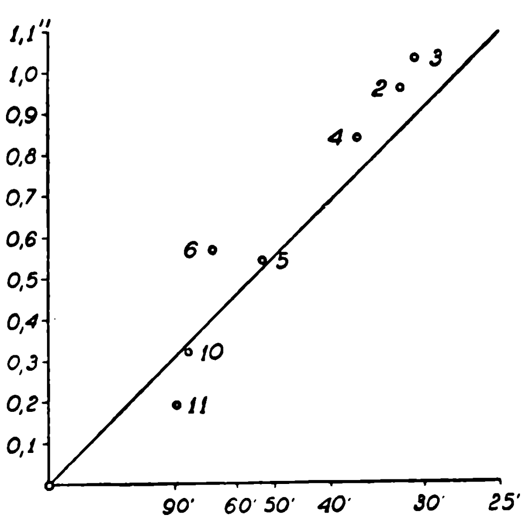


Fig. 145. — La desviación teórica (recta) comparada con las observaciones (puntos).

El resumen de las

medidas de las placas del eclipse del 29 de mayo de 1919 es el siguiente:

Sobral: 1″,98 ± 0″,12

Isla del Príncipe: 1″,61 ± 0″,30

En la fig. 146 se reproduce una fotografía tomada en el eclipse total de 1922 por una expedición a Australia organizada por el Observatorio Lick de la Universidad de California, habiéndose rodeado la imagen de cada estrella con un pequeño círculo. En la fig. 147 aparecen en escala las desviaciones observadas.

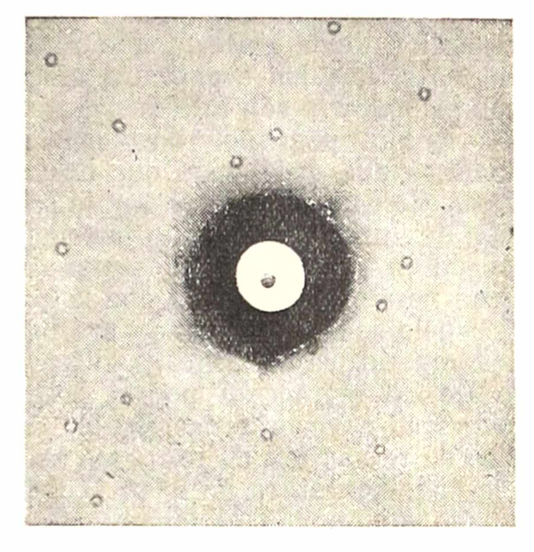


Fig. 146. — Negativo de una fotografía del eclipse total de 1922, donde aparecen la corona y las imágenes de las estrellas que se han marcado con pequeños círculos.

Es de advertir que la magnitud de este efecto es tan pequeña que los inevitables errores de observación adquieren, en la discusión de los resultados, un papel de particular importancia. Así, por ejemplo, en el eclipse del 9 de mayo de 1929, observado en el norte de Sumatra por una expedición enviada por el Observatorio de Potsdam, se llegó, en promedio, a obtener una desviación de 2″,24, resultado demasiado grande comparado con el teórico de 1″,75. Claro está que no es posible atribuir a errores de observación una diferencia de medio segundo de arco, pero debe tenerse presente que esos valores se refieren a lo que se observaría si la luz pasara rasante junto al disco del Sol. En otras palabras: el valor final se obtiene por extrapolación, después de

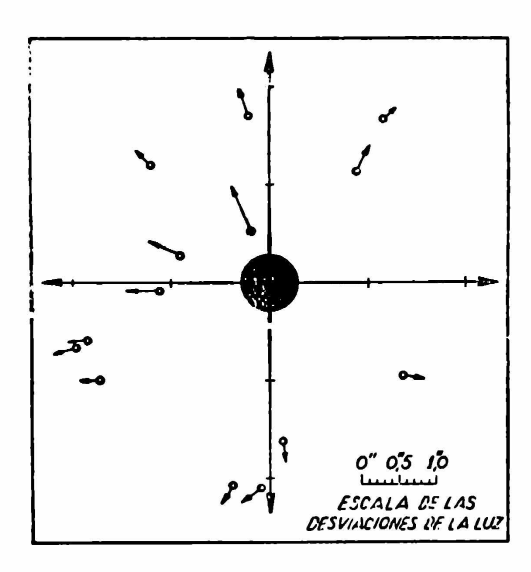


Fig. 147. — La longitud de las flechas representan en escala las desviaciones observadas de las imágenes estelares.

medir las desviaciones experimentadas por estrellas separadas del centro del Sol por distancias angulares que varían entre 30′ (2 radios solares) y 150′ (10 radios solares).

Consideremos ahora la influencia que podría ejercer la atmósfera que rodea al Sol sobre la marcha de un rayo de luz. En primer término, digamos que sobre las estrellas fotografiadas, cuyas imágenes están todas más allá de la corona solar, no se observa ningún efecto que pudiera ser atribuído a una absorción de la materia que rodea al Sol. Debe considerarse, entonces, que los eventuales efectos de refracción producidos por tal materia son totalmente nulos, pero como el efecto Einstein es muy pequeño, ¿no podría la tenue atmósfera solar producir alguna desviación que no fuera totalmente despreciable? Para contestar a esta pregunta, calculemos el índice de refracción que presumiblemente podemos atribuir a la atmósfera solar en su límite con la fotoesfera. Las observaciones astrofísicas permiten asegurar que la presión de la tal atmósfera en el "suelo solar" es, cuando mucho, de 10^{-4} atmósferas, y como la temperatura absoluta es allí de unos 6 000 grados Kelvin, el índice de refracción podría sobrepasar a la unidad en una magnitud cuyo orden sería sólo de 10^{-9}. Si llamamos n_0 al índice de refracción de un gas a la presión P_0 de una atmósfera y a la temperatura de 0° C, el índice de refracción n está vinculado a n_0 por la relación:

$$n - 1 = \frac{n_0 - 1}{\alpha T} \frac{P}{P_0} ,$$

donde α es el coeficiente de dilatación de los gases, T la temperatura absoluta y P la presión. De acuerdo con esto y considerando que $n_0 = 1{,}0003$ (índice de refracción del aire), se obtiene con los datos dados más arriba

$$n - 1 = 1{,}4 \times 10^{-9}.$$

Debemos comparar ahora este valor con el "índice de refracción" originado por la variación de la velocidad de la luz en el campo gravitatorio. La [83] da el valor de la velocidad de la luz y haciendo en ella $y = 0$ se tiene:

$$\text{“}n\text{”} = \frac{c}{V} = \frac{1}{1 - \dfrac{r_0}{2r}} = 1 + \frac{r_0}{2r}$$

de donde resulta, para la superficie del Sol, aproximadamente:

$$\text{“}n\text{”} - 1 = 2 \times 10^{-6}.$$

Por lo tanto, el efecto Einstein, a pesar de su pequeñez, es, por lo menos, 1 000 veces mayor que el efecto de refracción de la atmósfera solar que, como decíamos antes, debe considerarse totalmente nulo.

C) Corrimiento hacia el rojo de las líneas espectrales

133. Corrimiento de las líneas espectrales del Sol. — La fórmula [96] del párrafo 120 relaciona la marcha de dos relojes colocados en un campo gravitatorio, originado por una única masa M, a las distancias r_1 y r_2 de dicha masa. Si despreciamos las potencias de r_0 de grado superior al primero, aquella fórmula podrá escribirse:

$$[86] \qquad \frac{dt_1}{dt_2} = \left(1 - \frac{r_0}{2r_1}\right)\left(1 + \frac{r_0}{2r_2}\right) = 1 - \frac{r_0}{2r_1} + \frac{r_0}{2r_2} .$$

Si suponemos que el índice 1 se refiere a la superficie del Sol y el 2 a un lugar del campo solar cuya distancia al centro del Sol sea igual a la distancia Sol-Tierra, la [86] relacionará la marcha de dos relojes idénticos situados uno en el Sol y otro en la Tierra. Esto no es del todo exacto por dos razones: 1º), el reloj terrestre está sometido a la influencia del campo gravitatorio terrestre; 2º), debido a la traslación de la Tierra, los dos relojes no se encuentran en reposo relativo.

La variación de la marcha debido a la segunda causa es la que corresponde a un efecto Doppler transversal (§ 40, fórmula 37), cuando la velocidad relativa es, aproximadamente, de 30 km/seg. Esto produce un desplazamiento relativo y *recíproco* de las líneas, hacia el rojo, del orden de 10^{-8} que es, como veremos, unas cien veces menor que el efecto que estamos tratando. En lo referente a la primera causa, el campo gravitatorio terrestre produce un efecto que es todavía mucho menor, por lo cual la fórmula a verificar sería la [86]. En ésta, si r_1 es el radio R del Sol y r_2 el radio de la órbita terrestre, el último término de la [86] es unas 200 veces menor que el precedente, por lo cual pondremos, simplemente:

$$[87] \qquad \frac{t_{(\mathrm{Sol})}}{t_{(\mathrm{Tierra})}} = 1 - \frac{r_0}{2\mathrm{R}} .$$

La relación entre estos tiempos debe ser la misma que la relación entre las frecuencias de átomos idénticos colocados en el Sol y la Tierra, respectivamente. Los átomos constituyen, así, relojes naturales distribuídos por todo el universo y cuya marcha puede compararse espectroscópicamente con los relojes similares a ellos y que ponemos en marcha en nuestros laboratorios, dándoles cuerda con una descarga eléctrica o encendiendo una llama. Siendo, entonces, ν_s y ν_T las frecuencias correspondientes a una línea determinada de una especie particular de átomo, cuyas longitudes de onda son λ_s y λ_T, refiriéndose los índices al Sol y a la Tierra, respectivamente, se tendrá

[88] $$\frac{\nu_s}{\nu_T} = \frac{\lambda_T}{\lambda_s} = 1 - \frac{r_0}{2R}$$

de donde,

[89] $$\frac{\lambda_s - \lambda_T}{\lambda_s} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{r_0}{2R} = \frac{GM}{c^2R} .$$

Como, aproximadamente, para el caso del Sol es $r_0 = 3$ km y R = 700 000 km, resulta

[90] $$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \cong 2 \times 10^{-6}.$$

Para λ igual a 6 000 unidades angstrom se obtiene un desplazamiento de sólo 0,012 Å. Este desplazamiento hacia el rojo, pues $\lambda_s > \lambda_T$, es, desgraciadamente, tan pequeño, que se necesita tomar toda clase de precauciones para poder revelarlo. Dicho corrimiento es igual al que se produciría, a causa del efecto Doppler, si la fuente se alejara del observador con una velocidad V tal, que:

$$\frac{V}{c} = 2 \times 10^{-6} \quad ; \quad V = 0{,}6 \frac{\text{km}}{\text{seg}} .$$

A causa del movimiento de traslación de la Tierra sobre una elipse, nos acercamos y nos alejamos periódicamente del Sol, y por esta razón se produce un desplazamiento de las líneas espectrales que debe tenerse muy en cuenta, pues *es del mismo orden del que se busca.* En efecto: si derivamos respecto del tiempo la [34], se obtiene

$$\frac{dr}{dt} = \frac{pe \operatorname{sen} \varphi}{(1 + e \cos \varphi)^2} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{e \operatorname{sen} \varphi}{p} r^2 \frac{d\varphi}{dt}$$

que teniendo en cuenta [33], [21], [35] y [37], da:

[91] $$\frac{dr}{dt} = \frac{2\pi a}{T} . \frac{e}{\sqrt{1 - e^2}} . \operatorname{sen} \varphi .$$

El primer factor es, aproximadamente, igual a 30 km/seg; el segundo, 1/60, que es la excentricidad de la órbita terrestre, por lo cual, la velocidad radial de la Tierra será:

[92] $$V_{(radial)} = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \varphi \left[\frac{\text{km}}{\text{seg}} \right] .$$

De acuerdo con esto, como la Tierra pasa por el perihelio en las proximidades del 1 de enero, a fines de marzo ($\varphi = \pi/2$), las líneas espectrales del Sol experimentarán, por efecto Doppler, el máximo desplazamiento hacia el rojo, correspondiente a una velocidad de alejamiento de 0,5 km/seg, y a principio de octubre se correrán en cambio hacia el violeta. Tampoco

puede despreciarse el efecto Doppler originado por la rotación de la Tierra, puesto que un punto del ecuador terrestre se mueve a razón de 0,46 km/seg y, por lo tanto, si se observa el espectro solar en horas de la mañana, las líneas aparecen algo corridas hacia el violeta y al atardecer hacia el rojo.

A pesar de todas estas dificultades, el efecto pudo ser comprobado. Así, por ejemplo, para el doblete D del sodio, de acuerdo con la teoría, debe producirse un corrimiento igual a 0,0125 unidades angstrom y el resto del corrimiento observado, después de descontar el producido por el movimiento relativo de la Tierra y el Sol fué, según una comunicación del año 1938, de J. EVERHED, de 0,0134 angstrom.

El lector no debe dejarse impresionar, sin embargo, por el hecho de que se escriban los resultados con tres cifras significativas y hasta los decimilésimos de angstrom. Además de las correcciones debidas al movimiento relativo que hemos mencionado, debe tenerse en cuenta la diferencia de presión entre la fuente solar y terrestre y, además, el ancho natural de las líneas espectrales que, lejos de ser despreciable, es del mismo orden del desplazamiento que se busca.

134. Comprobación del efecto en las enanas blancas. — Los astrónomos descubrieron, a partir de 1920, algunas estrellas de débil brillo y alta temperatura en su superficie. La mejor estudiada de todas ellas es el satélite de Sirio llamado "compañera de Sirio". El movimiento del sistema formado por Sirio y su acompañante permite determinar la masa *m* del satélite, que resultó ser casi igual que la masa M de nuestro Sol. Precisamente:

$$m = 0{,}85 \, . \, \mathrm{M} .$$

La naturaleza del espectro permite, además, determinar la temperatura efectiva en la superficie de esa estrella, que resulta ser de unos 8 000 grados. La temperatura de nuestro Sol, una estrella amarilla bastante mediocre, es de sólo 6 000 grados, por lo cual, la estrella que nos preocupa será una "estrella caliente" de color blanco, que irradiará mucho más energía que nuestro Sol, por centímetro cuadrado de superficie. Si nuestro Sol estuviera situado a una distancia de la Tierra igual a 10 parsec (32,6 años-luz), brillaría como una débil estrella de quinta magnitud (exactamente 4,85). El satélite de Sirio llevado a esa misma distancia brillaría todavía mucho más débilmente, pues sería percibido como una estrella de undécima magnitud (11,20). ¿Cómo es posible que teniendo una masa casi igual a la del Sol e irradiando mucha más energía que éste por centímetro cuadrado de superficie, la cantidad total de luz que emite sea tan pequeña? La única explicación posible es que su superficie total debe ser, comparativamente, in-

significante. Efectuando los cálculos, se halla de este modo el radio de la estrella y se encuentra que el mismo debe tener el valor

$$R = 19\,600 \text{ kilómetros},$$

que es unas 35 veces menor que el radio de nuestro Sol. Conociendo la masa y el radio se determina la densidad media y se encuentra que la tal densidad debe ser igual a 53 000 gramos por centímetro cúbico. Si ésta es la densidad media, es presumible que en el centro de la estrella tengamos que vernos con densidades del orden de las toneladas por centímetro cúbico y, en consecuencia, debemos pensar que allí los átomos estarán casi totalmente ionizados para permitir, de ese modo, la convivencia de los núcleos atómicos en tan estrecha vecindad.

De acuerdo con la [89], el desplazamiento de las líneas espectrales provenientes de la luz emitida por una estrella determinada es proporcional a la masa de la misma y está en razón inversa de su radio. Según esto, y de acuerdo con los datos dados más arriba, cabe esperar que las líneas del espectro del satélite de Sirio experimenten un corrimiento hacia el rojo 30 veces ($0{,}85 \times 35$) mayor que el experimentado por las líneas que se originan en el Sol. Para la línea D del sodio habrá que esperar un corrimiento de 0,37 angstrom. Las medidas fueron llevadas a cabo inicialmente por W. S. ADAMS, utilizando el telescopio de 100 pulgadas del Observatorio de Mount Wilson y las mismas confirmaron plenamente las previsiones teóricas, pues el desplazamiento observado resultó ser del mismo orden y del mismo sentido que el previsto.

135. **Deducción cuántica del corrimiento hacia el rojo.** — Llamemos ν_0 a la frecuencia de determinada línea espectral correspondiente a determinado átomo. Estamos ahora en el marco de la mecánica newtoniana con un espacio y un tiempo absolutos. Los átomos de la misma clase, situados en cualquier parte, vibran exactamente de la misma manera. En particular, si dos átomos idénticos se encuentran, uno en el Sol y otro en la Tierra, su frecuencia, correspondiente a determinada línea, será en ambos casos la misma: ν_0. Pero el fotón que proviene del Sol y llega hasta la Tierra debe vencer la acción del campo gravitatorio solar y parte de su energía será empleada en remontar la cuesta del potencial gravitatorio. Si la frecuencia con que llega a la Tierra es ν, la pérdida de energía será:

$$h\nu_0 - h\nu$$

siendo h la constante de Planck. Esta pérdida de energía será igual a la diferencia de potencial entre el punto inicial y final del recorrido multiplicada por la masa del fotón, que, como sabemos, es igual a su energía dividida por el cuadrado de la

velocidad de la luz. Si llamamos r_1 y r_2 a las distancias inicial y final del fotón al centro de la masa M, se tendrá

$$[93] \qquad h(\nu_0 - \nu) = \left(\frac{GM}{r_1} - \frac{GM}{r_2}\right) \frac{h\nu_0}{c^2}$$

de donde

$$\frac{\nu_0 - \nu}{\nu_0} = \frac{GM}{c^2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Si hacemos $r_2 = \infty$ y $r_1 = R$ y tenemos en cuenta que la longitud de onda λ está vinculada a la frecuencia por la relación $\lambda = c/\nu$, obtenemos

$$[94] \qquad \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda} = \frac{GM}{c^2 R}$$

que coincide con la [89]. En esta deducción se ha cometido una pequeña incorrección, pues para la masa del fotón viajero tomamos, en [93], su masa inicial. Como la energía del fotón va variando a lo largo del recorrido, su masa también es variable y la ecuación que habrá que integrar es:

$$[95] \qquad d(h\nu) = -\frac{GM}{r^2}\frac{h\nu}{c^2}\,dr$$

de la cual resulta:

$$\nu_0 = \nu e^{\frac{GM}{c^2 R}},$$

y desarrollando y limitándonos a considerar términos de primer grado en el coeficiente de 1/R, se obtiene

$$[96] \qquad \frac{\nu_0 - \nu}{\nu} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{GM}{c^2 R},$$

que, prácticamente, coincide con [94] y [89] *.

136. La variación del tiempo con la altura y la aceleración de la gravedad. — A pesar del título del presente capítulo no nos referiremos en este párrafo a una prueba experimental más de la teoría general de la relatividad. Pero, como ya sabemos que se ha comprobado experimentalmente que la marcha de un reloj depende del campo gravitatorio donde él se encuentra, estudiaremos aquí, en forma concreta, la marcha de dos relojes idénticos situados en el campo gravitatorio terrestre y a diferente altura. En el párrafo 121 se hizo notar que los cuerpos tienden a caer dirigiéndose hacia los lugares donde los relojes marchan más despacio, o sea hacia donde el tiempo transcurre más lentamente. Aquí nos ocuparemos de relacio-

---

* Véase § 155.

nar la aceleración de caída en un lugar determinado con la variación de la marcha de los relojes en las inmediaciones de ese lugar.

Si en la [95] del párrafo 120 suponemos t = constante, la variación del tiempo t' con r, para un incremento dr de la distancia al centro de la masa que produce el campo, es:

[97] $$\mathrm{d}t' = t\frac{r_0}{r^2}\frac{1}{2\sqrt{\gamma}}\mathrm{d}r.$$

Teniendo en cuenta el valor de r_0 e indicando con el índice 2 al reloj que está más alto y con el 1 al que está en el nivel de origen, se tendrá

[98] $$\frac{t'_2 - t'_1}{t} = \frac{\mathrm{GM}}{c^2 r^2}\mathrm{H}' \quad ,$$

siendo H′ la diferencia de altura natural entre ambos puntos igual, por la [79] del párrafo 120, a $\mathrm{d}r/\sqrt{\gamma}$. El tiempo t que figura en las fórmulas precedentes es el indicado por un reloj colocado fuera del campo, en el infinito, y por ser

$$t'_1 = t\sqrt{\gamma}$$

la [98] podrá escribirse:

[99] $$\frac{t'_2 - t'_1}{t'_1} = \frac{\mathrm{H}'}{c^2}\frac{\mathrm{GM}}{r^2}\frac{1}{\sqrt{\gamma}}.$$

La aceleración de caída en el campo vimos que era (fórmula 118 del § 104) para una velocidad inicial igual a cero:

[100] $$g = \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\mathrm{GM}}{r^2}\gamma.$$

Ésta es la aceleración medida desde el exterior del campo, desde el infinito, pero no es la aceleración natural, la medida con reglas y relojes situados en el campo mismo. Indicando, como lo estamos haciendo, con letras acentuadas a los valores naturales, ya sabemos que es

$$\mathrm{d}r = \mathrm{d}r'\sqrt{\gamma} \quad ; \quad \mathrm{d}t = \mathrm{d}t'/\sqrt{\gamma}$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r'}{\mathrm{d}t'}\gamma \quad ,$$

y derivando con respecto al tiempo, para $\mathrm{d}r'/\mathrm{d}t' = 0$, o sea que lo que buscamos es la aceleración en reposo. se tendrá

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2 r'}{\mathrm{d}t'^2}\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}\gamma = \frac{\mathrm{d}^2 r'}{\mathrm{d}t'^2}\gamma^{3/2}$$

de donde, por la [100], resulta

[101] $$g' = \frac{d^2r'}{dt'^2} = -\frac{GM}{r^2}\frac{1}{\sqrt{\gamma}},$$

con lo cual la [99] podrá escribirse:

[102] $$\frac{t'_2 - t'_1}{t'_1} = -\frac{g'H'}{c^2},$$

fórmula en la cual intervienen sólo valores naturales y que vale para diferencias de altura H′ relativamente pequeñas. Obsérvese que si H′ es positivo, como g' es negativo, el segundo miembro será positivo y el reloj colocado más alto adelantará ($t'_2 > t'_1$) con respecto al que se encuentra más bajo. De acuerdo con la [102], parecerá que disponemos de un método muy sencillo para verificar la teoría, pues bastaría para ello comparar la marcha de dos relojes situados sobre la misma vertical y a diferente altura. Pero si H′ es igual, por ejemplo, a 10 metros, para que el reloj situado en lo alto le sacara un segundo de ventaja al otro, habría que esperar un tiempo

$$t'_1 = 1 \text{ seg} \times \frac{c^2}{g'H'} = 9{,}2 \times 10^{14} \text{ seg} = 29{,}1 \times 10^6 \text{ años},$$

o sea casi treinta millones de años. Y no obstante, es esa pequeña diferencia de tiempo, y no otra cosa, la que hace caer a los cuerpos en un campo gravitatorio.

Si del tosco tic tac de un reloj común, pasamos a considerar los latidos de un átomo y sustituímos en [102] los tiempos por las frecuencias, encontramos que para la línea D del sodio, por ejemplo, el átomo situado en lo alto efectúa cada 2 segundos (exactamente cada 1,8 seg) una pulsación más que el que está colocado 10 metros más abajo.

D) Otras maneras de explicar los tres efectos cruciales

137. Las teorías de George D. Birkhoff y Godofredo García. — En el párrafo 84 hicimos notar que la adopción, para el espacio físico, de una u otra geometría, es un asunto que, al final de cuentas, se reduce a una mera convención. Lo mismo cabe decir de la geometría de la variedad espacio-tiempo de cuatro dimensiones. Salvo los tres efectos que estudiamos en este capítulo, la teoría de la gravitación de Einstein coincide con la de Newton. Supongamos que la coincidencia fuera perfecta o que ninguno de esos efectos hubiera podido verificarse. En tal caso, diríamos: Si se supone que para el espacio vale la geometría de Euclides, la experiencia prueba que los cuerpos se atraen con una fuerza dada por la ley newtoniana, si se toma como sistema de referencia el de las estrellas fijas y res-

pecto del cual todos los relojes en reposo en tal sistema pueden hacerse marchar sincrónicamente en el sentido de la relatividad restringida. Ese sistema de las estrellas fijas y esos relojes sincronizados reemplazan al espacio y al tiempo absolutos de la mecánica newtoniana. Pero también podría decirse: *Si se supone* que la fuerza de atracción es nula, la experiencia prueba que la geometría del espacio-tiempo no es euclídea.

¿Qué ventaja tendría, en tal caso, una teoría sobre la otra? Ésta es una cuestión extracientífica, perteneciente, quizás, al dominio de la estética. De la teoría newtoniana podría decirse que, al adoptar *por hipótesis* la geometría euclídea, elige para la descripción de los sucesos un marco más simple y más de acuerdo con nuestros hábitos mentales, originados por nuestra experiencia cotidiana en el mundo de dimensiones medias. Como contrapartida de la simplicidad del marco elegido aparece esa misteriosa fuerza, tan misteriosa que, Newton mismo, no se atrevió nunca a decir "los cuerpos se atraen", limitándose prudentemente a afirmar: "los cuerpos se comportan como si se atrajeran".

La segunda teoría postula que la fuerza es nula, y nos libera así del vestigio antropomórfico que implica la noción de fuerza. Resulta más económica desde el punto de vista lógico, pues sólo admite la validez del principio de inercia generalizado, con lo cual puede dar cuenta de inmediato de la proporcionalidad observada entre las masas pesantes e inertes. Pero la geometría que utiliza no es la del viejo Euclides, sino la del joven Riemann.

Cuando Einstein comenzó sus investigaciones sobre la teoría general de la relatividad, esperaba encontrar que con ella podría dar una explicación de la ley de Newton. Es decir que, aun suponiendo que la nueva teoría coincidiera totalmente con la newtoniana en cuanto a los resultados, consideraba que valía la pena el sacrificio de la geometría de Euclides.

Pero no todos son de la misma opinión. Entre los años 1943 y 1944, G. D. BIRKHOFF propuso una nueva teoría de la gravitación, en la que se conservaba la geometría de Euclides y en la cual los cuerpos se atraen con una fuerza que es ligeramente diferente de la newtoniana y que se hace depender también de la velocidad. La nueva teoría fué desarrollada posteriormente por los discípulos de BIRKHOFF de la escuela mejicana: C. GRAEF FERNÁNDEZ, A. BARAJAS, F. ALBA ANDRADE, M. MOSHINSKY y otros *.

En la nueva teoría se comienza por aceptar la teoría restringida de la relatividad de Einstein, pero no la generalizada.

* Véase la bibliografía en la publicación del "Centro de cooperación científica de la Unesco para América Latina": "Symposium sobre algunos problemas matemáticos que se están estudiando en Latino-América" - Punta del Este, Uruguay, diciembre 1951; donde aparece la comunicación de Carlos Graef Fernández sobre la teoría de Birkhoff.

El marco que se adopta es el espacio-tiempo *llano* de Minkowsky, o sea un sistema de coordenadas inercial respecto del cual las geodésicas de los cuerpos materiales libres, sobre los que no actúen fuerzas, son rectas. Ese sistema espacial de coordenadas es el sistema de las estrellas fijas que se usa habitualmente en astronomía. Claro está que en tal sistema los planetas no describen geodésicas, pero ello se debe a que sobre los mismos actúa constantemente una fuerza que los aparta del camino rectilíneo, al igual que en la teoría newtoniana. Se trata ahora de encontrar la expresión de esta fuerza. Para ello se acepta también el principio de equivalencia de Einstein, de acuerdo con el cual, en el entorno de un punto de universo de un campo gravitatorio, es posible elegir siempre un sistema de coordenadas respecto del cual las geodésicas de las partículas libres, pero sometidas a la acción del campo, sean rectas. Este sistema de coordenadas es el de la caja de Einstein que va cayendo libremente y respecto de la cual, las partículas próximas que caen también junto con la caja, o están en reposo o se mueven en línea recta y con movimiento uniforme. Si designamos por letras acentuadas x'_h (x'_0, x'_1, x'_2, x'_3) a las coordenadas fijas a la caja en caída libre (sistema geodésico, pág. 326), en la proximidad del punto de universo A, las ecuaciones de movimiento de una partícula próxima a A y sometida a la acción del campo serán:

[103] $$\left(\frac{d^2x'_h}{ds^2}\right)_A = 0.$$

Claro está que estas coordenadas acentuadas son curvilíneas respecto del sistema inercial x_h. Ciertas funciones permitirán pasar de las x'_h a las x_h y se encuentra que en el sistema inercial, no acentuado, las ecuaciones de movimiento de la partícula serán:

[104] $$\frac{d^2x_h}{ds^2} = -\left\{ \begin{matrix} i\ k \\ h \end{matrix} \right\} \frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds}$$

o sea las ecuaciones de las geodésicas en un espacio curvo. Pero Birkhoff interpreta la [104] como si el segundo miembro de la misma representara las componentes de la fuerza en forma análoga a lo que ocurre en la teoría newtoniana. En realidad, se trata de aceleraciones y no de fuerzas. Para obtener estas últimas habrá que multiplicar por la masa de la partícula móvil. Pero para calcular con la [104] la trayectoria de una partícula en un campo gravitatorio, hace falta conocer las 10 componentes del tensor g_{ik}. En la teoría de Newton, el potencial newtoniano es un escalar y es necesario construir con él un tensor de segundo orden de modo que se puedan aplicar las [104]. *Se postula,* entonces, que el tensor que caracte-

riza totalmente al campo, en el caso de que el mismo esté originado por una única masa M en reposo respecto del sistema inercial, sea el potencial newtoniano por la delta de Kronecker doblemente covariante *. *Es necesario postular, además,* que las fuerzas gravitacionales son combinaciones lineales de las derivadas parciales primeras del tensor potencial. Con esto ya es posible calcular las trayectorias en un campo central y se obtienen de ese modo las elipses keplerianas, cuyo perihelio se va desplazando de acuerdo con la fórmula de Einstein. Para la desviación de los rayos de luz se obtiene también la fórmula de Einstein, considerando para ello una familia de partículas de la misma energía y cuya velocidad tiende a la de la luz.

El corrimiento hacia el rojo de las líneas espectrales se explica, en esta teoría, en forma análoga a como lo hemos hecho en el párrafo 135.

Pero lo que no explica la teoría de Birkhoff y lo que no puede explicar por su propia naturaleza, es la rigurosa proporcionalidad entre las masas pesantes e inertes de todos los cuerpos. Tampoco se entiende la razón del porqué, para explicar el mismo fenómeno, se utilicen dos causas diferentes: en el ascensor de Einstein, que se mueve con movimiento acelerado respecto de un sistema inercial, el "peso" es una fuerza de inercia y en un campo gravitatorio sería, en cambio, una fuerza auténtica de atracción. Y esta doble explicación, originada a causa de no aceptarse el principio general de la relatividad, es tanto más chocante después de haber utilizado en la formulación de la teoría el propio principio de equivalencia. Pero como al fin y al cabo, lo que se le debe pedir a una teoría científica es que dé cuenta de los hechos experimentales en forma simple, es posible, a pesar de todo, de que la teoría de Birkhoff ofrezca en ciertos aspectos grandes ventajas. Así se expresa Graef Fernández cuando dice: "Para desarrollos ulteriores tiene la teoría de Birkhoff la enorme ventaja de la simplicidad de la geometría del espacio-tiempo llano de Minkowsky, comparada con lo terriblemente complejo de la geometría del espacio-tiempo curvo de cuatro dimensiones".

Poco tiempo después de conocerse la teoría de Birkhoff, el matemático y físico peruano GODOFREDO GARCÍA formuló la teoría de gravitación ** con la cual se explican también los tres efectos cruciales que estudiamos en el presente capítulo.

En la teoría de García se conserva el espacio euclídeo, pero se admite que la componente g_{00} del tensor fundamental pueda depender de las coordenadas, según sea la distribución de la materia en el espacio. En otros términos, el espacio es eucli-

* A partir del delta de Kronecker δ^h_k (VII, [50]) que es un tensor *mixto*, se puede formar el tensor $\Delta_{ik} = g_{ih}\,\delta^h_k$, que es doblemente covariante, pero que, en general, no es un delta de Kronecker propiamente dicho.

** G. GARCÍA, *La nueva teoría de la relatividad general*, en la misma publicación de la Unesco que citamos en este mismo párrafo.

deo, pero el tiempo es curvo. Adopta como ley fundamental de partida la siguiente expresión vectorial:

[105] $$\mathrm{f} = \frac{1}{c^2}\left[\mathrm{V} \wedge (\mathrm{F} \wedge \mathrm{V})\right]$$

en la cual f es el cuadrivector de inercia cuyas cuatro componentes son las derivadas segundas de las coordenadas respecto de s; V es el cuadrivector de la velocidad de la partícula cuyas componentes son las derivadas primeras de las coordenadas respecto también de s; y, por último, F es la fuerza que el campo ejerce sobre la partícula por unidad de masa y que se identifica con la fuerza newtoniana. De este modo, siendo

[106] $$ds^2 = g_{00}c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

se encuentra que, para un campo originado por una única masa M, es:

[107] $$g_{00} = 1 - \frac{2GM}{c^2r}$$

que coincide con el valor einsteiniano. Esto ya da el corrimiento hacia el rojo de las líneas espectrales y si se escriben las ecuaciones diferenciales escritas implícitamente en [105], de su integración se deducen las fórmulas de Einstein para la desviación de los rayos de luz y el corrimiento de los perihelios de las órbitas. Las geodésicas de la [106] dan las elipses keplerianas, pero no esos corrimientos que se originarían por la acción de una fuerza suplementaria. Por ser esta acción insignificante, en la teoría de García se explicaría también, como en la de Einstein, la rigurosa proporcionalidad observada entre las masas pesantes e inertes de todos los cuerpos. Tiene la ventaja, además, de conservar la geometría euclídea para el espacio, pero, a pesar de ello, seguimos creyendo que la teoría de Einstein es lógicamente más simple y, por lo tanto, más bella.

Tanto de la teoría de Birkhoff como de la teoría de García, puede decirse que han sido construídas *a posteriori*, después de conocer los resultados de la teoría einsteiniana. No puede negarse que se trata de ingeniosas construcciones, que pueden llegar a ser muy útiles dado el aparato matemático relativamente simple que utilizan; pero si hemos de expresarnos con entera sinceridad, creemos que los postulados de partida carecen en las mismas de la fuerza de convicción necesaria, en el sentido do de que es difícil concebir que cualquiera de ellas hubiera podido aparecer antes de la teoría de la gravitación de Einstein.

El verdadero y gran mérito de estas teorías reside fundamentalmente, de acuerdo con nuestra modesta opinión, en que aclaran en forma concreta el viejo problema que, desde la época de Poincaré, se conoce con el nombre de "relatividad de la geometría".

CAPÍTULO X

PRINCIPIO DE LA VELOCIDAD PARABÓLICA *

DEDUCCIÓN DIRECTA DE LOS TRES EFECTOS CRUCIALES DE LA TEORÍA DE LA GRAVITACIÓN DE EINSTEIN

138. Los dos enunciados originales del principio de equivalencia y una cuestión que ha quedado sin respuesta. — En el párrafo 76 nos hemos referido al primer enunciado de Einstein, de 1911, de su principio de equivalencia, y en el 86 tratamos de la segunda forma que el mismo Einstein da a su principio en 1916. Ambos enunciados no son totalmente coincidentes entre sí.

Si Q es una pequeña región de un campo gravitatorio, K un sistema inercial y K′ otro sistema que se mueve con respecto a K con movimiento uniformemente acelerado, en el

primer enunciado se relaciona Q *con* K′,

en tanto que en el

segundo enunciado se relaciona K *con* K′.

En ambos enunciados se emplea la misma palabra: *equivalencia*. Pero en el primero esa palabra tiene el sentido de *comportamiento idéntico*, en tanto que en el segundo significa que las leyes fundamentales deben tener la misma forma referidas a K o referidas a K′. El sistema inercial K y el sistema no inercial K′ se comportan de modo diferente, aunque en los dos valga la misma ley. La palabra equivalencia del segundo enunciado podría hacerse corresponder al concepto de *covariancia*. En el párrafo 123 nos ocupamos extensamente de la necesidad, de distinguir entre comportamiento idéntico y equivalencia,

* Las ideas fundamentales acerca del principio establecido y que hemos denominado "principio de la velocidad parabólica" fueron expuestas por el autor en varias reuniones científicas. La primera comunicación fué hecha en marzo de 1953 en el *Instituto de Física de la Facultad de Ingeniería de Montevideo*. Desde entonces y hasta el día de hoy hemos ido exponiendo las consecuencias más importantes del mismo en reuniones de la *Asociación Física Argentina* y de la *Unión Matemática Argentina*. Durante el año 1953 desarrollamos sobre el tema un cursillo en la *Facultad de Ingeniería* de la *Universidad Nacional de Cuyo* (San Juan, Rep. Argentina) y un resumen de las ideas básicas así como de las consecuencias más importantes fué publicado en las Actas de la Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Lima (Perú) en agosto de 1954. (E. Loedel, Deducción directa de los tres efectos cruciales de la teoría de la gravitación de Einstein a partir del principio de la velocidad parabólica, año XVII, volumen XVII, págs. 1 a 38).

cuando se le da a esta palabra el significado que tiene en el segundo enunciado.

En el primer enunciado, Einstein da una respuesta, que sólo puede considerarse *como provisional,* a la cuestión:

¿Cómo debe moverse K′ *con respecto a* K *para que se comporte de manera idéntica que* Q?

La respuesta provisional de Einstein a esta cuestión, dada en su enunciado de 1911, reza así:

K′ *debe moverse respecto de* K *con movimiento uniformemente acelerado y aceleración igual a la aceleración de caída de los cuerpos en la región* Q.

Einstein sabía perfectamente que esta respuesta sólo podía tener carácter provisional desde el momento que aplica al sistema K′ la dinámica newtoniana (para "no complicar las cosas") y no la dinámica de la relatividad restringida que él mismo había creado seis años antes. Lo que importaba allí era mostrar que se podía crear un campo gravitatorio introduciendo un movimiento acelerado del sistema de referencia, y dado que los observadores del sistema K′ pueden suponerse en reposo *con el mismo derecho* que los de K, a condición de suponer que actúa un campo gravitatorio, se pasa de ese modo, como lo hizo Einstein cuatro años más tarde, al segundo enunciado:

K′ *y* K *deben ser equivalentes para la formulación de las leyes fundamentales de la naturaleza.* Ya sabemos en qué forma brillante busca y encuentra esa ley fundamental que se expresa por diez ecuaciones diferenciales de segundo orden (la anulación de las diez componentes del tensor de Ricci).

Se tiene así, simultáneamente, una teoría general de la relatividad aplicable a cualquier clase de movimientos y una teoría completa del campo gravitatorio. Pero, con todo, la cuestión inicial ha quedado sin recibir una respuesta definitiva.

En el presente capítulo se tratará de responder en forma precisa a la cuestión del comportamiento idéntico entre una pequeña región Q, concreta, de un campo gravitatorio y el sistema o la caja K′ de Einstein que se mueve de cierta manera respecto de un sistema inercial K. Con esto no se hace más que seguir el camino abierto por el mismo Einstein en 1911, y se verá que, permaneciendo fieles al espíritu del primer enunciado, se logra, de una manera extraordinariamente sencilla, *geometrizar* un campo cualquiera, pudiéndose, además, encontrar *las ecuaciones exactas* de las trayectorias de partículas o rayos de luz en campos centrales de la más variada naturaleza, sin necesidad de hacer uso de las ecuaciones de las geodésicas ni utilizar para nada el cálculo diferencial absoluto.

139. Imposibilidad de un comportamiento idéntico permanente entre Q y K'. — Supondremos que la pequeña región Q pertenece a un campo gravitatorio estático cuyo comportamiento no depende del tiempo. En otros términos: si en la región Q se suspende un cuerpo mediante un resorte, se observará que el peso del cuerpo se mantiene constante. Supondremos, además, que el campo está generado por masas que se encuentran en reposo relativo y situadas todas ellas en una región finita.

Según esto, a distancia suficientemente grande de las masas tendremos una región galileana donde vale la relatividad restringida. Pensaremos que nos instalamos en esta región galileana. Allí tomamos un sistema de coordenadas K que es un sistema inercial por lo menos para los puntos de la región galileana. En la fig. 148 se ha supuesto, para fijar ideas, que el campo está generado por la única masa M. En este caso, el campo tendrá simetría esférica. Cada punto o cada región del mismo estará caracterizado por ciertos valores. En la teoría de Newton, estos valores son el potencial y el gradiente del mismo, que mide la aceleración.

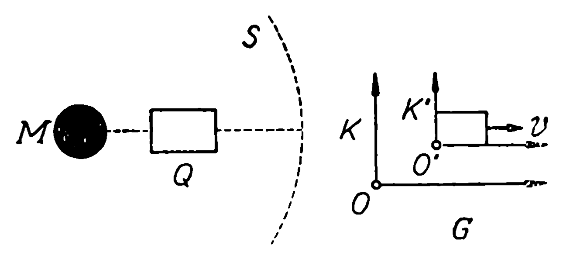


Fig. 148. — En la región galileana G se quiere reproducir lo que pasa en Q por el movimiento acelerado de K'.

Admitiremos que si se dan de antemano valores característicos del campo, arbitrariamente pequeños, existirá siempre una superficie S, en el caso de la figura una superficie esférica, tal que, en el exterior de la misma, los valores que caracterizan al campo serán menores que los fijados de antemano. La región exterior a la superficie S donde el campo podrá considerarse nulo, es, entonces, una región galileana G. En ella tenemos el sistema de coordenadas K, que es un sistema inercial y respecto del cual la masa M está en reposo. No importa que la parte interior limitada por S no sea galileana: desde K podrá saberse siempre si una partícula de esa región se mueve o está en reposo respecto de K. Del mismo modo, desde K podrá observarse lo que pasa en una región Q cualquiera del campo, y en reposo con respecto a K y a la masa M. En Q, un cuerpo suspendido por un resorte produce en él cierto estiramiento y un hilo se mantiene tirante si atado en un extremo tiene en el otro una masa cualquiera. A esa dirección la llamamos vertical del lugar, vertical de la región Q.

A nosotros, habitantes de la región galileana G, donde el espacio es isótropo, nos llama poderosamente la atención todo

lo que ocurre en el campo, y en particular no podemos entender por qué todos los cuerpos tienden a dirigirse hacia M. Hace ya más de doscientos años que Newton nos explicó que M tenía la rara propiedad de atraer a todos los cuerpos, pero nosotros, habitantes de la región galileana G, no podíamos darnos cuenta cabal de lo que tal cosa significaba. Todo el mundo de G ansiaba experimentar por sí mismo lo que se sentiría si se habitara en un campo gravitatorio, pero las leyes del país no permitían atravesar la superficie S. Surgió entonces un gran ingeniero, de nombre Einstein, que fundó una poderosa empresa que, utilizando complicadas instalaciones, hacía que cajas del tamaño de una habitación corriente, se movieran, respecto de K, y siempre en la región galileana G, con movimiento uniformemente acelerado. Dicen que la empresa tuvo un éxito comercial extraordinario, pues las cajas se llenaban de curiosos que querían saber cómo era vivir, aunque sólo fuera durante una hora, en una región donde los cuerpos pesaran.

Entretanto, los científicos instalados en K *comparaban* minuciosamente lo que ocurría en determinada región Q del campo y lo que pasaba en las cajas K′. Encontraron que, *en primera aproximación,* si los cuerpos en una región Q caían con la aceleración g, la caja K′ se comportaba como Q si su aceleración, respecto de K, era constante e igual también a g. Pero en la caja K′ se observa que, a medida que aumenta su velocidad respecto de K, el peso de los cuerpos va aumentando, cosa que no ocurre en la región Q. Los resortes que penden del "techo" de la caja K′ y que sostienen cuerpos en sus extremos, se van estirando cada vez más a medida que transcurre el tiempo. Esto se debe, como sabemos, al aumento de la masa con la velocidad. Desde K se observa también el comportamiento de los relojes y de los metros-patrones que transporta K′.

A medida que aumenta la velocidad, los relojes marchan cada vez más despacio. Y no se trata de una ilusión o de una apariencia: los relojes de todos los pasajeros están atrasados cuando ellos retornan al punto de partida (§ 42). En cuanto a las reglas de medida se nota, al observarlas desde K, que colocadas en la dirección del movimiento, se van acortando más y más a medida que la velocidad aumenta, en tanto que su longitud no varía si se las dispone transversalmente. Claro está que nada de esto ocurre en la región Q, donde los relojes podrán tener un ritmo diferente a los de la región galileana G, pero ese ritmo se mantiene constante. El comportamiento de K′ depende de dos variables: la aceleración, que es constante y la velocidad, que no lo es. Por esta razón, dicho comportamiento varía de instante a instante, siendo entonces im-

posible lograr, de un modo permanente, que la caja K′ se comporte exactamente igual que la región Q.

Puede conseguirse, eso sí, que los pasajeros del interior de la caja experimenten *la ilusión*, durante su viaje, de que se encuentran en un campo gravitatorio constante. Esto se puede lograr de la manera siguiente: A medida que aumenta la velocidad de K′, la masa de los cuerpos que penden de los resortes fijos al techo de la misma, se va haciendo cada vez mayor, y para que aquéllos no se vayan estirando cada vez más, compensamos el aumento de la masa disminuyendo la aceleración. De este modo, la caja K′ se mueve, respecto de K, con una aceleración que es cada vez menor y que tiende a cero a medida que la velocidad de K′ se acerca a la de la luz. Este movimiento particular de K′ se denomina hiperbólico (§ 58).

¿Se logra así un comportamiento idéntico permanente entre K′ y Q?

Tal como estamos considerando las cosas, no puede llamarse a esto comportamiento idéntico. Los relojes de K′ observados desde K, tienden a detenerse a medida que K′ se acerca a la barrera de la velocidad de la luz y, si después de un largo viaje de esta clase, los pasajeros de ese sistema retornaran al punto de partida, se encontrarían con sus relojes asombrosamente atrasados.

El comportamiento idéntico entre una región determinada Q del campo y la caja de Einstein, tendrá lugar sólo en un instante determinado, o durante un intervalo de tiempo que, en rigor, debe ser considerado infinitamente pequeño. En ese instante, o durante ese pequeño intervalo de tiempo, los observadores de K —*respecto de los cuales la región* Q *está en reposo*— constatarán que las reglas y los relojes de Q se comportan exactamente igual que las reglas y los relojes que transporta K′, y que una misma masa m_0 tiene en Q y en K′ exactamente el mismo peso. También las aceleraciones de caída en Q y en K′ deberán ser, en ese momento, idénticas. Si se imagina que desde K se examina espectroscópicamente la luz proveniente de la región Q y también la que se recibe desde K′, deberá constatarse que a la misma línea le corresponde en ambos casos la misma frecuencia. A medida que la velocidad de K′ va aumentando, las líneas espectrales provenientes de fuentes de luz que lleva consigo K′, observadas desde K, se van desplazando hacia el rojo. Debe eliminarse, naturalmente, el efecto Doppler común y considerar que la frecuencia que se observa desde K es la que corresponde al efecto Doppler transversal (§ 40). La superposición exacta de las líneas espectrales provenientes de Q con las del "espectro transversal" de K′, se producirá sólo en un instante determinado. En un pequeño entorno de ese instante, los relojes de Q y K′ marchan sincrónicamente, y en ese momento K′ tendrá, respecto de K, una

velocidad bien determinada. Si designamos por v a esa velocidad e imaginamos que los observadores de K′ arrojan en ese preciso momento un cuerpo con la velocidad $-v$, respecto de su sistema, ese cuerpo quedará en reposo con respecto a K.

En resumen: el comportamiento de la caja K′ depende de su aceleración y de su velocidad. En el momento en que K′ se comporta igual que Q, habrá que hacer corresponder a la *vertical de* Q *la dirección en que se mueve* K′ y ¿con qué magnitudes de Q podrán hacerse corresponder la aceleración y la velocidad de K′ en el instante del comportamiento idéntico? Para responder a esta pregunta haremos una detenida exploración del campo gravitatorio que nos preocupa.

140. **Exploración de un campo gravitatorio.** — Cuando en la física clásica se habla de un campo gravitatorio, se piensa generalmente en una fuerza y de este modo se presenta como natural explorarlo utilizando una balanza de resorte. Pero nosotros preferiremos efectuar nuestra exploración provistos, simplemente, de un reloj y una regla de medida. Al llegar a una región Q del campo, *lo primero que hacemos* es regular nuestro reloj y marcar nuestra regla de manera que la velocidad de la luz, medida con ellos, en trayectos infinitamente pequeños, sea constante e igual al valor de la velocidad de la luz en un sistema inercial. Admitiremos, entonces, que la velocidad de la luz en cada región, determinada de ese modo, no depende de la dirección. Los valores que obtengamos de nuestras medidas de longitud y tiempo en cada región, utilizando reglas y relojes situados en la misma, los llamaremos *valores naturales*. De acuerdo con lo dicho, suponemos entonces que el *valor natural de la velocidad de la luz en el vacío es en todas partes y en cualquier dirección igual a la constante c.*

Si, en particular, dejamos caer un cuerpo en la región Q, podremos determinar con nuestro reloj y nuestra regla situados allí, la aceleración de caída. El valor que obtengamos será la *aceleración natural*. Pero es seguro que encontraremos que esa aceleración de caída depende de la velocidad.

En el límite debe valer la relatividad restringida, que impide que se pueda sobrepasar la velocidad de la luz. Por esta razón, no podremos hablar de una única aceleración de caída en la región. Habrá una aceleración de caída para el reposo, otra para una velocidad inicial igual, por ejemplo, a $c/2$, etcétera. Esto mismo puede comprenderse si se piensa en la caja de Einstein que se mueve respecto de K con movimiento uniformemente acelerado. En el interior de la misma, los cuerpos caen con una aceleración que depende en cada momento de la aceleración y velocidad de K′ respecto de K y de la velocidad del cuerpo que se deja caer. Sólo aplicando la dinámica newtoniana resulta que la aceleración de caída en K′ es indepen-

diente de la velocidad. Pero esto no es así, de acuerdo con la dinámica de la relatividad restringida (§ 58). Todavía no sabemos exactamente la aceleración y la velocidad que debe tener K′ respecto de K para comportarse igual que la región Q, pero basta con que sepamos que deberá existir un tal comportamiento idéntico para que podamos afirmar que en Q, al igual que en cualquier caja K′, la aceleración de caída deberá ser cierta función de la velocidad del cuerpo que cae. De modo que nos encontramos con que, en rigor, no se puede hablar siquiera de una aceleración de caída correspondiente a tal región. Veamos, entonces, si tenemos más suerte con la otra magnitud que servía para caracterizar el comportamiento de K′: su velocidad con respecto a K. Trataremos, entonces, de ver si existe para cada región Q una velocidad característica determinada. Estamos tan acostumbrados a hablar de la aceleración g de cierta región, que ni siquiera pensamos que esa magnitud se refiere a la aceleración de caída de cuerpos de prueba que se abandonan en la misma o que se pueden arrojar allí con una velocidad cualquiera, y por eso creemos que esa g determina por completo el comportamiento del campo. Y esto ni siquiera es cierto dentro del marco de la mecánica newtoniana. Véase, para convencerse de ello, la tabla inserta en la página 300, donde se han indicado cuatro lugares de diferentes campos gravitatorios, en los cuales la aceleración tiene, en todos ellos, el mismo valor, g, siendo, en cambio, la velocidad parabólica en los mismos bien diferente.

En principio, el explorador de nuestro campo, no tendrá inconveniente alguno en hallar la velocidad parabólica correspondiente a cada región.

Para ello, arrojará partículas materiales con diferentes velocidades y encontrará que algunas de ellas pueden escapar del campo y otras no. A la velocidad mínima de escape la llamamos velocidad parabólica. Los cuerpos lanzados desde una región Q con esa velocidad, "llegarán" a la región galileana G con velocidad igual a cero. Esa velocidad parabólica, determinada en la región Q, *con reglas y relojes situados allí,* la denominamos *velocidad parabólica natural. Postulamos* que la velocidad parabólica natural, característica de cada región de un campo gravitatorio estático, *no depende de la dirección.* Claro está que, implícitamente, se supone también que esa velocidad parabólica natural no depende de la naturaleza del cuerpo de prueba utilizado, pues, de otro modo, no podría ser ella una magnitud *característica* de cada lugar.

141. **Principio de la velocidad parabólica.** — Se comprende de inmediato que para reproducir, por el movimiento acelerado de un sistema, lo que pasa en una región de un campo gravitatorio, ésta debe tener dimensiones muy reducidas. Los va-

lores característicos del campo varían de punto a punto y las verticales, en puntos algo alejados, dejan de ser paralelas. En rigor, la *pequeña región* Q debe pensarse confinada en un paralelepípedo elemental de dimensiones dx, dy, dz, cuyo centro es *el punto* Q. Ahora sabemos que también debe limitarse el intervalo de tiempo, durante el cual el comportamiento de Q es exactamente igual al de K′ a un lapso elemental dt, entorno de un instante t bien determinado. En ese instante, el origen * O′ del sistema K′ tendrá, respecto de K, una velocidad v bien determinada. *Postulamos* que para que el comportamiento sea idéntico, esa velocidad del origen de K′ con respecto a K debe ser igual a la velocidad parabólica *natural* del punto Q. Además, claro está, la *aceleración propia* de K′ deberá ser igual a la *aceleración natural* de caída en Q para una velocidad inicial igual a cero.

Conviene que el lector imagine concretamente un punto Q de un campo gravitatorio estático y que lo piense en el centro de una caja cuyas paredes están en reposo respecto de las masas que generan el campo. Ésta es la región Q, o la habitación Q, en el interior de la cual se encuentra un físico que mide, con reglas y relojes situados allí dentro, la velocidad parabólica v en el punto Q y la aceleración de caída g'_0 para una velocidad inicial igual a cero, en el mismo punto Q, centro de la habitación. Otros físicos se encuentran en G, sumamente alejados de la región Q y de todas las masas que generan el campo gravitatorio que actúa en Q.

Esa región G es una región galileana donde vale la relatividad restringida y los físicos situados allí observan que la habitación Q y las masas que generan el campo están en reposo respecto de ellos. El sistema de referencia de los físicos alejados de Q es lo que hemos llamado el sistema inercial K. Si se trata del campo solar, podremos pensar que el origen del sistema K se encuentra, por ejemplo, a un año-luz del centro del Sol, donde diez mil metros cúbicos de agua pesarían sólo 1,58 miligramos. Respecto de este sistema, el Sol estaría en reposo y también la "habitación" cuyo centro es el punto Q. En esta región galileana, un punto O′, origen de un segundo sistema K′, se traslada respecto de K siguiendo una línea recta y con movimiento variado. El punto O′ puede pensarse que está en el centro de una segunda caja, que es lo que llamaremos simplemente la caja K′. ¿Cuándo, en qué momento, K′ se com-

---

* Si se piensa en una caja rígida de dimensiones finitas, que se mueve respecto de un sistema inercial K con movimiento acelerado, los diversos puntos de la caja deben tener, respecto de K, y en un instante de este sistema, velocidades diferentes. Si la longitud propia de la caja en el sentido del movimiento es l', esta longitud irá disminuyendo constantemente respecto de K, y el "techo" de la caja tendrá que moverse con una velocidad algo menor que el "piso" de la misma. Si así no fuera, los cuerpos no podrían caer dentro de la caja. En ella, los relojes situados junto al techo marchan con mayor rapidez que los que están fijos en el piso. Por esa razón hablamos del "origen" del sistema K′.

porta exactamente igual que Q? De acuerdo con lo que se ha postulado, respondemos:

Si la aceleración propia de O′ es g'_0, el comportamiento idéntico se produce en el instante en que la velocidad de K′ respecto de K sea igual a la velocidad parabólica natural v de Q.

Si prescindimos de hablar de la aceleración del sistema K′ por sobreentenderse que el movimiento debe ser acelerado, podremos resumir nuestro principio en el enunciado siguiente:

La caja K′ *de Einstein se comporta igual que la región* Q *de un campo gravitatorio estático cuando su velocidad respecto de un sistema inercial* K *es igual a la velocidad parabólica natural de* Q.

Si fijamos nuestra atención en los datos de la tabla de la página 300 y suponemos que los valores dados allí son valores naturales, y que las aceleraciones corresponden a velocidades iniciales nulas, una caja K′, que se mueva respecto de un sistema inercial K, con aceleración propia igual a g, se comportará, como los puntos del campo originado por la Tierra en su superficie, en el momento en que su velocidad respecto de K sea igual a 11,17 km/seg e igual que la región mencionada del campo solar cuando la misma alcance el valor de 269 km/seg.

142. Consecuencias inmediatas del principio de la velocidad parabólica. — a) *La marcha de un reloj en un campo gravitatorio.* Si el sistema K′ se mueve con movimiento variado, respecto del sistema inercial K, dejan de ser aplicables las ecuaciones de Lorentz, pero como ya vimos al tratar del tiempo propio (§ 42, fórmula [55]), al alcanzar K′ la velocidad v, a un intervalo de tiempo dt del sistema K, corresponderá un intervalo dt' de los relojes fijos a K′, tal que:

[1] $$dt = \frac{dt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

En esta fórmula v es la velocidad variable de K′ y sólo conociendo cómo depende v del tiempo t del sistema K podrá calcularse, integrando, el tiempo propio de K′ correspondiente a un intervalo finito de tiempo del sistema K. Si en el instante considerado a que se refiere la [1] la velocidad que allí figura es igual a la velocidad parabólica natural de una región Q, los relojes de K′ marcharán, entonces, de acuerdo con el principio de la velocidad parabólica, exactamente igual que los relojes de Q. En consecuencia, la [1] relaciona la marcha de un reloj situado en una región galileana con otro colocado en un campo gravitatorio donde la velocidad parabólica natural es v. Si el

campo es estático, esta v es constante y, en consecuencia, podrá escribirse:

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \quad [2]$$

Se ve, así, que los relojes marchan tanto más despacio cuanto mayor sea la velocidad parabólica natural de la región donde se encuentran. Obsérvese que ambos relojes están en reposo relativo, de modo que estamos en presencia de un atraso real del reloj situado en el campo con respecto al otro que se sustrae de la acción del mismo. Ya vimos que en un disco giratorio ocurría lo mismo: los relojes de la periferia atrasan con respecto a los que están situados en el centro. Si para fijar ideas suponemos que el denominador de la [2] es igual a 99/100, a

99 segundos del reloj situado en el campo corresponden
100 segundos del reloj situado en el exterior.

De acuerdo con esto, un transmisor de radio, que puede considerarse como un reloj, y cuya frecuencia fuera igual a 1000 kilociclos por segundo (longitud de onda 300 metros) llevado a ese campo, la tal frecuencia se reduciría a 990 kilociclos y la longitud de onda sería de 303 metros.

Con los átomos ocurre lo mismo y de ahí el famoso corrimiento hacia el rojo de las líneas espectrales provenientes de la luz de los átomos situados en lugares donde la velocidad parabólica natural es muy grande.

En lo que sigue, para abreviar la escritura, pondremos:

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \gamma \quad , \quad [3]$$

siendo v la velocidad parabólica natural de la región del campo que se considera. γ es, entonces, cierta función de las coordenadas, de cuya determinación nos ocuparemos más adelante (§ 149).

b) *Comportamiento de las reglas de medida.* Cuando el sistema K′ alcanza la velocidad v, respecto de K, una regla de K′ colocada en la dirección x del movimiento, tiene, medida desde K, una longitud menor, de tal modo que

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}x' \sqrt{\gamma} \quad , \quad [4]$$

en tanto que, en la dirección normal al movimiento, es:

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}y' \quad ; \quad \mathrm{d}z = \mathrm{d}z' . \quad [5]$$

De acuerdo con el principio de la velocidad parabólica, debe ocurrir exactamente lo mismo en el campo. Una regla que se

coloque en la dirección de la vertical del lugar tendrá, *medida desde una región galileana,* donde los observadores están en reposo respecto de la regla, una longitud dx menor que la longitud natural dx' y ambos valores están vinculados por la relación [4], en la cual γ está definida en [3]. Si la regla se coloca horizontalmente, su longitud natural coincide con la longitud medida desde la región galileana de acuerdo con [5].

143. Significado de la contracción de las reglas colocadas verticalmente. — La [4] debe valer para un campo estático cualquiera si se supone que la regla se coloca en la dirección de la vertical del lugar, pero para captar lo que puede significar esa extraña contracción, pensaremos en un campo que tenga simetría esférica como el originado por una masa única M (fig. 149). En tal caso, pensemos en una dirección radial r y consideremos dos puntos A y B situados sobre esa recta. Midamos la distancia entre ellos desde el exterior del campo. Para realizar esta medida tendremos que efectuar, y no en sentido metafórico, un gran rodeo. La superficie esférica S, de centro en M, limita la región galileana de la que no lo es. El radio R de esa esfera será lo suficientemente grande como para poder considerar que en el exterior de la misma el campo es nulo. Admitimos, pues, que, dados valores arbitrariamente pequeños de la velocidad parabólica y de la aceleración de caída, existirá siempre un R tal que, para todo $r \geqslant R$, los valores de aquellas magnitudes serán menores que los fijados de antemano. En la región galileana tomamos un sistema de coordenadas K, respecto del cual la masa M y los puntos A y B del campo están en reposo. Sólo en la región galileana la luz se propaga en línea recta y esto complica las cosas para poder medir de verdad la distancia entre los puntos A y B con reglas en reposo respecto de K y situadas únicamente en el exterior de la esfera de radio R. Pero desde diferentes puntos P_1, P_2, etcétera, situados en la región galileana y cuyas coordenadas res-

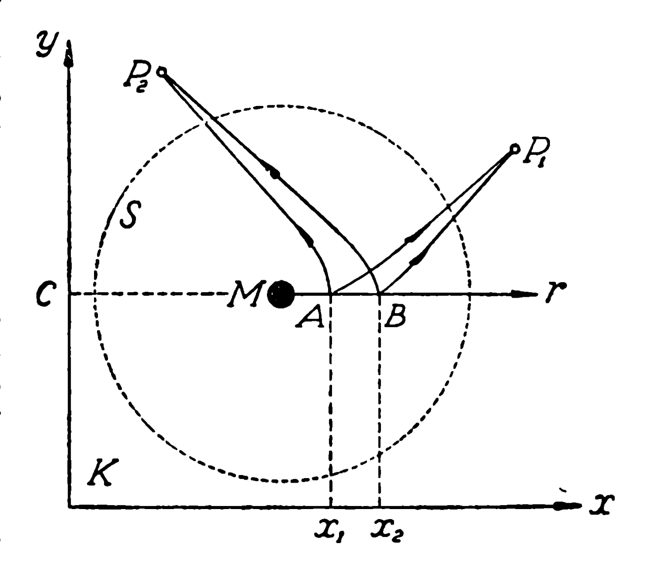


Fig. 149. — Medida interna y externa de la distancia entre dos puntos situados en un campo gravitatorio.

pecto de K se determinan en forma directa, podrán observarse los puntos A y B del campo. De estas observaciones podrá deducirse la forma de la trayectoria de los rayos de luz y, *además*, las coordenadas de los puntos A y B en el sistema K *. En el caso representado en la figura, se tendrá

$$AB = x_2 - x_1$$

y nuestra regla de medida no ha tenido que introducirse para nada en la "región prohibida" limitada por la superficie S. Para fijar ideas, supondremos que la medida llevada a cabo de este modo arroja el valor:

$$dr = 10 \text{ metros},$$

lo que significa que el metro-patrón cupo 10 veces en el segmento del eje x limitado por los puntos x_2 y x_1.

Entramos ahora en la región prohibida y llevamos con nosotros a nuestro metro-patrón de platino y copias exactas de él de otros materiales: cobre, hierro, madera, etcétera. Colocamos ahora nuestra regla unitaria entre los mojones A y B y encontramos:

$$dr' = 11 \text{ metros}.$$

Ésta es la medida natural, la llevada a cabo en la región misma **. El ejemplo corresponde a un lugar del campo en el cual, de acuerdo con [4], es

$$\sqrt{\gamma} = \frac{10}{11}$$

y donde la velocidad parabólica natural tendría que ser tal que $v/c = 0{,}42$. ¿Cómo explicamos este resultado? Diciendo: el campo tiene la rara propiedad de hacer que se acorten las reglas de medida y todos los cuerpos materiales cuando se los coloca verticalmente. Y esto es raro, porque se acortan por igual el platino y la madera. Observemos que si los mojones hubieran estado colocados en el mismo plano horizontal, la medida natural, y la efectuada desde el exterior, hubieran coincidido. Cuando los agrimensores que efectúan estas medidas en el campo mismo, retornan a la región galileana, trayendo consigo sus extraños resultados, no podrán librarse de que se les

---

* La dificultad de determinar las coordenadas euclídeas de un punto de un campo *desde lejos* es común a la teoría de la relatividad y a cualquier otra que acepte que los rayos de luz puedan seguir trayectorias curvas. Si éstas fueran más curvadas de lo que son, buena tarea tendrían los astrónomos. En la medida de la desviación de los rayos de luz en el campo solar, se realiza efectivamente la operación de hallar las coordenadas euclídeas teniendo en cuenta la curvatura de los rayos de luz.

** En la teoría de Birkhoff (§ 137) debería encontrarse $dr' = 10$ metros y como en la misma se acepta el principio de equivalencia, parecería que, de acuerdo con ella, el comportamiento idéntico entre la caja de Einstein y una región de un campo se obtiene en todos los casos para una velocidad nula de la caja y aceleración igual a la de la región. Pero esto origina serios inconvenientes que no sabemos si pueden ser aclarados. En la teoría de García (§ 137), en la cual el tiempo se dilata y las reglas no se contraen, no podría haber comportamiento idéntico para ninguna velocidad.

pregunte: ¿No notaban ustedes esa contracción? ¿No notaban que al acostarse se estiraban y que al ponerse en posición vertical se encogían? Y, claro está, que responderán: No se notaba absolutamente nada. La explicación de ello la tenemos a mano: no se nota nada porque todo se estira o se encoge de la misma manera y sólo podemos apreciar diferencias. Decir que las reglas de medida, de cualquier naturaleza, experimentan tal y tal contracción en determinada región, es un modo de hablar que *equivale exactamente* a este otro modo de expresarse: la geometría válida en esa región es no euclídea; o también: el espacio en ese lugar es curvo.

El segundo modo de expresión, según el cual la geometría es no euclídea, es más conveniente, pues entonces no hay necesidad de suponer que las reglas experimentan contracción alguna. Claro está que el espacio curvo en sus tres dimensiones no lo podemos "ver", pero siempre podremos ver cortes o secciones "planas" del mismo de dos dimensiones. Volviendo a la figura 149, imaginemos un reticulado formado por planos euclídeos paralelos a los ejes $x\,y\,z$ del sistema K. Ese reticulado abarca toda la región del campo y a cada punto del mismo le corresponderá una terna de valores $x\,y\,z$ que, no debe olvidarse, *representan medidas efectuadas en la región galileana.* Seccionemos el campo con el plano euclídeo $y = \mathrm{C}$ que pasa por el centro de la masa M y procuremos dar cuenta de los resultados de las medidas viendo cuál debe ser la forma de la superficie que nosotros proyectamos sobre el plano euclídeo.

En la fig. 133 de la pág. 319, Or es la traza del plano euclídeo que pasa por el centro de M, y para poder ver la forma de la superficie curva que corresponde a este corte plano, tomaremos una recta Oz perpendicular al plano Or en el punto O. Claro está que esta z no tiene nada que ver con el tercer eje z de la fig. 149. Imaginemos una curva tal como la representada en el dibujo y que tiende a hacerse paralela a r a medida que aumenta r, y dada la simetría radial del campo, consideraremos la superficie de revolución generada por esta curva al girar alrededor del eje z. Las medidas naturales son las que se llevan a cabo en el campo mismo, no desde el exterior, y las medidas naturales correspondientes al plano euclídeo $y = \mathrm{C}$ son las que se efectúan sobre esa superficie de revolución. La contracción de las reglas aparece, así, como una simple proyección, pues se ve en la figura que

$$\mathrm{d}r = \mathrm{d}r' \cos\alpha \qquad [6]$$

y por eso no tiene nada de raro que todos los materiales "experimenten la misma contracción". No, no hay contracción ninguna; dr' es realmente mayor que dr y por eso, en nuestro ejemplo, el metro-patrón cabía allí once veces, en tanto que en la proyección cabe sólo diez.

El famoso coseno alfa, que nos fué tan útil en la relatividad restringida, lo encontramos nuevamente aquí, siendo, de acuerdo con [6], [4] y [3]:

$$[7] \qquad \cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \;,$$

donde v es ahora la velocidad parabólica natural de los puntos del campo.

Para encontrar la forma real de la superficie de revolución habrá que conocer la dependencia entre la velocidad parabólica natural v y *la distancia euclídea o exterior* r, asunto del cual nos ocuparemos más adelante.

144. **Velocidad natural.** — A causa de la lentitud con que marchan los relojes en un campo gravitatorio con respecto a los situados en el exterior y a causa también de la contracción que experimentan, según los observadores de la región galileana, las reglas de medida situadas en el campo, cuando se las coloca verticalmente, la velocidad de un punto que se mueve en cierta región del campo, determinada con reglas y relojes situados allí, no coincidirá con la velocidad del mismo punto determinada desde el exterior. Si el punto se mueve siguiendo la vertical del lugar, su velocidad natural será

$$V'_V = \frac{dx'}{dt'}$$

y por ser, de acuerdo con [4] y [1]:

$$dx' = \frac{dx}{\sqrt{\gamma}} \quad ; \quad dt' = \sqrt{\gamma}\, dt$$

se tendrá

$$[8] \qquad V'_V = \frac{1}{\gamma} V_V \;,$$

siendo V_V la velocidad del mismo punto medida desde el exterior.

Si el punto se mueve en el campo en dirección perpendicular a la vertical del lugar, o sea en un plano horizontal, se tendrá, en cambio:

$$[9] \qquad V'_H = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\sqrt{\gamma}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} V_H .$$

Apliquemos las [8] y [9] al caso de la luz cuya velocidad natural, la medida en el campo en trayectos infinitamente pequeños, es siempre igual a la constante c desde el momento

que los relojes deben marchar en cada lugar de modo que tal cosa se cumpla. Se tendrá:

[10] $$V_{V\,(\text{luz})} = c\gamma \quad ;$$

[11] $$V_{H\,(\text{luz})} = c\sqrt{\gamma} \quad .$$

Nos encontramos, así, con que la velocidad de la luz medida desde el exterior del campo, desde una región galileana, deja de ser constante.

Aplicando la [8] y la [9] a la velocidad parabólica, cuyo valor natural v no depende de la dirección, se tendrá

[12] $$W_V = v\gamma \quad ; \quad W_H = v\sqrt{\gamma} \quad ;$$

siendo W_V y W_H los valores de la velocidad parabólica determinados desde el exterior cuando el punto se mueve según la vertical del lugar u horizontalmente. Las [12] muestran claramente la diferencia entre la teoría de Newton y la teoría relativista de la gravitación. Para los observadores situados en el exterior del campo, en la región galileana, el valor de la velocidad mínima de escape depende de la dirección, como si el campo no fuera conservativo.

145. **Ecuación de la energía.** — Comencemos por considerar el siguiente ejemplo: En un campo gravitatorio estático hacemos que un cuerpo recorra, por la acción de un vínculo sin roce, una trayectoria como la representada en la figura 150, de modo que el cuerpo pase dos veces consecutivas por el mismo punto P. Supongamos que al pasar por primera vez por el punto P sigue una dirección horizontal, en tanto que, en su segundo pasaje, se mueve verticalmente. La velocidad natural del cuerpo, o sea la determinada con reglas y relojes fijos en el campo y situados en la proximidad de P será, en ambos pasajes, la misma. Si así no fuera, existiría la posibilidad de construir un *perpetuum mobile*. Se tiene entonces que, para este caso, es

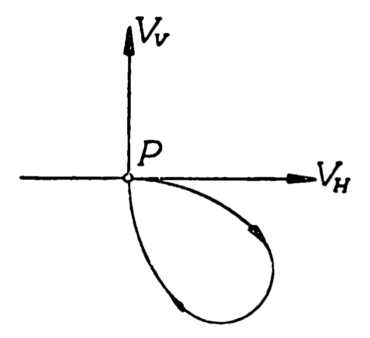


Fig. 150. — El campo gravitatorio se comporta, observado desde el exterior, como si no fuera conservativo.

$$V'_V = V'_H .$$

Pero siendo así, para observadores situados fuera del campo resulta, de acuerdo con [8] y [9], que la velocidad horizontal V_H es mayor que la vertical V_V, puesto que γ es siempre menor que uno. El campo aparece para los observadores de la región galileana como si no fuera conservativo, y de ahí que

no puedan describir lo que ocurre en el mismo con un potencial de tipo newtoniano, que es un escalar. Ésta es la razón íntima por la cual en la teoría de Einstein aparece un tensor, g_{ik}, en lugar de un escalar φ.

Si un cuerpo perfectamente elástico choca en P contra una pared rígida y se refleja, tendrá, en el mismo punto de incidencia, una velocidad que será, en general, diferente antes y después del choque, si se mide la misma con reglas y relojes situados a gran distancia del punto P. Lo mismo sucede al reflejarse la luz. Pero ninguna de estas *anormalidades* tiene lugar para observadores situados en la inmediata vecindad de la región donde ocurren los hechos. De aquí proviene la gran simplificación que se logra con la introducción de los *valores naturales*.

Si se considera un punto cualquiera P de un campo gravitatorio estático, en un entorno del punto suficientemente pequeño, la velocidad *natural* de la luz es constante y no depende de la dirección, por lo cual, para observadores situados en la inmediata vecindad de dicho punto, tendrá que valer la relatividad restringida. En términos geométricos esto significa que si un plano es tangente a una superficie curva, en un entorno muy pequeño del punto de contacto, los puntos de la superficie pueden considerarse coincidentes con los del plano. En el espacio-tiempo curvo, de cuatro dimensiones, ocurre lo mismo: Por cada punto de universo puede hacerse pasar una variedad euclídea "tangente" y en esa variedad tangente vale la relatividad restringida. El sistema de coordenadas que utilizan los observadores que determinan en cada punto los valores naturales es el sistema local de que se habló en el párrafo 120, sistema respecto del cual las masas que generan el campo están en reposo.

Supongamos ahora que un punto material cuya masa en reposo es m_0, pase por el punto 1 de un campo con la velocidad natural V'_1 determinada allí mismo. Su energía *total* natural, o sea su energía referida al sistema local asociado al punto 1, es:

[13] $$E'_1 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{V'^2_1}{c^2}}}.$$

Consideremos un segundo cuerpo que pase por el punto 1 con una velocidad natural igual a la velocidad parabólica natural del punto, v_1, y elijamos su masa en reposo, M_0, de tal modo que su energía total sea igual a la del cuerpo anterior:

[14] $$E''_1 = E'_1 = \frac{M_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}.$$

En la figura 151 se han representado las trayectorias que podría hacerse seguir a ambos cuerpos en el campo para que, lanzados desde el punto 1, hicieran blanco en el punto 2. No es necesario pensar, que los dos cuerpos pasan por el punto 2 simultáneamente. El segundo cuerpo, el que pasó por el punto 1 con una velocidad igual a la velocidad parabólica natural de ese punto, tendrá que ir adquiriendo en cada punto por donde pase una velocidad natural igual a la velocidad parabólica natural de cada lugar.

Fig. 151. — Sobre la ecuación de la energía.

De otra manera, esta magnitud no estaría determinada unívocamente. En consecuencia, los observadores próximos al punto 2 encontrarán que la energía natural de ese segundo cuerpo, al pasar por allí, es:

[15] $$E'_2 = \frac{M_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}}.$$

El primer cuerpo, al pasar por el punto 2, adquiere una velocidad natural V'_2 y su energía total, allí determinada, será:

[16] $$E''_2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{V_2'^2}{c^2}}}.$$

Dado que los dos cuerpos considerados tienen igual energía al pasar por el punto 1, podrían allí *intercambiarse, por lo cual es absolutamente necesario que se cumpla*:

[17] $$E'_2 = E''_2.$$

En palabras: *Si dos cuerpos, al pasar por determinado lugar de un campo, tienen, de acuerdo con las mediciones hechas allí, igual energía total, cuando pasen por un segundo lugar sus energías totales determinadas en el segundo punto siguen siendo iguales entre sí.* Como los dos puntos considerados pueden ser cualesquiera, se tendrá entonces, igualando [13] con [14] y suprimiendo el subíndice para indicar con ello que la igualdad vale para cualquier lugar:

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{V'^2}{c^2}}} = \frac{M_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{M_0 c^2}{\sqrt{\gamma}},$$

o sea

[18] $$1 - \frac{V'^2}{c^2} = \left(\frac{m_0}{M_0}\right)^2 \gamma = A^2\gamma \quad ,$$

siendo A una constante. En el exterior del campo, en el infinito, $\gamma = 1$, y si designamos por E al cuadrado de la velocidad que el cuerpo adquiriría después de escapar del campo, o sea

[19] $$(V'^2)_\infty = E \quad ,$$

se tendrá:

[20] $$1 - \frac{E}{c^2} = A^2 \quad ,$$

y llevando este valor a la [18], se obtiene:

[21] $$V'^2 = c^2 - (c^2 - E)\gamma .$$

Ésta es la ecuación de la energía válida para cualquier campo estático y que se ha establecido admitiendo la imposibilidad de construir un *perpetuum mobile.* La conservación de la energía vale para el campo, lo que se postula también en el desarrollo original de Einstein al elegir como primer miembro de la ecuación [35] del capítulo VIII un tensor cuya divergencia debe ser nula.

146. **La ecuación de la energía en un campo central.** — Un campo central es aquel cuyas verticales concurren todas a un punto fijo O, que es el centro del campo. Para los observadores situados en el exterior del campo, en la región galileana, el centro O está en reposo y esas verticales son, simplemente, rectas euclídeas.

Si descomponemos la velocidad natural V′ en sus dos componentes, la una vertical y la otra horizontal, se tendrá

[22] $$V'^2 = {V'_V}^2 + {V'_H}^2 \quad ,$$

y teniendo en cuenta la [8] y la [9], obtenemos:

[23] $$V'^2 = \frac{1}{\gamma^2} V_V^2 + \frac{1}{\gamma} V_H^2 .$$

El segundo miembro de [23] se refiere a los valores de las componentes determinadas desde la región galileana. Si pasamos a coordenadas polares, r, φ, cuyo origen esté en O, se tendrá:

[24] $$V'^2 = \frac{1}{\gamma^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{\gamma} r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \quad ,$$

y llevando este valor a la [21], multiplicando todo por γ^2, resulta:

[25] $$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \gamma r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = [c^2 - (c^2 - E)\gamma]\gamma^2 \quad ,$$

que es la ecuación de la energía correspondiente a un campo central. Para hallar la forma de la trayectoria que describiría una partícula abandonada libremente en el campo, necesitamos otra ecuación para poder eliminar el tiempo de la [25] y tener, así, relacionadas las dos variables r y φ.

Esa segunda ecuación corresponde a la ley clásica de las áreas y de su expresión exacta nos ocupamos a continuación.

147. **Ley de las áreas.** — En un campo central, las verticales tienen dirección radial y desde la región galileana, para reproducir lo que ocurre en determinada porción del campo, habrá que hacer que la caja de Einstein se mueva con la aceleración que corresponda y según la dirección de la vertical de cada lugar. En cada una de las "cajas" que se considere los cuerpos libres tienen, respecto de las mismas, una aceleración dirigida en el sentido del movimiento y todo ocurre en ellas como si actuara una fuerza en esa dirección. Puede afirmarse, entonces, que en un campo central todo ocurrirá *como si* actuara una fuerza dirigida constantemente hacia un punto fijo. En consecuencia, comenzaremos por estudiar qué es lo que pasa si, en un sistema inercial, donde vale la relatividad restringida, actúa sobre una partícula una fuerza dirigida constantemente hacia un centro fijo O.

Si el plano determinado por la recta r que une al punto O con la partícula y la velocidad inicial de ésta, lo hacemos coincidir con el plano $x\,y$ de nuestro sistema de coordenadas, la aceleración de la partícula según el eje z será nula, y por ser también nula su velocidad inicial según ese eje, se comprende que el movimiento del punto material tendrá que efectuarse sobre el plano $x\,y$. Las componentes X é Y de la fuerza actuante, dirigidas constantemente hacia O, que tomamos como origen de nuestro sistema, deberán ser proporcionales a las coordenadas $x\,y$ del punto móvil, por lo cual podrá establecerse la ecuación [19] del párrafo 126 de cuya integración, *sin suponer que la masa m sea constante,* se obtiene

$$m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=\text{constante},$$

y pasando a coordenadas polares cuyo origen coincida con O, se encuentra

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}\,r^2\frac{d\varphi}{dt}=\text{constante}, \qquad [26]$$

si se tiene en cuenta la variación relativista de la masa y llamamos V a la velocidad del punto material cuya masa en reposo es m_0. Si se introduce el tiempo propio τ de la partícula,

que es el tiempo que indicaría un reloj que se moviera junto con ella, se tendrá, de acuerdo con la [55] del capítulo III,

[27] $$d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \quad ,$$

con lo cual, la [26] se escribe:

[28] $$r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = C \quad ,$$

siendo C una constante. La única diferencia entre esta ecuación y la clásica es que aquí aparece el tiempo propio, en tanto que en aquélla figuraba el único tiempo de que se disponía. Naturalmente que la [28] debe valer para un campo gravitatorio central cualquiera. La r y la φ son, en tal caso, *las coordenadas de puntos de un plano euclídeo determinadas desde el exterior del campo* en la forma que se explicó en el párrafo 143. Además τ será ahora el tiempo propio de la partícula que se mueve en el campo y no el tiempo propio de una partícula móvil en una región galileana, pero no lo designamos con una nueva letra para no complicar la escritura.

Transformemos ahora la ecuación [28] de modo que figure en ella el tiempo t del sistema K, o sea el tiempo indicado por relojes situados en la región galileana y en reposo respecto del centro del campo. Esto no es volver para atrás, pues lo que buscamos es hacer que no figure, como en [26], la velocidad de la partícula respecto de K. Consideremos para ello un sistema de coordenadas local K′ fijo con respecto a K, pero en el cual los observadores se sitúan —con sus reglas y sus relojes— en la inmediata vecindad del punto móvil, de tal modo que puedan medir *la velocidad natural* V′ del mismo. Debe imaginarse, para ello, que hay infinitos sistemas K′ e infinitas reglas y relojes sembrados por todo el campo o por lo menos en los lugares próximos por donde pasa la partícula, que nada sabe de nuestras preocupaciones para determinar su recorrido. De acuerdo con [27], se tendrá ahora:

$$d\tau = dt'\sqrt{1 - \frac{V'^2}{c^2}}$$

y con ello la [28] se escribirá

[29] $$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V'^2}{c^2}}} r^2 \frac{d\varphi}{dt'} = \text{constante.}$$

¡Tantas vueltas para volver a escribir la [26] con un simple acento de más! Pero aquí figura la velocidad natural V′ y por la [18] se tendrá:

[30] $$\sqrt{1-\frac{V'^2}{c^2}} = A\sqrt{\gamma} \quad ,$$

y por ser además de acuerdo con [1]

[31] $$dt' = dt\sqrt{\gamma}$$

la [29], con los valores [30] y [31], se transforma en:

[32] $$r^2\frac{d\varphi}{dt} = B\gamma$$

que, con B constante, es la ley de las áreas del movimiento central. Como γ es función de r, la velocidad areal no es rigurosamente constante. Ella es algo mayor en el afelio que en el parihelio. Pero no se crea que la [32] puede dar cuenta por sí sola del corrimiento del perihelio: ella no es la responsable de que pase tal cosa. La [32], combinada con la ecuación clásica de la energía, da por resultado una elipse absolutamente inmóvil, en tanto que la ecuación clásica de la ley de las áreas, combinada con la ecuación relativista de la energía, da el mismo corrimiento que se obtiene utilizando la [32]. De las dos ecuaciones del movimiento central [25] y [32], la "responsable" de las discrepancias con respecto a la trayectoria newtoniana es, fundamentalmente, la ecuación [25] de la energía.

148. **Ecuación de la forma de la trayectoria en un campo central.** — Dividiendo la [25] por la [32] elevada al cuadrado, se obtiene:

[33] $$\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{\gamma}{r^2} = \frac{1}{B^2}\left[c^2-(c^2-E)\gamma\right]$$

que es la ecuación general relativista de las trayectorias de partículas o rayos de luz para un campo central cualquiera. Para un rayo de luz habrá que tomar la constante E, de acuerdo con [19], igual a c^2.

149. **Determinación de la función** γ. — ¿Cómo elegir la función γ para dar cuenta de los hechos experimentales correspondientes a un campo gravitatorio real tal como el campo solar? Sabemos que la teoría newtoniana da cuenta, en forma casi perfecta, de los hechos observados y en el lenguaje del campo esa teoría se resume en una ecuación que es la ley de Poisson (§ 115). Por lo tanto, lo natural es suponer que la función γ satisface la ecuación de Poisson, que escribiremos así:

[34] $$\Delta\gamma = K\mu \quad ,$$

donde K es una constante y μ la densidad de la materia que

genera el campo. Si el campo está generado por una única masa M esférica, de densidad μ constante, o que sea la tal densidad sólo función de r, la solución de [34] para la parte *exterior* del campo es:

$$[35] \qquad \gamma = 1 - \frac{K}{4\pi}\frac{M}{r}.$$

Para escribir la [35] se ha tenido en cuenta que para $r = \infty$ debe ser, de acuerdo con la definición dada en [3], $\gamma = 1$. Para encontrar la solución [35], el lector puede proceder en la forma que se explicó en el § 121, agregando a la [100] de dicho párrafo una constante que, finalmente, resultará ser igual a uno. Sólo nos falta averiguar el valor que debe dársele a la constante K. Esto se logra de inmediato si se tiene en cuenta que las fórmulas clásicas newtonianas deben coincidir con las fórmulas relativistas *en primera aproximación.* La ecuación newtoniana de la energía para el campo originado por una única masa M es, de acuerdo con la [23] del capítulo IX:

$$[36] \qquad V^2 = E + \frac{2GM}{r},$$

en tanto que la ecuación relativista, de acuerdo con [21] y [35], será:

$$[37] \qquad V'^2 = c^2 - (c^2 - E)\left(1 - \frac{K}{4\pi}\frac{M}{r}\right),$$

o sea

$$[38] \qquad V'^2 = E + \frac{c^2K}{4\pi}\frac{M}{r} - E\frac{K}{4\pi}\frac{M}{r}.$$

Para "campos débiles", en los cuales la velocidad parabólica natural sea pequeña en comparación con la velocidad de la luz, podrá considerarse que

$$V' = V,$$

pero aun así, la [36] no puede hacerse coincidir con la [38]. Esa coincidencia se producirá si, *además* de suponer que el campo es débil (γ casi igual a uno), se considera que la constante E es pequeña, de tal modo que el último término de la [38] pueda ser despreciado. Esto significa que la teoría newtoniana sólo coincidirá con una teoría relativista de la gravitación si, además de ser pequeña la velocidad parabólica natural, es también pequeña la velocidad de la partícula que se mueve en el campo, puesto que la constante E es el cuadrado de la velocidad que la misma adquiriría después de escapar del campo. De antemano podría haberse previsto todo esto, ya que la energía cinética relativista sólo coincide con la expresión clásica para

valores pequeños de la velocidad y en nuestra ecuación de la energía aparece, por un lado, la velocidad parabólica natural de la región y por otro, la constante E que determina en cada caso la velocidad de la partícula móvil. En consecuencia, para que en *primera aproximación* se obtengan los resultados dados por la ley de Newton, será necesario, de acuerdo con [36] y [38], que se cumpla:

$$\frac{c^2 K}{4\pi} = 2G \quad ,$$

o sea

[39] $$K = \frac{8\pi G}{c^2} \quad ,$$

que vincula la constante K de [34] con la constante newtoniana G. Cabe hacer notar que esta constante K es, precisamente, la constante de gravitación de Einstein (fórmula [61] del capítulo VIII). Con el valor [39], la [35] se escribe

[40] $$\gamma = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \quad ,$$

y, en consecuencia, de acuerdo con [3], la velocidad parabólica *natural* será tal, que:

[41] $$v^2 = \frac{2GM}{r} \quad ,$$

que coincide exactamente con la expresión newtoniana (§ 113).

150. **Los tres efectos cruciales de la teoría de la gravitación de Einstein obtenidos directamente a partir del principio de la velocidad parabólica.** — Con el valor de γ dado en [40], o, lo que es equivalente, con el valor [41] de la velocidad parabólica natural, la [2] da el corrimiento hacia el rojo de las líneas espectrales de cuya verificación experimental se ha tratado en el capítulo anterior.

Si se lleva a la [33] el valor de γ dado en [40] y se hace el cambio de variables

[42] $$r = \frac{1}{\varrho} \quad ,$$

con lo cual γ puede escribirse:

[43] $$\gamma = 1 - r_0 \varrho \quad ,$$

siendo

[44] $$r_0 = \frac{2GM}{c^2} \quad .$$

resulta

[45] $$\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{E}{B^2} + \frac{2GM}{B^2}\left(1 - \frac{E}{c^2}\right)\varrho - \varrho^2 + r_0\varrho^3.$$

Introduciendo una constante k tal, que:

[46] $$\frac{1}{B^2}\left(1 - \frac{E}{c^2}\right) = \frac{1}{k^2} \ ; \ B^2 = k^2\left(1 - \frac{E}{c^2}\right) \ ;$$

y designando por E′ a la constante vinculada a E por la expresión

[47] $$E' = \frac{E}{1 - \frac{E}{c^2}}$$

la [45] se escribe:

[48] $$\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{E'}{k^2} + \frac{2GM}{k^2}\varrho - \varrho^2 + r_0\varrho^3 \ ,$$

que es exactamente la ecuación de la trayectoria y que coincide con la [40] del párrafo 127, donde el lector encontrará el modo de integrarla y deducir de la misma el famoso corrimiento del perihelio de Mercurio.

Para un rayo de luz, como la constante E es, de acuerdo con [19], el cuadrado de la velocidad en la región galileana, haciendo $E = c^2$, de la [45] obtenemos:

[49] $$\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{c^2}{B^2} - \varrho^2 + r_0\varrho^3 \ ,$$

que coincide, salvo un simple cambio de letras, con la [59] del párrafo 128, donde se deduce de la misma la desviación de los rayos de luz en el campo solar previsto por la teoría de Einstein y de cuya verificación nos ocupamos en el capítulo anterior.

151. **Ejemplos sencillos. Movimiento vertical.** — Como aplicación de la ecuación general de la energía, trataremos el caso de un cuerpo que se mueva verticalmente. Si inicialmente es $d\varphi/dt = 0$, la constante B de [32] será cero y, en consecuencia, el movimiento de la partícula tendrá dirección radial, pues permanentemente será $d\varphi/dt = 0$.

De aquí que podamos utilizar la [25] considerando nulo el segundo término del primer miembro:

[50] $$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = c^2\gamma^2 - (c^2 - E)\gamma^3.$$

Para hallar la aceleración derivamos respecto del tiempo y obtenemos:

$$2\frac{dr}{dt}\frac{d^2r}{dt^2} = [2c^2\gamma - 3(c^2 - E)\gamma^2]\frac{d\gamma}{dr}\frac{dr}{dt}$$

de donde

[51] $$\frac{d^2r}{dt^2} = \gamma\left[c^2 - \frac{3}{2}(c^2 - E)\gamma\right]\frac{d\gamma}{dr}.$$

Veamos la dependencia entre la aceleración y la velocidad. Llamando V a la velocidad del punto móvil, la [50] da:

$$(c^2 - E)\gamma = c^2 - \frac{V^2}{\gamma^2},$$

con lo cual, la [51] se convierte en:

[52] $$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{1}{2}c^2\gamma\left(1 - \frac{3V^2}{c^2\gamma^2}\right)\frac{d\gamma}{dr}$$

que con el valor de γ dado en [40], resulta:

[53] $$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2}\left(1 - \frac{3V^2}{c^2\gamma^2}\right)\gamma,$$

que coincide con la [125] del párrafo 104, donde g representa la aceleración newtoniana y que fué hallada en aquella ocasión utilizando las ecuaciones de las geodésicas. La aceleración correspondiente al reposo (V = 0) es:

[54] $$\left(\frac{d^2r}{dt^2}\right)_0 = -\frac{GM}{r^2}\gamma.$$

Lo que se ha calculado precedentemente es la aceleración de caída en el movimiento vertical que medirían los observadores situados en la región galileana. Calculemos ahora la aceleración natural, la que medirían los observadores situados en el campo mismo. Como la [8] puede escribirse

[55] $$\frac{dr}{dt} = \gamma\frac{dr'}{dt'}$$

derivando esta expresión respecto del tiempo, se tiene:

[56] $$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2r'}{dt'^2}\frac{dt'}{dt}\gamma + \frac{d\gamma}{dr}\frac{dr}{dt}\frac{dr'}{dt'},$$

y poniendo simplemente

[57] $$\frac{dr}{dt} = V \quad ; \quad \frac{dr'}{dt'} = V' \quad ;$$

la [56], teniendo en cuenta [57] y además la [1], da:

[58] $$\frac{d^2r}{dt^2} = \gamma^{3/2}\frac{d^2r'}{dt'^2} + \frac{1}{\gamma}V^2\frac{d\gamma}{dr}$$

de la cual se saca el valor de la aceleración natural, y reemplazando el valor de la aceleración exterior por su expresión dada en [52], se obtiene sin dificultad:

[59] $$\frac{d^2r'}{dt'^2} = -\frac{c^2}{2\sqrt{\gamma}}\left(1 - \frac{V'^2}{c^2}\right)\frac{d\gamma}{dr}$$

donde se puso la V de [52] en función de V′ para relacionar así la aceleración natural con la velocidad también natural del punto, en dirección de la vertcial. Con el valor de γ dado en [40], resulta

[60] $$\frac{d^2r'}{dt'^2} = -\frac{GM}{r^2}\left(1 - \frac{V'^2}{c^2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \,.$$

La aceleración de caída que corresponde a una velocidad nula, o sea la aceleración natural correspondiente al reposo, es:

[61] $$\frac{d^2r'}{dt'^2} = -\frac{GM}{r^2\sqrt{\gamma}} \,.$$

Volviendo a la caja K′ de Einstein, a la cual le dábamos una aceleración propia, igual a la aceleración natural de caída en la región Q, correspondiente al reposo, para que se comportara de modo idéntico que ella, se tendrá entonces, para el lugar del campo a que se refiere la [61]:

[62] $$\frac{d^2x'}{dt'^2} = -\frac{GM}{r^2\sqrt{\gamma}}$$

y la aceleración de la caja respecto del sistema K, de acuerdo con la [98] del capítulo IV, será

[63] $$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2\sqrt{\gamma}}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{3/2},$$

siendo V la velocidad de la caja K′ respecto de K. Como en el instante del comportamiento idéntico, debe ser esa V igual a la velocidad parabólica natural v del lugar Q, o sea

[64] $$V = \frac{dx}{dt} = v = \frac{dr'}{dt'} \,,$$

la [63], para dicho instante, da:

[65] $$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2}\gamma.$$

Comparando esta expresión con la [54], se ve que la caja en el instante del comportamiento idéntico debe tener una aceleración respecto de K igual a la aceleración de caída en la región Q, correspondiente al reposo, y determinada desde el exterior del campo. De modo, pues, que decir: la aceleración pro-

pia de la caja debe ser igual a la aceleración natural (en reposo) de caída en el campo, es exactamente lo mismo que afirmar: la aceleración de la caja respecto de K debe ser igual a la aceleración de caída en reposo en Q, determinada desde el exterior.

152. Comparación entre la teoría de Newton y la de Einstein. — En la fig. 152 se ha representado el cuadrado de la velocidad parabólica en función de la distancia r a la masa M que genera el campo y que se supone concentrada en un punto. El cuadrado de la velocidad parabólica natural es la representación de la [41] y los cuadrados de las velocidades parabólicas horizontal y vertical corresponden a las [12] con el valor de γ dado en [40]. En el mismo gráfico se representan las aceleraciones correspondientes al reposo, exterior [54] y natural [61], y entre ambas, en línea de puntos, la aceleración newtoniana. En la teoría de Newton, el cuadrado de la velocidad parabólica da una medida del potencial cuyo gradiente es igual a aceleración. En la teoría de Einstein no puede hablarse de un potencial. En cada punto de un campo, de acuerdo con las medidas efectuadas desde el exterior, existen infinitos valores de la velocidad parabólica, comprendidos entre un mínimo, la velocidad parabólica vertical, y un máximo, la velocidad parabólica horizontal. La aceleración en reposo, medida también desde el exterior, en rigor, desde el infinito, es siempre negativa, haciéndose igual a cero para $r = r_0$. Si la aceleración es negativa, ello corresponde, en los efectos observados, a una fuerza de atracción. Pero esta fuerza de atracción es una función bastante complicada de r.

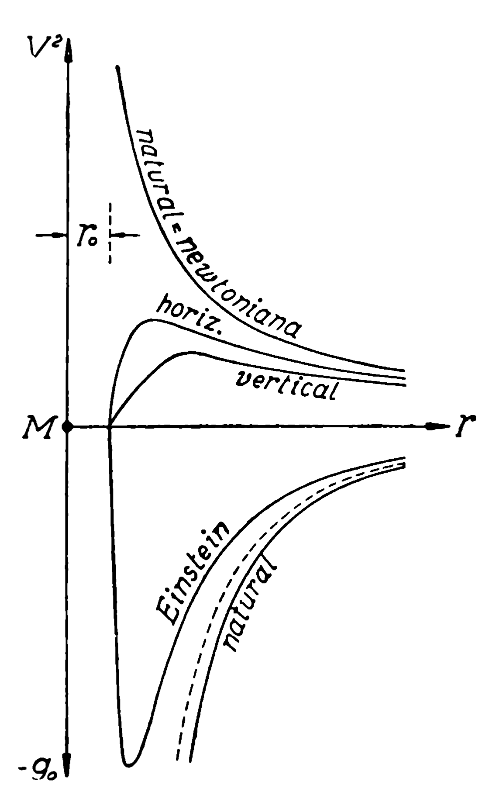


Fig. 152. — Aceleración y velocidad parabólicas de las teorías de Newton y Einstein.

A la distancia mínima r_0 de la masa M, esa fuerza de atracción sería nula. Distancias menores que r_0 no pueden entrar en consideración y la causa de ello está a la vista: para $r < r_0$, la velocidad parabólica natural sería mayor que la de

la luz. El valor absoluto de la aceleración determinada desde el exterior aumenta primero entre r_0 y 3/2 de r_0, donde pasa por un máximo, para disminuir después continuamente. Para valores de r muy próximos a r_0 la velocidad de escape, medida desde el exterior, resulta muy pequeña y en la dirección horizontal la misma adquiere un máximo para $r = 2r_0$, en tanto que en sentido vertical el máximo está en $3r_0$. ¿De dónde provienen todas estas complicaciones? Muy simple: estamos situados fuera del campo y utilizamos, en nuestras medidas, nuestras reglas y nuestros relojes, de acuerdo con los cuales hasta la velocidad de la luz varía con r y existe en cada punto una velocidad de la luz diferente para cada dirección. Con los valores naturales las cosas son mucho más sencillas, pero entonces necesitamos emplear en cada lugar reglas y relojes situados allí mismo y en tal caso, como es imposible sincronizar los relojes situados en diferentes puntos del campo, ni siquiera podría hablarse de *un tiempo*, de *nuestro tiempo*. Pero las cosas no son tan terribles, pues si se halla la ley de dependencia entre el tiempo de cada lugar y el nuestro (usted y yo estamos en la región galileana), entre las reglas de cada región y las nuestras, de la ley sencilla a que obedecen los valores naturales podremos pasar a la ley que vinculan los valores observados por nosotros. Y es eso lo que se ha hecho.

De acuerdo con la fig. 152, las discrepancias entre la teoría de Newton y la de Einstein parecen enormes, y esto es cierto si se consideran valores de r muy pequeños. Pero para valores grandes de r respecto de r_0, las curvas de la velocidad parabólica se confunden en una sola rama, lo mismo que las de la aceleración. Parecería, entonces, que, a distancias grandes de M podremos aplicar sin temor el viejo y útil concepto del potencial newtoniano. Sí y no. Sí, para velocidades pequeñas con respecto a la de la luz, y no, para velocidades grandes. En la fig. 153 se representa la aceleración exterior [53] y natural [60], en función del cuadrado de la velocidad de la partícula (en dirección vertical) en un lugar en que γ se considera prácticamente igual a uno. Por esa razón no cabe distinguir entre V y V'. La aceleración newtoniana no depende de la velocidad, pero sí depende de esa magnitud la aceleración de caída en la teoría de Einstein.

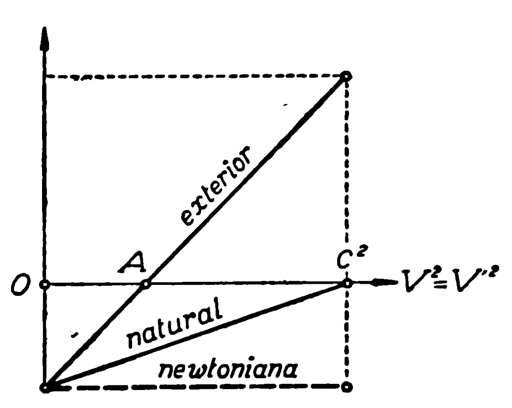


Fig. 153. — Aceleración exterior y natural en función de la velocidad.

La aceleración exterior cambia de signo con la velocidad: la atracción se convierte para un valor determinado de la velocidad de la partícula en repulsión y para ese valor (punto A) no existiría ni atracción ni repulsión. En cambio, los valores de la aceleración que se medirían en el campo mismo, los valores naturales, disminuyen linealmente, en valor absoluto, con el cuadrado de la velocidad de la partícula. Si sobre la superficie de la Tierra lanzáramos verticalmente un electrón (hacia abajo o hacia arriba, es indiferente) cuya velocidad fuera muy próxima a la de la luz, si pudiéramos medir su aceleración, encontraríamos que la misma es prácticamente igual a cero. En cambio, desde el exterior encontrarían que ese mismo electrón es repelido desde el centro de la Tierra con una aceleración casi igual a $2g$.

Del análisis que precede se desprende que la única magnitud que coincide exactamente en ambas teorías es:

la velocidad parabólica natural de Einstein

y

la velocidad parabólica newtoniana.

Este hecho tan importante permaneció totalmente inadvertido durante casi cuarenta años y aunque el autor de este libro lo encontró, siguiendo el camino que se ha expuesto en este capítulo, podría haber sido hallado calculando las geodésicas de la fórmula de Schwarzschild, de las cuales se obtiene, para la velocidad parabólica, las [12] con el valor de γ dado en [40] y de ellas, si se pasa al valor natural, se encuentra la [41].

153. **Deducción de la fórmula de Schwarzschild.** — Consideremos cierta región de un campo central y, en ella, dos acontecimientos infinitamente próximos en el espacio y en el tiempo. Ya sabemos que la velocidad *natural* de la luz es la constante c y que la misma no depende de la dirección. Para los observadores situados en la región donde ocurren los hechos, la distancia cronotópica entre los dos sucesos se expresará:

[66] $$ds^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 \quad ,$$

refiriéndose estos valores acentuados a valores naturales determinados en el campo mismo con reglas y relojes situados allí. La [66] expresa simplemente que la velocidad natural de la luz no depende de la dirección y es igual a la constante c. Si se supone que dx' coincide con la vertical del lugar y se pasa de las medidas naturales a las efectuadas desde el exterior del campo, desde la región galileana, la [66], de acuerdo con [1], [4] y [5], se escribirá:

[67] $$ds^2 = c^2 \gamma dt^2 - \frac{1}{\gamma} dx^2 - dy^2 - dz^2 .$$

Si se introducen coordenadas polares haciendo que el origen de las mismas coincida con el centro del campo, tendremos:

$$dx = dr \quad ; \quad dy = r d\theta \quad ; \quad dz = r \operatorname{sen} \theta d\varphi \quad ;$$

y la [67] se convierte en:

$$[68] \qquad ds^2 = c^2 \gamma dt^2 - \frac{dr^2}{\gamma} - r^2 d\theta^2 - r^2 \operatorname{sen}^2 \theta d\varphi^2$$

que con el valor de γ dado en [40], es la fórmula de Schwarzschild. Obsérvese que la singularidad de la misma para $r = r_0$ corresponde a los puntos donde la velocidad parabólica natural es igual a la velocidad de la luz.

Si se calculan las geodésicas de la [68], como ya se ha hecho en el capítulo IX, se obtienen *exactamente* las ecuaciones qua ya hemos hallado en forma directa en párrafos anteriores de este mismo capítulo.

154. **Variación de la masa en el campo.** — Si en la caja K′ se tiene un cuerpo en reposo respecto de ella, su masa determinada allí será m_0 y determinada desde el sistema K es

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

si V es la velocidad de K′ respecto de K. Cuando la caja K′ tenga, respecto de K, una velocidad igual a la velocidad parabólica natural de cierta región de un campo gravitatorio, éste, el campo, se comporta respecto de los observadores situados en la región galileana, como K′ respecto de K. Por esta razón, si la masa natural en reposo de un cuerpo situado en un campo es m'_0, la masa de ese mismo cuerpo medida desde el exterior del campo, m_0, será tal que

$$[69] \qquad m_0 = \frac{m'_0}{\sqrt{\gamma}} .$$

Ponemos el subíndice cero para que se tenga bien en cuenta que el cuerpo se encuentra en reposo respecto de los observadores de la región galileana.

La masa m'_0 es la masa en reposo del cuerpo determinada en el mismo lugar donde él se encuentra y coincide con la masa en reposo del cuerpo medida en un sistema inercial, pues ya hemos dicho que en una pequeña región del campo y para valores naturales vale la relatividad restringida.

La [69] debe valer para cualquier campo estático siempre que γ satisfaga a la ecuación [34] de Poisson. Introduciendo la *función* potencial newtoniana Φ, la expresión general de γ será

[70] $$\gamma = 1 + \frac{2\Phi}{c^2}.$$

Hemos puesto en bastardilla la palabra función para que se entienda que al escribir la [70] no se admite de ningún modo que el campo "deriva de un potencial" en sentido newtoniano. No, ya sabemos que en nuestro campo no existen fuerzas. Para que la [70] sea solución de la [34], la función Φ que figura en ella debe ser:

[71] $$\Phi = -G\int\frac{\mu dv}{r}$$

donde la integral se extiende a todo el volumen que contiene masas de densidad μ y r es la distancia *medida desde el exterior del campo* entre el punto que se considere y cada uno de los elementos de volumen dv.

Por lo tanto, r tendrá la forma:

[72] $$r = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}$$

y, en consecuencia, esta r *no* es la distancia natural entre dos puntos.

La [69], con el valor [70], muestra que la masa inerte de un cuerpo aumenta si al mismo se le acerca otro cuerpo de masa apreciable. Por esta razón, el propio Einstein, frente a la [69], con el valor de γ dado en [70], que él deduce de sus ecuaciones del campo y nosotros del principio de la velocidad parabólica, dice *: Si la masa aumenta por la cercanía de otras masas, puede pensarse que *toda* la masa inerte de un cuerpo está originada por las masas distribuídas en todo el universo de acuerdo con la concepción de MACH (§ 75). Obsérvese, además, el paralelismo entre el aumento de la masa y el retardo en la marcha de cualquier reloj colocado en el campo, de tal modo que podría decirse: Un reloj llevado a cierto lugar de un campo marcha más lentamente *porque* la masa de todas sus piezas aumenta; o al revés, puesto que el tiempo es lo fundamental: la masa aumenta *porque* los relojes atrasan.

155. Sobre la explicación cuántica del corrimiento hacia el rojo. — En el párrafo 135 vimos que en la deducción cuántica se admite que la frecuencia de determinada línea es igual en todas partes pero, debido a lo que podría llamarse el "cansancio de los fotones", éstos llegan a nosotros, después de escapar del campo, con una energía menor que se traduce en una menor frecuencia. En la teoría de Einstein, la frecuencia de partida de la luz es igual a la frecuencia de llegada y el corri-

* A. EINSTEIN, *El significado de la relatividad*, Espasa-Calpe Argentina, 1948. Traducción de E. Prelat, pág. 128.

miento proviene de que los átomos situados en el campo vibran en realidad con mayor lentitud.

Se presenta ahora el siguiente problema: ¿de dónde saca el fotón su energía para escapar del campo si su frecuencia permanece invariable? Sabemos ya que la masa y la energía son una misma cosa y, por lo tanto, la [69] debe valer también para la energía:

$$\text{[73]} \qquad E = \frac{E'}{\sqrt{\gamma}}$$

donde E′ representa la energía de un proceso que ocurre en una región Q y determinada allí mismo, en tanto que E será la energía del mismo proceso medida desde la región galileana. Si un fotón tiene en el punto de origen una frecuencia igual a ν_0, su frecuencia, después de escapar del campo, es también ν_0, pero la energía del tal fotón habrá disminuído en:

$$\text{[74]} \qquad \Delta E = \frac{h\nu_0}{\sqrt{\gamma}} - h\nu_0$$

que con el valor de γ dado en [40] se convierte en primera aproximación

$$\text{[75]} \qquad \Delta E = h\nu_0 \frac{GM}{c^2 r} \, .$$

Ésta es la energía que se necesita para que el fotón escape del campo, de acuerdo con lo dicho en el párrafo 135, pero no es cierto que esa pérdida de energía se traduzca en una disminución de la frecuencia.

Esto es muy importante, puesto que si no, podría pensarse que combinando el efecto relativista con aquella *deducción* cuántica, se tendría que esperar un corrimiento hacia el rojo doble del verdadero.

156. **Las ecuaciones del campo de Einstein.** — Después de haber "geometrizado" a un campo central (§ 153), que es un campo, por cierto, bien particular, se presenta por sí sola la cuestión de averiguar a qué ecuaciones deben satisfacer los g_{ik} en cualquier caso. La respuesta ya está dada: esas ecuaciones deben ser las ecuaciones del campo de Einstein (§ 116).

Nosotros, lo único que hemos hecho ha sido alterar el camino histórico, con lo cual se logra, como se ha visto, además de una enorme simplificación, precisar el sentido de las coordenadas que se emplean. Y éste ha sido siempre el gran problema de la teoría general de la relatividad. Al respecto, TERRADAS y ORTIZ dicen *: "La interpretación física de las cuatro varia-

* E. TERRADAS y R. ORTIZ, *Relatividad*, Espasa-Calpe Argentina, 1952, pág. 123.

bles x^i no siempre será fácil y aun es posible que carezca de ella". Y se transcribe a continuación lo siguiente: "Aún en el caso simple de la solución de Schwarzschild del problema de un solo cuerpo, no se ve con claridad cuál puede ser la interpretación física de las coordenadas usadas" *.

Además, para la aplicación de la teoría a casos concretos, las ecuaciones del campo resultan demasiado complicadas para poderse manejar con ellas y el principio de la velocidad parabólica puede ser utilizado entonces como una guía simple y segura. Debe tenerse presente, también, que las ecuaciones del campo de Einstein *no admiten una solución estática general.* Esto significa lo sigueinte: Imagínense dos cuerpos de masas M_1 y M_2 que se mantienen en posiciones fijas mediante vínculos sólidos. Se trata de hallar los g_{ik} del campo generado por M_1 y M_2 o sea la estructura geométrica de ese campo. Para resolver ese problema utilizando las ecuaciones del campo debe hacerse intervenir en ellas la acción de los vínculos, pues en esas ecuaciones aparecen las derivadas segundas de las coordenadas respecto de s y ya en ellas están incluídas las ecuaciones del movimiento. Si se pudieran resolver las ecuaciones del campo en un caso así, lo que darían las mismas sería el movimiento que adquirirían las dos masas puestas en presencia. Pero si ellas están fijas, ¿cómo se hace para que aparezca en las ecuaciones la acción de los vínculos? Esto es lo que no sabemos, y en tales casos es cuando podemos utilizar con provecho el principio de la velocidad parabólica. Claro está que se trata de asuntos meramente teóricos, pues creando en un laboratorio un campo estático, por la acción de masas fijas, ni aun con la balanza de torsión más sensible que podamos imaginar, podría apreciarse una diferencia entre lo previsto por la teoría de Newton y por la teoría de la gravitación de Einstein.

157. **Los potenciales gravitatorios g_{ik} de un campo estático cualquiera.** — En todas las fórmulas que hemos establecido en este capítulo, figura la velocidad parabólica natural de los puntos del campo y en ellas no aparece para nada, por lo menos explícitamente, la aceleración del lugar. Esta aceleración, que Einstein consideró en su memoria de 1911 como magnitud característica de cada región de un campo gravitatorio, ha pasado a ocupar, de este modo, un segundo puesto. ¿Dónde figura la aceleración en las fórmulas obtenidas? Figura en ellas como determinante de la vertical de cada lugar, que en un campo central coincide con la dirección radial. Tratándose de un campo estático cualquiera, generado por masas en reposo relativo,

* Cita del trabajo de A. BARAJAS, G. D. BIRKHOFF, C. GRAEF y M. SANDOVAL VALLARTA ("Phys. Rev.", 66, 1944, págs. 138-143).

mantenidas así mediante vínculos sólidos, ¿qué dirección podrá elegirse para la vertical de cada lugar? Lo más natural es *suponer* que la vertical coincide en cada punto con la dirección del gradiente de la función γ, debiendo esta función satisfacer la ecuación [34]. Con estos supuestos, la solución que hemos encontrado aplicando el principio de la velocidad parabólica y cuya demostración omitimos *, es:

$$[76] \quad \begin{cases} g_{00} = \gamma = 1 + \dfrac{2\Phi}{c^2} \quad ; \quad g_{0i} = 0 \quad ; \\ g_{ik} = -\delta_{ik} + \dfrac{2\Phi}{c^2\gamma} \dfrac{\Phi'_{x_k}\,\Phi'_{x_i}}{a^2} \quad ; \quad (i, k = 1, 2, 3) \\ a^2 = \Phi'^2_x + \Phi'^2_y + \Phi'^2_z \quad ; \quad \Phi'_{x_i} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i} \\ x_0 = ct \quad ; \quad x_1 = x \quad ; \quad x_2 = y \quad ; \quad x_3 = z \end{cases}$$

siendo δ_{ik} el delta de Kronecker (§ 92) y teniendo Φ el significado dado en § 154.

Las [76] dan, como caso particular, la solución de Schwarzschild en coordenadas cartesianas (§ 97), lo que el lector podrá verificar fácilmente. Se encuentra, además, que el determinante de los g_{ik} de [76] vale menos uno. ¿Satisfacen las [76] a las ecuaciones del campo de Einstein? Hemos podido probar, efectuando cálculos sumamente laboriosos, que las cuatro ecuaciones que corresponden a la anulación de las cuatro componentes del tensor de Riemann-Christoffel contraído, o sea

$$[77] \qquad R_{00} = R_{01} = R_{02} = R_{03} = 0$$

se satisfacen si es

$$[78] \qquad \Delta\Phi = 0 \ ,$$

pero no ocurre lo mismo con las seis componentes espaciales que restan, que sólo se anulan si el campo tiene simetría esférica. La razón de ello salta a la vista: Las ecuaciones del campo no admiten una solución estática general. Lo que precede se refiere al vacío, pero aun en *el seno de la materia,* las [76] constituyen una solución general, por lo menos aproximada, aplicable a cualquier caso estático.

Observación final. — Al establecer el principio de la velocidad parabólica hemos considerado tres sistemas de coordenadas: un sistema local adjunto a la región Q, otro sistema K situado en la región galileana G, pero respecto del cual, la región Q y las masas que generan el campo, se encuentran en reposo y, finalmente, el sistema K′ que tiene un movimiento variado respecto de K. Más general hubiera sido considerar la región Q del campo, la región galileana G, respecto de la

* Véase nuestro trabajo en los *Anales de la S. C. Argentina*, julio, 1955.

cual la región Q y las masas que generan el campo están en reposo, un sistema inercial cualquiera K y el sistema que se mueve aceleradamente respecto de K. En esta forma la traducción simbólica del principio de la velocidad parabólica podría ser:

$$\frac{Q}{G} = \frac{K'}{K}$$

siempre que K′ se mueva respecto de K con la velocidad parabólica natural característica de la región Q. En el texto hemos identificado G con K, pero tal identificación simplificadora no es, desde luego, necesaria. La ecuación simbólica que precede significa que las reglas y los relojes de Q observados desde G se comportan como las reglas y los relojes de K′ observados desde K, en el instante en que la velocidad de *traslación* de K′ respecto de K sea igual a la velocidad parabólica natural de la región Q, que no es una velocidad de traslación de la región, sino una magnitud característica de la misma.

A continuación insertamos una pequeña tabla en cuyas dos primeras columnas figuran la aceleración y la velocidad de un punto referidas a un sistema inercial cualquiera, consignándose en la tercera columna la aceleración propia del mismo punto, o sea la aceleración referida a un sistema, también inercial, y respecto del cual el punto se encontraría en reposo en el instante considerado. Los cálculos se hicieron aplicando la [98] del capítulo IV. Si el punto móvil fuera, por ejemplo, el origen del sistema acelerado K′ —la caja de Einstein— la aceleración de caída que se observaría en el interior de la misma, correspondiente al reposo, sería justamente igual y de signo opuesto, a la aceleración propia de la caja, y el peso de un kilogramo-masa, suspendido del "techo" de la misma, sería el que se indica en la cuarta columna. Se ve así claramente que el campo gravitatorio que se origina por el movimiento acelerado de un sistema, con respecto a otro inercial, depende, no sólo de su aceleración, sino también de su velocidad con respecto al mismo.

Aceleración g cm/seg²	Velocidad v/c	Aceleración propia g' cm/seg²	Peso de 1 kg-masa en kg-peso
980	0	980	1
980	0,6083	1 960	2
980	0,8858	9 800	10
490	0,6083	980	1
98	0,8858	980	1

CAPÍTULO XI

COSMOLOGÍA

Ce qui est admirable, ce n'est pas que le champ des étoiles soit si vaste, c'est que l'homme l'ait mesuré.

Anatole France.

158. **El hombre y el universo.** — Sobre la superficie de un pequeño planeta de una insignificante estrella de quinta magnitud, se arrastran unos extraños seres que, llenos de arrogancia y totalmente inconscientes de su microscópica pequeñez, osan medir el tamaño total del Universo y desentrañar su historia a partir del momento mismo en que tuvo lugar el colosal parto cósmico que le dió nacimiento.

Sí; así es. Pero sin arrogancia y con mucho trabajo.

El inmenso problema se plantea por sí mismo y el hombre trata de responder a él lo mejor que puede. Su respuesta actual no es ya, como en otros tiempos, el resultado de momentáneas inspiraciones de algunos personajes singulares que se suponían en comunicación constante con los mismos dioses. Hoy se ha superado esa etapa infantil, que tuvo, sin duda alguna, sus encantos. Cuando la credulidad era una virtud, la investigación científica tenía que ser, forzosamente, un pecado.

El pasaje del *creer* al *saber* supone el recorrido de una larga y fatigosa senda cuyas principales etapas —en lo que se refiere al problema cosmológico— han sido las que señalaremos en los párrafos que siguen.

159. **Tamaño de la Tierra.** — No le fué fácil al hombre el darse cuenta de que habitaba sobre una superficie curvada por igual en todas direcciones, y apenas si podemos representarnos hoy el enorme esfuerzo mental que fué necesario para imaginar que la inmensa mole, donde se asentaban montañas y océanos, se mantenía flotando en el espacio sin necesidad de ningún soporte material. Se quiso saber entonces el tamaño de nuestra morada y para ello hubo que medir la distancia entre dos puntos de la superficie terrestre y el ángulo formado por las verticales que pasan por esos mismos lugares. Hace ya más

de dos mil años que ERATÓSTENES (276-195 a. C.) efectuó una medida de esta naturaleza, encontrando que la circunferencia terrestre tendría una longitud de unos 250 000 *estadios*.

Es bien conocido el método empleado por Eratóstenes para efectuar esta medida. Por el tiempo empleado por las caravanas en ir desde Alejandría hasta Siena (hoy Aswan), estimó que ambas ciudades estaban separadas por una distancia de 5 000 estadios. La ciudad de Siena se encuentra situada casi sobre el mismo trópico, lo que era conocido por los relatos de los viajeros que afirmaban que en la fecha del solsticio de verano, los rayos del Sol, a mediodía, podían llegar allí hasta el fondo de los pozos más profundos. En Alejandría, en cambio, en ese mismo momento, el Sol distaba del cenit en un ángulo que era igual a la 50 ava parte de una circunferencia (7°12′) como resultaba de la medida de la longitud de la sombra arrojada por una varilla vertical. Suponiendo que ambas ciudades estuvieran situadas sobre el mismo meridiano, obtuvo así para la circunferencia terrestre el valor: 5 000 estadios × 50 = = 250 000 estadios. Considerando que un estadio egipcio es igual a 157 metros (lo que no se sabe con suficiente certeza), se obtiene para la longitud total de un meridiano terrestre, de acuerdo con aquellas medidas primitivas, el valor de 39 000 kilómetros, lo que implica un error de sólo 2,5 %. Claro está que este resultado tan perfecto es puramente casual, y ello se debe a una afortunada compensación de errores.

En 1525, el médico francés JUAN FERNEL (1497-1558) midió la distancia entre París y Amiens acoplando un contador de vueltas a una de las ruedas de su carruaje, y después de determinar la altura del Polo en ambas ciudades, llegó a la conclusión de que un grado de meridiano debía tener una longitud igual a 57 070 toesas. Como una toesa es igual a 1,949 metros resulta que, de acuerdo con estas mediciones, la longitud de un grado sería de 111,23 kilómetros. Este resultado extraordinariamente bueno sólo puede ser atribuído a la buena suerte que tuvo Fernel al descontar a ojo, de la distancia realmente medida, lo que era atribuíble a las vueltas y altibajos del camino *.

Noventa años después de la medición de Fernel, por obra del descubridor de las leyes de la refracción de la luz, W. SNELL, se produjo en este asunto de la medición de la Tierra un gran adelanto. En 1615, Snell inventó el método de la triangulación, mediante el cual puede determinarse la distancia horizontal y

---

* La medición de Fernel fué llevada a cabo tres años después de la terminación del viaje de Magallanes pues Sebastián Elcano regresó a España el 6 de septiembre de 1522, y es dable pensar que el médico francés emprendiera sus medidas impresionado por los detalles de la extraordinaria aventura que había conmovido al mundo entero. Que el valor final obtenido por Fernel haya resultado a la postre tan exacto no puede considerarse como algo totalmente casual, pues la ciudad de Amiens se encuentra casi exactamente sobre el meridiano de París, un grado más al norte, siendo el terreno de esa región sumamente llano.

en "línea recta" entre dos puntos bastante alejados de la superficie terrestre, con sólo medir en el terreno una *base* relativamente pequeña, reduciéndose el resto de la operación a la determinación de ángulos de una red de triángulos. El resultado de las medidas del propio Snell, utilizando su método, resultó ser bastante inexacto (57 300 toesas para un grado) y más inexacto aún fué el valor hallado por RICCIOLI (62 650 toesas) empleando el mismo método pero utilizando una base demasiado pequeña, por lo cual, dada la discrepancia entre ambos resultados, PICARD efectuó la misma medición entre las ciudades de Amiens y Malvoisine, entre los años 1669 y 1670, por orden expresa del rey Luis XIV. En estos trabajos de Picard se utilizaron por primera vez, para las medidas angulares, anteojos provistos de retículo, lo que implicaba un enorme adelanto con respecto a los métodos de sus predecesores, que observaban a ojo desnudo los hilos situados en los extremos de sus alidadas. Obtuvo de este modo, para la longitud de un arco de un grado de meridiano, el valor de 57 060 toesas, resultando así, para el radio de la Tierra, supuesta esférica, y expresado en unidades actuales, el valor:

$$\mathrm{R} = 6\,370 \text{ kilómetros.}$$

Este resultado tuvo una enorme importancia en la historia de la ciencia, puesto que con él pudo NEWTON verificar su ley de gravitación. De acuerdo con la misma, la aceleración de caída de los cuerpos en la superficie de la Tierra debe ser 3 600 veces mayor que la aceleración centrípeta de la Luna, puesto que se sabía, por medidas directas de la paralaje lunar, que nuestro satélite dista del centro de la Tierra, en término medio, 60 radios terrestres. Como la revolución sideral de la Luna es, aproximadamente,

$$\mathrm{T} = 27{,}32 \text{ días} = 2{,}36 \times 10^6 \text{ seg,}$$

su aceleración centrípeta, suponiendo que su órbita es circular, resulta ser, de acuerdo con los valores precedentes:

$$a = \frac{4\pi^2}{\mathrm{T}^2}(60\,\mathrm{R}) = 0{,}2709\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{seg}^2}\,.$$

De aquí, si es cierta la ley de Newton, los cuerpos deben caer en la superficie de la Tierra con la aceleración

$$g = 60^2 a = 3600 \times 0{,}2709\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{seg}^2} = 975\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{seg}^2}\,.$$

Esta verificación fué hecha por Newton en 1682, después de haberse enterado casualmente, en una reunión de la Royal Society, de las medidas efectuadas por Picard, y se cuenta que la enorme alegría experimentada al ver que se confirmaba su ley, le produjo tal estado de sobreexcitación, que por varios

días no pudo reemprender sus cálculos *. Ya en 1666 había efectuado Newton el mismo cálculo, pero debido al valor erróneo del radio de la Tierra entonces utilizado, obtuvo para *g*, con nuestras unidades actuales, 11,3 m/seg^2, y esta falta de coincidencia con respecto al valor experimental, lo hizo dudar acerca de la exactitud de la ley presentida.

Interrumpiremos aquí nuestro esbozo acerca de la historia de la determinación del tamaño y la forma de nuestra Tierra para proseguir con el amojonamiento de los cuerpos celestes más próximos a la misma.

160. Nuestro sistema planetario. — Si representarse a la Tierra como a una enorme esfera aislada en el espacio y sin soportes fué difícil, imaginar que la misma gira como un trompo que además se traslada, arrastrándonos por el espacio con velocidad vertiginosa, sin que nos demos cuenta de ello, resultaba, además de disparatado, inconcebible. Por eso no es de extrañar que el sistema de PTOLOMEO (70-147 d. C.) fuera aceptado como verdad incontrovertible durante más de 1 500 años. No obstante, ANAXÁGORAS de Clazomene (488-428 a. C.) y, sobre todo, ARISTARCO de Samos (310-230 a. C.) se habían anticipado a COPÉRNICO (1473-1543) con un sistema heliocéntrico en casi dos mil años. Pero estas ideas revolucionarias resultaron demasiado avanzadas para aquel tiempo y hubo que esperar el advenimiento de GALILEO GALILEI (1564-1642) para que las defendiera, como lo hizo, con la tenacidad de Hércules y la osadía de Don Quijote.

Entretanto, KEPLER (1571-1630) sustituye las órbitas circulares por elipses. Dada nuestra mentalidad actual, nos resulta difícil comprender lo que significó ese enorme salto. El movimiento circular era tan simple que parecía no requerir explicación alguna, no ocurriendo lo mismo, en cambio, con aquellas órbitas alargadas. De este modo, Kepler resuelve un problema y plantea otro, de cuya solución se encargó NEWTON (1642-1727). La teoría newtoniana, además de explicar el movimiento de los planetas, dió cuenta perfecta de las mareas y mostró que los misteriosos cometas cuyas apariciones inexplicables se asociaban a funestos presagios, eran simples bólidos que se movían sobre elipses muy alargadas y que se hacían visibles al pasar por su perihelio. Inmediatamente después de la aparición de la teoría de Newton, el astrónomo HALLEY encontró que la órbita de un cometa aparecido en 1682 era prácticamente la misma que la de los cometas observados en 1531 y 1607, y así pudo predecir que ese astro singular nos visitaría

* J. G. POGGENDORFF, *Historia de la Física*. Hemos utilizado la edición francesa de 1883, pág. 427.

de nuevo al cabo de 75,5 años. Así ocurrió en efecto en 1759 *, 1835 y 1910 y no se duda que, obediente a la ley newtoniana, aparecerá de nuevo a fines de 1986.

161. Distancia al Sol. — ANAXÁGORAS creía que el Sol era una masa metálica incandescente más grande que el Peloponeso y tal suposición fué considerada en su época —que era la de Pericles— extraordinariamente exagerada.

ARISTARCO trató de calcular la distancia al Sol midiendo el ángulo que forman las visuales dirigidas a aquel astro y a la Luna en el instante en que aparece iluminado exactamente la

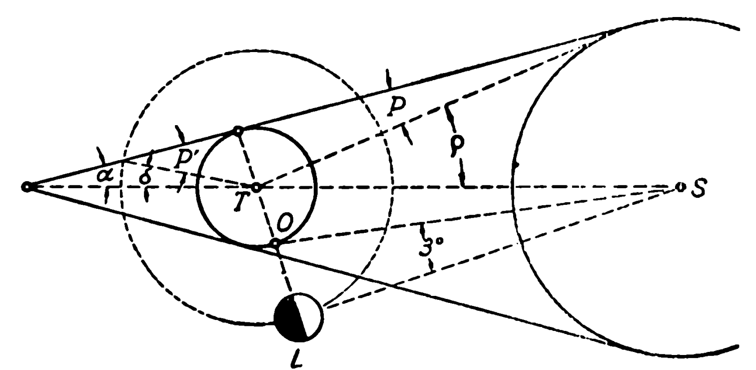


Fig. 154. — Método de Aristarco para determinar las paralajes del Sol y la de Luna.

mitad del disco lunar. Al ocurrir tal cosa, el ángulo formado por los rayos del Sol que inciden sobre la Luna y la visual dirigida desde la Tierra a nuestro satélite, debe ser igual a noventa grados (véase parte inferior de la fig. 154).

Es realmente difícil apreciar con justeza el instante preciso de la media luna, y a Aristarco le pareció que en ese momento el ángulo Luna-Observador-Sol era igual a 87°. Según esto, desde el Sol se vería al radio de la órbita lunar bajo un ángulo de unos 3° y ello significa que el Sol estaría alejado de nosotros unas 20 veces más que la Luna. Hoy sabemos que el ángulo que Aristarco consideraba que era igual a 3 grados vale sólo 9 minutos y esto hace que la distancia al Sol sea, en lugar de 20, 400 veces mayor que la distancia a la Luna. El genial astrónomo de Alejandría no se conformó con la determinación de las distancias relativas al Sol y a la Luna, sino que midió, además, de una manera sumamente ingeniosa, la distancia, en radios terrestres, que nos separa de nuestro satélite. Para ello observó, utilizando como pantalla al disco lunar, el radio angular δ del círculo obscuro que proyecta la Tierra sobre la Luna durante un eclipse, y encontró que ese radio es, aproxi-

* Se retrasó en unos 20 meses debido a las perturbaciones ejercidas sobre él por Júpiter y Saturno, pero ese retraso ya había sido calculado por *Clairaut* con anterioridad.

madamente, tres veces mayor que el radio angular ϱ' de la propia Luna. En la fig. 154 se ha indicado lo esencial de este método y siendo P el ángulo con que desde el Sol se vería al radio terrestre (paralaje solar), se ve que

$$\varrho = P + \alpha \quad ,$$

siendo α el ángulo formado por el eje y la generatriz del cono de sombra que proyecta la Tierra. Además, siendo P′ la paralaje de la Luna, se tendrá

$$P' = \alpha + \delta$$

y de estas dos relaciones,

$$P + P' = \delta + \varrho .$$

Además, por las observaciones hechas en el momento de la media luna, P debía ser igual a P′/20, y como ϱ es aproximadamente igual a 1/4 de grado y δ, 3/4 de grado, resulta que la paralaje lunar debe ser, aproximadamente, igual a un grado y la solar igual a tres minutos.

Este valor de la paralaje solar de tres minutos fué aceptado por Hiparco, Ptolomeo y todos los astrónomos posteriores durante más de 1 500 años. De acuerdo con el mismo, como nosotros vemos al radio del Sol bajo un ángulo de 15′ y desde el Sol se ve al radio de la Tierra según un ángulo 5 veces menor (3′), el radio solar tendría que ser cinco veces mayor que el radio de la Tierra. De modo, pues, que Aristarco sabía que el Sol era mucho más grande que la Tierra y por ello hacía que esta última girara alrededor de aquél. Pero Hiparco y Ptolomeo sabían lo mismo y a pesar de ello, para conservar la fijeza de la Tierra, prefirieron hacer girar en su torno a la mole solar.

Hubo que esperar casi dos mil años para qué las medidas de Aristarco fueran superadas. Primero debió esperarse a que se asentara la concepción heliocéntrica por obra de Copérnico, Kepler y Galileo, pero esto no era aún suficiente. Las medidas de las distancias relativas de los diferentes planetas al Sol se conocían perfectamente, pero para determinar las mismas en radios terrestres se hacía necesario medir la paralaje, en un momento dado, de algún planeta cercano. Tal cosa podría lograrse si dos observadores situados en lugares bien alejados de la Tierra midieran con toda precisión las pequeñas distancias angulares que separan al planeta, en un momento dado, de las estrellas más cercanas. El telescopio, por obra de Galileo, se usaba para la observación astronómica desde el año 1610, pero solamente unos treinta años después se le acopló al mismo un retículo con micrómetro, que permitía medir ángulos pequeños. Algo más tarde, en 1656, el holandés HUYGHENS (1629-1695) inventa el reloj de péndulo y pronto se constru-

yeron relojes de esa clase con los que podía medirse, y con gran precisión, intervalos de tiempo que no fueran demasiado grandes. Con esto ya se tenían las armas necesarias para efectuar una buena medida de la paralaje del Sol y en 1672, G. D. CASSINI (1625-1712), director del Observatorio Astronómico de París, que se había fundado en el año anterior, se propuso medir, con la colaboración de JUAN RICHER (1630-1696), la paralaje de Marte. Para esto, Richer fué enviado a Cayena, capital de la Guayana francesa, para que observara desde allí con toda minuciosidad el rastro del planeta proyectado sobre el fondo del cielo que jalonaban las estrellas vecinas. Desde París, el mismo Cassini hacía lo propio y de este modo, de la comparación de los resultados de ambas observaciones, pudo saberse el valor del ángulo con que desde Marte se vería, por esa época, el radio de la Tierra. Y pudo saberse, al fin, de ese modo, la distancia real que nos separa del Sol. Ella resultó ser, utilizando nuestras unidades actuales, igual a 140 millones de kilómetros. Hoy día sabemos que la paralaje solar media es igual a 8″,80, lo que hace que la distancia media Sol-Tierra sea:

$$D = 149{,}5 \times 10^6 \text{ kilómetros,}$$

habiéndose tomado al hacer el cálculo, para el radio ecuatorial terrestre, el valor de 6 378 kilómetros.

162. **Velocidad de la luz.** — Acabamos de ver cómo, en 1672, Cassini logró medir la distancia efectiva de la Tierra al Sol, pudiendo conocerse así, con exactitud hasta entonces insospechada, las dimensiones reales de nuestro sistema planetario. Cuatro años más tarde, el astrónomo dinamarqués OLAF RÖMER (1644-1710), que se encontraba trabajando en el Observatorio de París desde su fundación en 1671, explicó las irregularidades observadas en los eclipses del primero de los satélites de Júpiter, en la forma que todo el mundo conoce, encontrando que un rayo de luz, para recorrer el diámetro de la órbita terrestre, debe emplear un tiempo de unos mil segundos. Para valorar lo que representó el hallazgo de Römer debe tenerse presente que Descartes y Kepler consideraban que la luz se propagaba instantáneamente, o sea con velocidad infinita.

Por extraño que nos parezca hoy semejante concepción, estaba ella tan arraigada, que los científicos de entonces rechazaron hasta con indignación la explicación römeriana. En ese rechazo general hubo dos significativas excepciones: Huyghens y Newton, a pesar de lo cual sólo cincuenta años después, en 1725, al descubrir BRADLEY el fenómeno de la aberración, se aceptó por todo el mundo que la luz se propaga con velocidad finita, cuyo valor, de acuerdo con las determinaciones más recientes, es

$$c = (2{,}997\,76 \pm 0{,}000\,06)\,.\,10^{10} \text{ cm/seg.}$$

163. Dinámica del sistema planetario. — Newton se limitó a considerar a los planetas como puntos materiales o, a lo más, como esferas perfectas sometidas únicamente a la acción del Sol. Claro está que había pensado que los planetas ejercerían entre sí acciones mutuas que "serían capaces de producir irregularidades que irían en aumento hasta que todo el sistema necesitara una reforma, en la cual debería intervenir la mano del mismo Creador".

En principio, la dinámica de Newton, que se refiere al movimiento de partículas, es capaz de resolver cualquier problema dinámico, pues un sistema cualquiera será siempre un conjunto de puntos materiales. Pero la solución efectiva de problemas concretos, tales como el que se plantea al tratar de la estabilidad de nuestro sistema planetario, o el *simple* movimiento de un trompo, requieren afinar las armas analíticas de ataque. Un paso importante en tal sentido fué dado por JUAN D'ALAMBERT (1717-1783), al establecer el principio que lleva su nombre y con cuyo auxilio pudo dar cuenta del movimiento de precesión y nutación del eje de la Tierra, lo que también había sido explicado por LEONARDO EULER (1707-1783).

En 1788 apareció la *Mecánica analítica* de LAGRANGE (1736 1813), y las ecuaciones allí establecidas, en las cuales intervienen las coordenadas generalizadas, que son los parámetros que determinan el sistema, se transformaron, por obra de HAMILTON (1805-1865), en 1834, en las llamadas "ecuaciones canónicas" de la mecánica clásica.

Antes de finalizar el siglo XVIII, en 1796, PIERRE SIMÓN LAPLACE (1749-1827), publicó su famosa obra en seis tomos titulada *Exposición del sistema del mundo,* y en 1799 apareció el primer tomo, de los cinco que la completarían, de su *Mecánica celeste.* Al escribir estas obras monumentales, Laplace se propuso *dar una solución completa de los grandes problemas mecánicos que plantea el sistema solar, haciendo que la teoría se encuentre en tan estrecha coincidencia con la observación, de manera tal, que no tengan ya cabida en las tablas astronómicas las ecuaciones empíricas.* Los frutos más espectaculares de semejante esfuerzo se obtuvieron más tarde, con el descubrimiento de Neptuno, hecho por LEVERRIER (1811-1877) en el año 1846 y el de Plutón, efectuado por TOMBAUGH en 1930. En ambos casos se sospechó la existencia de los mismos a raíz de pequeñas discrepancias entre la trayectoria real observada de determinado planeta y la trayectoria teórica que debería seguir, teniendo en cuenta las acciones del Sol y de los demás planetas conocidos. De ese modo, el movimiento irregular de Urano permitió a Leverrier y también al astrónomo inglés ADAMS (1819-1892), predecir la existencia de un nuevo cuerpo celeste y calcular la posición que debía tener el mismo en determinado momento. Y el planeta, que se bautizó luego

con el nombre de Neptuno y que tiene la apariencia de una débil estrella de octava magnitud, fué encontrado efectivamente en un lugar del cielo que apenas difería en un grado de la posición previamente calculada. La historia se repitió 80 años más tarde y las irregularidades del movimiento de Neptuno permitieron descubrir a Plutón, que aparece como una estrella de décimoquinta magnitud.

El empeño puesto por los teóricos en cumplir el programa de Laplace, excluyendo totalmente de las tablas astronómicas las ecuaciones empíricas, permitió saber finalmente que en el caso de Mercurio quedaba sin explicación posible un lento corrimiento de su perihelio, lo que constituyó desde el comienzo el apoyo más fuerte de la teoría de la gravitación de Einstein (§ 127).

164. Distancia a las estrellas más próximas. — Al terminar el siglo XVIII, nuestro sistema planetario nos era conocido casi perfectamente. De la medición efectiva de una pequeña base terrestre habíamos saltado a la determinación del radio de la Tierra, y de allí, efectuando un nuevo salto mucho más grande, pudo saberse cuántas veces cabía nuestra regla unitaria en el radio de la órbita que recorre la Tierra en el término de un año. Se conocían también las masas del Sol y de los demás planetas de nuestro sistema, pues la determinación hecha por CAVENDISCH de la constante G de la ley newtoniana, utilizando la balanza de torsión, data de 1798. Pero de las distancias estelares no se sabía aún absolutamente nada. Se sospechaba que las estrellas debían encontrarse a distancias "enormes", pues únicamente así podía explicarse que no aparecieran desplazándose sobre la bóveda celeste al ser observadas desde nuestra Tierra móvil que, en sólo seis meses, pasa de un punto a otro que dista del primero 300 millones de kilómetros. Si hubiera una estrella situada en la dirección del polo de la eclíptica y a una distancia tal de nuestro Sol, que desde ella se viera el radio de la órbita terrestre bajo un ángulo de un minuto, nosotros, desde la Tierra, tendríamos que ver a la tal estrella describiendo, en el término de un año, una circunferencia de radio igual a un minuto. En general, si la latitud celeste de la estrella es θ, desde ella se vería la órbita terrestre, supuesta circular, como una elipse cuyos semiejes serían

$$a = \mathrm{P} \quad ; \quad b = \mathrm{P} \operatorname{sen} \theta \quad ;$$

siendo P la paralaje de la estrella, y ésos deberían ser justamente los semiejes de la elipse sobre la cual se vería trasladarse a la misma, desde la Tierra, en el término de un año. Si TYCHO BRAHE, uno de los observadores más escrupulosos de todos los tiempos, no aceptó el sistema de Copérnico, ello se debió —aparte de razones de orden teológico— a la circuns-

tancia de que no le había sido posible observar en las estrellas movimiento parláctico alguno. Al respecto afirmaba que una paralaje de *sólo un minuto,* no le hubiera podido pasar inadvertida y tal paralaje, hoy lo sabemos, representa una distancia de unos 20 días-luz, y sabemos, también, que la luz tarda en llegar a nosotros, desde la estrella más cercana, más de cuatro años. Pero para saber estas cosas hubo que esperar hasta el año 1838, en que F. W. BESSEL (1784-1846) efectuó, desde Königsberg, la primera medida merecedora de confianza de una paralaje estelar. Para esta primera determinación eligió la estrella 61 de la constelación del Cisne y con un anteojo provisto de un micrómetro construído especialmente para tal objeto, fué midiendo durante varios meses, y con el máximo posible de precisión, la distancia angular entre aquella estrella y las que aparecían en el campo del anteojo situadas en su inmediata proximidad. De este modo, como los efectos producidos por la refracción del aire eran comunes al grupo de estrellas considerado, al igual que la elipse de aberración, el desplazamiento relativo que se medía provenía únicamente de la diferencia de paralajes entre las estrellas del grupo. Como sólo era apreciable el desplazamiento de la estrella 61 respecto de las restantes, que conservaban entre sí sus posiciones relativas, concluyó Bessel que la paralaje de estas últimas, por su pequeñez, no entraba en consideración y podía suponerse que la misma fuera igual a cero. En cambio, para la 61 del Cisne obtuvo un desplazamiento que, en seis meses, se hacía igual a 0″,64, siendo entonces su paralaje igual a 0″,32. A una paralaje de 1″ corresponde una distancia de

$$1 \text{ parsec} = 206\,265 \text{ unidades astronómicas,}$$

siendo la unidad astronómica igual al radio de la órbita terrestre, y es fácil ver que un rayo de luz necesita un tiempo de 3,26 años para recorrer el trayecto de un parsec:

$$1 \text{ parsec} = 3{,}26 \text{ años-luz.}$$

De acuerdo con esto, la distancia que nos separa de la 61 del Cisne, según las medidas de Bessel, sería:

$$D = \frac{1}{0{,}32} \text{ parsec} = 3{,}12 \text{ parsec} = 10{,}5 \text{ años-luz.}$$

A partir del año 1838 se hicieron cada vez más numerosas y precisas las determinaciones de paralajes estelares y esta operación se mejoró y simplificó notablemente a comienzos del presente siglo, al substituir la observación visual por la fotográfica, en la que se miden con todo cuidado, al microscopio, los desplazamientos de las imágenes estelares de fotografías tomadas de determinada región del cielo en diferentes épocas del año. De esta manera puede llegarse a la determinación de

paralajes del orden del centésimo de segundo que corresponden a distancias de unos 300 años-luz. La estrella más cercana es α del Centauro, cuya paralaje de 0″,76 nos dice que la luz de la misma tarda en llegar a nosotros 4,3 años, en tanto que la Espiga, de la constelación de la Virgen, está a una distancia de 100 parsec, igual a 326 años-luz. Digamos, finalmente, que en estas determinaciones, después de medir el desplazamiento de una estrella sobre el fondo constituído por las estrellas más alejadas, que son, por lo mismo, en general, las más débiles, debe descontarse del desplazamiento medido el originado por el movimiento propio de la estrella. Si Bessel eligió la estrella 61 del Cisne para efectuar su primera determinación, ello se debió a que la misma era una de las estrellas que se desplazaba con mayor rapidez: 52 segundos de arco en 10 años, lo que hacía sospechar que su distancia al Sol sería una de las más pequeñas.

165. **Distancia a las estrellas más remotas.** — El método de la determinación directa de la paralaje, que podríamos llamar trigonométrico, ya no es aplicable si las distancias son superiores a los 300 años-luz. No obstante, por otros procedimientos, el hombre ha conseguido averiguar las veces que su regla de medida cabría en las distancias que nos separan de los objetos más remotos que se alcanzan a percibir con los telescopios actuales. Existen estrellas cuya luminosidad intrínseca se conoce a partir de ciertas características de las mismas perfectamente determinables, y midiendo fotométricamente su brillo aparente, es fácil calcular su distancia. Entre esas estrellas, las que han resultado más útiles en tal sentido, son las conocidas con el nombre de CEFEIDAS, por ser δ, de la constelación de Cefeo, la estrella prototipo del grupo. El brillo de estas estrellas varía con regularidad cronométrica entre un mínimo y un máximo, pudiéndose determinar su período de variabilidad con toda precisión. En algunas de ellas ese período de pulsación —se les llama también estrellas pulsátiles por suponerse que las variaciones de brillo obedecen a variaciones concomitantes del volumen— no alcanza a un día, en tanto que en otras llega a ser hasta de varios meses. En el año 1913, la directora de la sección fotográfica del Observatorio de Harvard, Miss LEAVITT (1868-1921) descubrió, después de estudiar el comportamiento de cientos de Cefeidas de la Nube menor de Magallanes, que el brillo medio de las mismas era tanto mayor cuanto mayor era su período. La Nube de Magallanes es un remotísimo conglomerado de estrellas que ni siquiera pertenece a nuestra galaxia, por lo cual puede suponerse que todas las estrellas de la misma se encuentran, prácticamente, a la misma distancia de nosotros. Siendo así, la ley descubierta por Miss Leavitt relaciona el período de las Cefeidas con su

brillo intrínseco, que se mide por la llamada magnitud absoluta M, que está relacionada con la magnitud aparente m y la paralaje P en la forma que veremos a continuación. Por convención se ha estipulado que una estrella de primera magnitud tiene un brillo 100 veces mayor que otra de sexta, conviniéndose, además, que el número que indica la magnitud *disminuya* en progresión aritmética a medida que el brillo *aumenta* en progresión geométrica. Estas convenciones, en apariencia raras, tienen, sin embargo, su explicación. El primer fotómetro estelar ha sido el ojo humano y el hombre designó a las estrellas más brillantes del cielo como de primera magnitud, a las que le seguían en brillo, de segunda, y así, sucesivamente, hasta llegar a las de sexta, que son apenas perceptibles. Subjetivamente, parece que una estrella de primera magnitud tiene un brillo equivalente a dos de segunda, tres de tercera, etcétera. Pero si se mide fotométricamente el brillo de las estrellas, comparándolas con la luz de una fuente artificial, se ve que si se designa por 1 el brillo de una estrella de sexta magnitud, las de quinta brillan, aproximadamente, 2,5 veces más, las de cuarta 2,5 veces más que las de quinta, y, en consecuencia, $2{,}5^2$ respecto de las de sexta y así sucesivamente. En consecuencia, la convención hecha, entre magnitudes por un lado y brillos fotométricos por otro, se resume en el esquema siguiente:

magnitud m:	6	5	4	3	2	1
brillo I′:	1	A	A^2	A^3	A^4	$A^5 = 100$

De aquí resulta que la constante A debe valer:

$$[1] \qquad 5 \log A = 2 \quad ; \quad \log A = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

$$A = 2{,}512.$$

La escala anterior se conviene en prolongarla en ambos sentidos, atribuyendo el brillo unitario *uno* a la estrella tipo de primera magnitud, resultando así:

magnitud m:	3	2	1	0	—1	—2
brillo I:	A^{-2}	A^{-1}	1	A	A^2	A^3

todo lo cual se resume en la fórmula:

$$[2] \qquad I = A^{1-m} \quad ,$$

de la que se obtiene, tomando logaritmos decimales y teniendo en cuenta el valor de A, la expresión

$$[3] \qquad m = 1 - \frac{5}{2} \log I \quad ,$$

donde el logaritmo corresponde a la base diez.

La estrella α de la Cruz del Sur se toma como estrella tipo de primera magnitud y para ella es $I = m = 1$. Sirio, la estrella más brillante del cielo, tiene un brillo 10,7 veces mayor que α de la Cruz y se le asigna, en consecuencia, una magnitud negativa igual a —1,57. Se ha encontrado, comparando la luz que recibimos del Sol con una fuente artificial de luz intensa que se contrasta luego con otra más débil y así en varias etapas, que la intensidad luminosa del mismo es:

$$I_{(Sol)} = 1{,}225 \times 10^{11}$$

veces mayor que el de la estrella α de la Cruz del Sur, por lo cual la magnitud del Sol, resulta ser, de acuerdo con [3]:

[4] $$m_{(Sol)} = -26{,}72.$$

La escala de magnitudes y brillos (o intensidades) que acabamos de dar se debe a POGSON, el cual tomó como base para la misma, la ley *psicofísica* establecida en 1851 por G. T. FECHNER, según la cual, el incremento subjetivo de una sensación sería proporcional al incremento relativo de la excitación. Según esto, si llamamos dm al incremento de la magnitud correspondiente a una variación dI de la intensidad, se tendrá

$$dm = -K\frac{dI}{I} \quad ,$$

siendo K una constante. La integración de la ecuación anterior da:

$$m = -K \ln I + C \quad ,$$

y si se conviene que para $I = 1$ debe ser $m = 1$ resulta $C = 1$. Conviniendo, además, que m debe ser igual a 6 (6ª magnitud) para $I = 0{,}01$, se obtiene sin dificultad la [3].

La magnitud absoluta M de una estrella es la magnitud con que aparecería si estuviera situada a una distancia de 10 parsec, desde donde se vería el radio de la órbita terrestre bajo un ángulo de un décimo de segundo. Si llamamos I_0 al brillo que parecería tener la estrella situada a la distancia de 10 parsec, por la [3] podremos escribir

[5] $$M = 1 - \frac{5}{2}\log I_0.$$

Si llamamos d a la distancia que nos separa de la estrella considerada y d_0 a la distancia de 10 parsec, se tendrá

$$\frac{I}{I_0} = \frac{d_0^2}{d^2} \quad ,$$

pues el brillo con que vemos a un foco luminoso, en este caso la estrella, varía en razón inversa al cuadrado de la distancia. Como, por otra parte, las distancias están en razón inversa de

la paralaje, correspondiendo d_0 a una paralaje de 0″,1, se tendrá:

$$\frac{I}{I_0} = \frac{P^2}{(0,1)^2} \quad ; \quad I_0 = \frac{I}{100\, P^2} \quad ;$$

si P es la paralaje de la estrella expresada en segundos de arco. Llevando este valor de I_0 a la [5] y teniendo en cuenta la [3], resulta:

[6] $$M = m + 5 + 5 \log P \quad ,$$

que es la fórmula de Pogson, que vincula la magnitud absoluta de una estrella con su magnitud aparente y su paralaje. Por otra parte, si designamos por T al período de las Cefeidas expresado en días, la ley de Leavitt puede expresarse así:

[7] $$m = a + b \log T \quad ,$$

donde a y b son constantes. En realidad, a y b dependen del tipo espectral de la estrella y sus valores, aun para un mismo tipo espectral, no son rigurosamente constantes. La fórmula anterior fué establecida observando las Cefeidas de la Nube menor de Magallanes, por lo cual puede suponerse, para todas las estrellas consideradas, una paralaje común igual a P_0. De este modo, llevando la [7] a la [6], se tiene:

$$M = a + b \log T + 5 + 5 \log P_0 \quad ,$$

o sea

[8] $$M = a' + b \log T \quad ,$$

donde a' es otra constante. De este modo, la ley de Leavitt [8] relaciona ahora la magnitud absoluta media de una Cefeida con su período T de variabilidad, que se puede medir perfectamente. Los valores de las constantes a' y b se determinan a partir de Cefeidas de paralaje conocida y se ha encontrado de este modo que la [8], para períodos comprendidos entre 10 y 40 días, puede escribirse aproximadamente así:

[9] $$M = 0,5 - 2,5 \log T \quad ,$$

estando T expresado en días y siendo los logaritmos de base diez. Una vez conocida la magnitud absoluta media M, por la [6] se calcula la paralaje P y de ella se obtiene, de inmediato, la distancia a que se encuentra la Cefeida estudiada.

Es frecuente medir la intensidad intrínseca de las estrellas comparando la luz total emitida por las mismas con la irradiada por el Sol. La magnitud absoluta del Sol se calcula fácilmente después de conocer su magnitud aparente dada por la [4], resultando, así, que nuestro astro rey es una débil estrella de quinta magnitud. Más precisamente:

[10] $$M_{(Sol)} = 4,85 \quad ,$$



La Vía Láctea a simple vista.

con lo cual, para la luminosidad L de una estrella de magnitud absoluta M, se obtiene:

[11] $$L = 2{,}512^{4{,}85-M}.$$

HUBBLE, aplicando el método de las Cefeidas, determinó la distancia a la Nube menor de Magallanes y encontró que la misma sería de unos 100 mil años-luz, en tanto que la nebulosa de Andrómeda se encontraría a un millón de años-luz. Hoy sabemos que estas distancias halladas por Hubble deben ser multiplicadas por dos. La razón es que la [9] vale para Cefeidas de una clase especial, perteneciente a la llamada población II de BAADE (1941). Las estrellas más brillantes de aquella clase son gigantes rojas, y existen otras Cefeidas pertenecientes a la población I de Baade, donde las más brillantes son gigantes azules. Para estas últimas, en lugar de la [9], y también para períodos comprendidos entre 10 y 40 días, vale aproximadamente la expresión:

[9′] $$M = -1 - 2{,}5 \log T.$$

Una variación de 1,5 en la magnitud hace variar al logaritmo de la paralaje, de acuerdo con [6], en 0,3, cuyo antilogaritmo es 2. Las estrellas utilizadas por Hubble en sus determinaciones eran Cefeidas pertenecientes a la población I, y correspondía entonces aplicar la [9′] y no la [9], como él hacía, pero esto no se sabía hasta hace muy poco. El descubrimiento reciente de que existen, en realidad, dos familias distintas de Cefeidas, trajo consigo la duplicación de todos los valores que se asignaban a las distancias de los objetos situados más allá de nuestra galaxia. En cambio, los valores de las distancias de las estrellas y cúmulos de nuestra galaxia no experimentaron variación alguna, pues dichos valores se habían determinado utilizando Cefeidas pertenecientes a la población II de Baade.

166. **Nuestra galaxia.** — Al dirigir GALILEO su pequeño telescopio hacia el reguero de leche que escapó del seno de la diosa Juno al amamantar a Hércules, encontró que el enorme cinturón lácteo, que abraza por completo a la bóveda celeste, estaba formado en realidad por un abigarrado conjunto de incontables estrellas. La línea media de la Vía Láctea se aparta muy poco de una circunferencia máxima de la esfera celeste que se llama *ecuador galáctico* y que corta al ecuador celeste según un ángulo de 62°. Para explicar el enorme apretujamiento de estrellas en las cercanías del ecuador galáctico, imaginó W. HERSCHEL que nuestro Sol era simplemente una estrella de un conjunto de miles de millones que se agrupaban en el interior de un enorme elipsoide de revolución, muy achatado, que se parecería a una gran lente biconvexa. Encontrándonos nosotros,

junto a nuestro Sol, en algún punto del interior de ese conglomerado estelar, vemos a la mayor parte de las estrellas proyectadas en las cercanías del borde circular de la lente cuyo plano coincide con el del ecuador galáctico. De acuerdo con minuciosos estudios de carácter estadístico, en los que se toma en cuenta la distribución de las estrellas observables en todas direcciones y sus distancias, sabemos hoy que nuestro sistema galáctico puede asimilarse —*grosso modo*— a una lente biconvexa de diámetro igual a 100 mil años-luz y cuyo espesor en la parte central sería de unos 5 mil años-luz. Nuestro Sol, y por lo tanto nosotros, estaríamos situados en las proximidades del plano ecuatorial y separados del centro del sistema por una distancia de 35 mil años-luz. Dicho centro se encuentra en la dirección de Sagitario, donde se halla la región más densa, en estrellas, de la Vía Láctea. Se sospechó desde el comienzo que todo el sistema galáctico debía tener un movimiento de rotación alrededor del eje menor del elipsoide, pues sólo así podía explicarse el achatamiento del mismo y el equilibrio dinámico de todas las masas que tienden a juntarse en el centro. Pero fué difícil revelar experimentalmente esta rotación de conjunto por la circunstancia de que el Sol y las estrellas vecinas se mueven aproximadamente con la misma velocidad. A pesar de estas dificultades, LINDBLAD en 1925 y OORT en 1927, constataron que las estrellas situadas entre nuestro Sol y el centro galáctico parecen, en promedio, desplazarse en cierto sentido, en tanto que las que se encuentran entre nosotros y el borde lo hacen en sentido opuesto. Las velocidades de las estrellas determinadas desde nuestra Tierra y referidas luego al Sol nos dan, en realidad, las diferencias de velocidades entre el Sol mismo y las estrellas, si nos referimos ahora a un sistema que no participe del movimiento de conjunto. Se encontró, así, que nuestro Sol se mueve con una velocidad que es, aproximadamente, igual a 270 kilómetros por segundo sobre una circunferencia cuyo centro se encuentra en el centro de la galaxia. De este modo, debe emplear unos 250 millones de años en dar una vuelta completa. Las estrellas más cercanas al centro galáctico se mueven con una velocidad lineal algo mayor y las más alejadas con velocidad menor, pareciéndose entonces la rotación del conjunto de todas las estrellas al movimiento de los planetas en torno del Sol y no al de una rueda rígida. Claro está que todo esto se refiere al movimiento global, pues, en detalle, el movimiento de cada estrella en particular puede ser mucho más complicado. Existen en el interior de nuestra galaxia conjuntos o racimos de estrellas constituídos por millones de ellas, que, para mantenerse en equilibrio dinámico, deben tener también un movimiento rotatorio particular. Esta rotación de toda nuestra galaxia permite estimar la masa total de la misma. Si llamamos v a la velocidad de traslación de la

Tierra alrededor del Sol y r al radio de la órbita terrestre, siendo M_s la masa del Sol, podremos escribir:

[12] $$\frac{GM_s}{r^2} = \frac{v^2}{r} \quad ; \quad GM_s = v^2 r .$$

Consideremos ahora que casi toda la masa M_G de nuestra galaxia se halla concentrada en las cercanías del centro galáctico alrededor del cual gira nuestro Sol sobre una órbita, que supondremos circular, de radio R, y con velocidad V. En tal caso, si suponemos que pueda aplicarse la [12], se tendrá:

[13] $$GM_G = V^2 R \quad ,$$

y dividiendo [13] por [12], se obtiene:

[14] $$\frac{M_G}{M_s} = \frac{V^2 R}{v^2 r} .$$

Siendo

$$V = 270 \frac{\text{km}}{\text{seg}} \quad ; \quad v = 30 \frac{\text{km}}{\text{seg}} \quad ;$$

$$r = 150\,000\,000 \text{ km} = 8{,}3 \text{ minutos-luz}$$

$$R = 35\,000 \text{ años-luz} = 35\,000 \times 365 \times 24 \times 60 \text{ min-luz}$$

resulta

[15] $$\frac{M_G}{M_s} = 1{,}8 \times 10^{11} .$$

Tomando para la masa del Sol el valor

[16] $$M_s = 2 \times 10^{33} \text{ gramos}$$

la masa de nuestra galaxia sería

[17] $$M_G = 3{,}6 \times 10^{44} \text{ gramos} .$$

Claro está que este valor, dada la manera como ha sido hallado, sólo puede representar una aproximación grosera. Para la densidad media δ_G de la materia contenida en nuestra galaxia, suponiendo que la misma pueda considerarse como un elipsoide de revolución cuyos semiejes son:

$$a = 50\,000 \text{ años-luz}$$

$$b = 2\,500 \quad \text{,,} \quad \text{,,}$$

y siendo el volumen igual a $\frac{4}{3} \pi a^2 b$, tomando para la masa total el valor dado en [17], resulta:

[18] $$\delta_G = 1{,}6 \times 10^{-23} \frac{\text{gramos}}{\text{cm}^3} .$$

167. Las nebulosas extragalácticas. — En el interior de nuestra galaxia tenemos, además de miles de millones de estrellas de todas clases, gigantes y enanas, rojas y azules, agrupadas a veces en cúmulos donde aparecen en un espacio relativamente pequeño millones de ellas, otros objetos celestes tales como las nebulosas gaseosas, brillantes y obscuras, y las llamadas nebulosas planetarias. Pero esto no constituye todo nuestro universo. Existen otros objetos celestes situados más allá de nuestra galaxia. De ellos sólo cuatro son visibles a simple vista: las dos Nubes de Magallanes, y las nebulosas de Andrómeda y del Triángulo. Pero los telescopios modernos revelan la existencia de unos cien millones de formaciones semejantes, esparcidas al parecer al azar, según todas las direcciones del espacio. La distancia que nos separa de esas nebulosas extragalácticas —algunas irregulares, otras elípticas y la enorme mayoría de ellas espiraladas— debe computarse en general en millones y centenares de millones de años-luz. La determinación de la paralaje por el método de las Cefeidas sólo es aplicable a las más cercanas, puesto que ni los telescopios más potentes logran separar las estrellas constitutivas de las otras. Sin embargo, es posible determinar por otros procedimientos la distancia a que se encuentran esas nebulosas remotas. Para ello se determina, por procedimientos fotométricos, la magnitud total aparente m de toda la nebulosa como si se tratara de una única estrella. Si se conociera la magnitud absoluta M, también total, de la misma nebulosa, la paralaje se podría calcular de inmediato aplicando la [6]. Se encuentra que, para ciertos tipos de nebulosas extragalácticas, la magnitud absoluta total M es constante. Para la enorme mayoría de ellas puede tomarse

[19] $$M = -16 \quad ,$$

resultando, de aquí y de la [6]:

[20] $$\log P = \frac{M - 5 - m}{5} = \frac{-21 - m}{5} \; .$$

Ejemplo: Si la magnitud aparente m es igual a 14, resulta para la distancia d:

$$\log P = -7 \quad ; \quad P = (10^{-7})'' \quad ;$$

$$d = \frac{1}{P} = 10^7 \text{ parsec} \quad ; \quad d = 3{,}26 \times 10^7 \text{ años-luz,}$$

o sea unos 30 millones de años-luz.

Se acostumbra expresar estas distancias en *megaparsec* (1 millón de parsec):

$$1 \text{ megaparsec} = 3{,}26 \times 10^6 \text{ años-luz.}$$

Si la magnitud absoluta de las nebulosas extragalácticas es constante y su distribución en el espacio —estadísticamente— también lo es, debe existir una relación sencilla entre el total de nebulosas que se perciben con brillo igual o mayor correspondiente a la magnitud m y las que se perciben con brillo igual o superior al de la magnitud $m+1$. Si llamamos M a la magnitud absoluta, que supondremos igual para todas las nebulosas, las que tengan un brillo igual o superior a la magnitud m se encontrarán en el interior de una esfera de radio d que, de acuerdo con la [20], valdrá:

$$\log d = \log\left(\frac{1}{P}\right) = \frac{-M+5+m}{5}.$$

Las que aparezcan con brillo superior a la magnitud $m+1$ estarán en el interior de una esfera de radio d' tal, que

$$\log d' = \frac{-M+5+m+1}{5}.$$

Restando estas dos últimas expresiones, se tiene:

$$\log\frac{d'}{d} = \frac{1}{5}.$$

Si el número de nebulosas contenidas en determinado volumen es constante, y llamamos N_{m+1} al número total de las mismas que percibimos con brillo superior correspondiente a la magnitud $m+1$, y N_m al número de las que vemos con un brillo mayor al que determina la magnitud m, esos números serán proporcionales a los volúmenes de las dos esferas concéntricas de radios d' y d, o sea:

$$\frac{N_{m+1}}{N_m} = \frac{d'^3}{d^3},$$

y, en consecuencia, por la anterior:

$$\log\frac{N_{m+1}}{N_m} = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

Resulta, así:

[21] $$N_{m+1} = 3{,}98 \,.\, N_m ,$$

que aproximadamente puede escribirse:

[22] $$N_{m+1} = 4\,N_m.$$

Esta última relación fué encontrada por Hubble en 1934, tomando en consideración hasta las nebulosas de décimooctava ($m=18$) magnitud total aparente. Del resultado experimental [22], siguiendo el camino inverso al de nuestra exposición, se llega a la conclusión de que las nebulosas extragalácticas deben estar distribuídas en el espacio de manera aproximada-

mente uniforme, debiendo tener, además, todas ellas, una magnitud absoluta integral poco diferente de la dada en [19]. De acuerdo con cómputos directos de H. SHAPLEY y Miss A. AMES de 1932, se perciben en toda la bóveda celeste 1 025 nebulosas, cuyo esplendor total es superior a la décimotercera magnitud,

[23] $$N_{13} = 1025 \quad ,$$

y de acuerdo con la [22], se tendrán unas 4 000 cuyo brillo integral superará la décimocuarta magnitud. Según esto, deberían percibirse en todo el cielo unas 3 000 nebulosas extragalácticas de magnitud aparente total, comprendida entre $m = 13$ y $m = 14$.

Conociendo la distancia a que se encuentra una nebulosa extragaláctica determinada, puede hallarse de inmediato su tamaño con sólo medir su diámetro angular. Se encuentra, así, que el orden de grandor de las nebulosas extragalácticas es igual al de nuestra propia galaxia. También ha sido posible determinar espectroscópicamente el movimiento de rotación de algunas de ellas, pudiéndose estimar, así, la masa total de las mismas. Resulta, de este modo, que esas masas están comprendidas entre

$$10^{11} \quad \text{y} \quad 2 \times 10^{11} \quad \text{masas solares.}$$

Teniendo en cuenta lo que precede y el valor de la masa total de nuestra galaxia, dado por la [15], se concluye que cada una de estas remotas nebulosas son sistemas que no difieren esencialmente en nada de nuestro propio sistema galáctico.

Hemos dicho que las nebulosas extragalácticas están distribuídas, al parecer, de una manera aproximadamente uniforme según todas las direcciones del espacio. Pero esto, si se interpreta como resultado directo de lo que se observa, está muy lejos de ser verdadero. Se encuentra que el número de nebulosas extragalácticas contenidas en cada grado cuadrado de la esfera celeste aumenta, en término medio, a medida que crece la latitud galáctica, siendo notable la ausencia casi total de nebulosas de esta clase en las proximidades del ecuador galáctico. Ello se debe a una especie de *niebla cósmica* que llena totalmente el espacio de nuestra galaxia, por lo cual, el espesor de la capa absorbente que deben atravesar los rayos de luz antes de llegar hasta nosotros, es tanto mayor cuanto más pequeño sea el seno de la latitud galáctica. Esta absorción de la luz debe tenerse muy en cuenta cuando se calculan las distancias de las estrellas de nuestro sistema galáctico que están más alejadas de nosotros. Para ellas no es rigurosamente aplicable la [6], puesto que ya no se puede considerar que el brillo varíe en razón inversa del cuadrado de la distancia. Por este motivo, antes de descubrirse el efecto absorbente de la materia interestelar, se atribuían a nuestra galaxia dimensiones que eran

casi el doble de las consideradas como válidas en la actualidad.

Contrariamente a lo que ocurre en el espacio ocupado por nuestra galaxia, totalmente lleno de esa tenue niebla absorbente, debe considerarse que los espacios intergalácticos son casi perfectamente transparentes para la luz.

168. **Densidad media de la materia del Universo.** — Como las galaxias están repartidas en el espacio de manera aproximadamente uniforme, la densidad media de la materia diseminada por todas partes deberá ser constante, si consideramos volúmenes que contengan en su interior cientos o miles de galaxias. Para tener una idea acerca del valor de esa densidad media, consideremos que cada galaxia tiene una masa igual a la de nuestro sistema galáctico. Siendo así, las 1 025 galaxias de magnitud total aparente menor de 13 que se observan en todo el cielo tendrán, de acuerdo con [17], una masa μ tal, que

$$\mu = 1\,025 \times 3{,}6 \times 10^{44} \text{ gramos}.$$

De acuerdo con la [20], todas estas galaxias se encontrarán en el interior de una esfera de radio R tal, que

$$\log R = \log \frac{1}{P} = \frac{21 + 13}{5} = 6{,}8 \quad ,$$

de donde

$$R = 6{,}3 \times 10^{6} \text{ parsec} = 1{,}95 \times 10^{25} \text{ cm}$$

$$\frac{4}{3} \pi R^3 = 3{,}1 \times 10^{76} \text{ cm}^3.$$

De este modo, para la densidad media ϱ, se obtiene:

$$\varrho = 1{,}2 \times 10^{-29} \frac{\text{gramos}}{\text{cm}^3}.$$

No existe seguridad alguna acerca del valor de esta magnitud. Cabe presumir que si se tuvieran en cuenta masas no luminosas, que deben existir esparcidas por todo el espacio, como lo revela la moderna *radioastronomía*, así como la radiación cósmica, se obtendría para la densidad media de la materia un valor bastante mayor del que acabamos de consignar. Todo lo más que se puede decir hoy de esa magnitud es que debe estar comprendida entre:

$$10^{-29} \frac{\text{gm}}{\text{cm}^3} < \varrho < 10^{-27} \frac{\text{gm}}{\text{cm}^3}$$

por lo cual, en nuestros ejemplos, tomaremos el valor

$$[24] \qquad \varrho = 10^{-28} \frac{\text{gramos}}{\text{cm}^3}.$$

Este valor de la densidad media es el que tendría el hidrógeno si se enrareciera de tal modo que hubiera una sola molécula por cada 30 litros y corresponde a la densidad que resultaría si se repartiera uniformemente la materia de nuestra galaxia en un cubo cuya arista fuera igual a un millón y medio de años-luz.

169. **¿Será infinito el Universo?** — Ante todo, ¿tenemos derecho de plantear semejante cuestión? ¿Puede darse a la misma una respuesta con pleno sentido científico? Al afrontar cuestiones de esta clase, que implican necesariamente una extrapolación, debe suponerse que las leyes de la naturaleza que el hombre ha descubierto desde su rinconcito llamado Tierra, se aplican por igual en todas partes. Sentado esto, es posible que las consecuencias *observables* extraídas de la hipótesis de la infinitud del universo no coincidan con las que habría que esperar si se admitiera que el mismo, aunque muy grande, es finito.

Comencemos, pues, por admitir, como GIORDANO BRUNO, que nuestro universo se extiende indefinidamente en todas direcciones, existiendo en todas partes estrellas y nebulosas como las que se encuentran en las proximidades de nuestro Sol. Pensemos ahora en una enorme cáscara esférica de radio R y espesor dR con centro en nuestra Tierra y cuyo volumen sería igual a $4\pi R^2 dR$. El número de cuerpos luminosos existentes en esta cáscara será proporcional a su volumen, y como la iluminación dL que produce la misma está en razón inversa del cuadrado de R, se tendrá

$$dL = KdR \quad ,$$

siendo K cierta constante que sería igual a la iluminación producida por las cáscaras de espesor unitario. Para obtener la iluminación total, de acuerdo con lo supuesto, debe integrarse la ecuación anterior entre $R = 0$ y $R = \infty$, y así se obtiene que nuestro cielo debería aparecer como infinitamente brillante. Lo más notable es que este brillo infinito estaría producido fundamentalmente por los cuerpos más lejanos. De modo análogo resultaría que, si se admite la validez estricta de la ley de Newton, el potencial gravitatorio debería ser infinito en todas partes, resultando la fuerza de atracción, igual al gradiente del potencial, totalmente indeterminada. Si queremos, a toda costa, que nuestro universo sea infinito y de densidad media igual en todas partes, tendríamos que modificar de manera apropiada las leyes de la naturaleza que conocemos o que creemos conocer. Tal cosa se ha hecho efectivamente y C. NEUMANN y H. VON SEELIGER demostraron que si el potencial gravitatorio Φ tuviera por expresión



Nebulosa espiral de los Perros de Caza. Observatorio de Mount Wilson.

Parte central de la nebulosa de Andrómeda. Observatorio de Mount Wilson.

[25] $$\Phi = -\frac{GM}{r} e^{-r\sqrt{\lambda}} \quad ,$$

siendo λ una constante, en lugar de la ecuación de Poisson $\Delta\Phi = 4\pi G\varrho$, donde ϱ es la densidad de la materia, se tendría

[26] $$\Delta\Phi - \lambda\Phi = 4\pi G\varrho \quad ,$$

y esta ecuación admite una solución en la que ϱ es constante en todas partes. Tal cosa es posible porque, de acuerdo con [25], la fuerza disminuye más rápidamente de lo que aumenta el cuadrado de *r*.

Más adelante veremos cómo ha sido encarado el problema de la infinitud del universo dentro del marco de la teoría de la relatividad.

170. **La fuga unánime de las galaxias lejanas.** — Las líneas de los espectros de las nebulosas extragalácticas aparecen, en general, corridas hacia el rojo. Interpretando este corrimiento como producido por el efecto Doppler, resulta que aquéllas se alejan de nosotros. Si se calcula la velocidad de alejamiento de las nebulosas refiriendo la misma al centro del sistema galáctico, o sea, descontando en cada caso la velocidad de 270 kilómetros por segundo que tiene nuestro Sol debido a la rotación de toda la galaxia, se encuentra que aquella velocidad con que parecen huir todas las nebulosas lejanas *es proporcional a su distancia.* Ésta es la famosa ley establecida por Hubble en 1929, utilizando observaciones hechas por él y por SLIPHER y HUMASON. Si la distancia D se expresa en megaparsec y la velocidad de alejamiento V en kilómetros por segundo, la ley puede expresarse así:

[27] $$V = HD = 260 \,.\, D.$$

Hasta hace muy poco tiempo, se le asignaba a la constante H de Hubble un valor doble del que dejamos consignado, a causa de que a la distancia D se le atribuía un valor igual a la mitad del que se supone válido en la actualidad, como se ha dicho al final del párrafo 165.

De acuerdo con la [27], a una distancia de 115 megaparsec (375 millones de años-luz) corresponde una velocidad de alejamiento que llega a ser igual a un décimo de la velocidad de la luz. Se han observado, efectivamente, nebulosas que huyen con esa velocidad y para las cuales la línea amarilla del sodio ($\lambda = 5\,890$ Å) aparece en la región roja del espectro ($\lambda = 6\,480$ Å). Como

$$1 \text{ megaparsec} = 3{,}086 \times 10^{19} \text{ km}$$

la constante H de Hubble resulta valer

[28] $$H = \frac{260 \text{ km/seg}}{3{,}086 \times 10^{19} \text{ km}} = 8{,}43 \times 10^{-18} \frac{1}{\text{seg}}$$

y como

$$1 \text{ seg} = \frac{1}{365 \times 24 \times 60 \times 60} \text{ año}$$

se obtiene:

[29] $$H = 2{,}66 \times 10^{-10} \frac{1}{\text{año}}.$$

El valor inverso de H es, entonces:

[30] $$\frac{1}{H} = 3{,}76 \times 10^{9} \text{ años.}$$

Para comprender lo que significa esta extraordinaria expansión, imaginemos que en este momento, ahora, se invirtiera el sentido de la velocidad de todas las nebulosas, con lo cual todas ellas aparecerían acercándose hacia nosotros. En tal caso, estaríamos verdaderamente preocupados al ver que todas ellas se nos vienen encima. Llenos de ansiedad trataríamos de averiguar el tiempo de vida que aun le quedaría a nuestro mundo antes de perecer aplastado por el choque simultáneo de todas las galaxias. Porque así sería efectivamente: las más lejanas llegarían al punto de reunión exactamente al mismo tiempo que las próximas, dado que la mayor distancia se compensa con una mayor velocidad. Si durante todo el camino las nebulosas se aproximaran con movimiento uniforme, el tiempo T que tardarían en reunirse se calcula de inmediato por la [27], resultando, teniendo en cuenta [30]:

[31] $$T = \frac{D}{V} = \frac{1}{H} = 3{,}76 \times 10^{9} \text{ años.}$$

Pero es seguro que la catástrofe se tendría que producir un poco antes, puesto que cabe presumir que al acercarse las galaxias unas a las otras, su velocidad, por efecto de la mutua atracción, debería ir aumentando. El tiempo que le quedaría de vida a nuestro mundo tendría que ser, en consecuencia, algo menor que el dado por [31]. Veremos más adelante que ese tiempo T_0 debe ser igual a los 2/3 de T, si se admite que el espacio es euclídeo, o sea:

[32] $$T_0 = \frac{2}{3} \frac{1}{H} = 2{,}5 \times 10^{9} \text{ años.}$$

Pero, felizmente, y en la actualidad, las galaxias se alejan en lugar de acercarse y el tiempo dado por [32] sería, entonces, el tiempo transcurrido entre el momento en que toda la materia del universo se encontraba reunida en "un punto" y el mo-

mento actual. En otros términos: T_0 sería la edad de nuestro universo, que habría nacido a raíz de una explosión para la cual no existen calificativos adecuados.

171. **El universo cilíndrico de Einstein.** — En el año 1917, Einstein encaró el problema cosmológico tratando de explicar cómo las nebulosas extragalácticas pueden mantenerse en equilibrio sin irse unas encima de las otras a causa de la atracción recíproca. Por esa época no se conocía la expansión de Hubble, y la solución propuesta por Einstein es estática. En su universo, respecto de un sistema de coordenadas convenientemente elegido, la materia se mantiene prácticamente en reposo y, a lo más, puede permitírsele tener pequeños movimientos caóticos sin importancia alguna.

Las dificultades que se originan al suponer que el universo es infinito (§ 169), las resuelve Einstein considerando que nuestro espacio físico de tres dimensiones es un espacio esférico de Riemann: volumen finito pero ilimitado (§§ 81, 82, 83). La métrica del universo de Einstein (espacio-tiempo) estaría dada, entonces, de acuerdo con la [41] del § 82, por la expresión:

[33] $$ds^2 = c^2dt^2 - A^2(d\Theta^2 + \operatorname{sen}^2 \Theta d\theta^2 + \operatorname{sen}^2 \Theta \operatorname{sen}^2 \theta d\varphi^2) \quad ,$$

donde A sería "el radio" del espacio esférico tridimensional que se cerraría sobre sí mismo. En cambio, el tiempo se extendería de manera uniforme desde menos infinito a más infinito. Por esta razón, al universo cuadridimensional de Einstein se le llama cilíndrico. Naturalmente que todo esto se refiere al universo considerado globalmente y prescindiendo de las curvaturas parciales que se originan en los lugares donde la materia está más condensada. Los abultamientos locales del espacio y del tiempo no intervienen en esta descripción general, así como al considerar la superficie de la Tierra en conjunto, dejamos de tomar en cuenta sus montañas y sus precipicios. La [33] correspondería a la métrica del espacio-tiempo si se considerara a la materia pulverizada y repartida luego uniformemente de modo que la densidad fuera en todas partes constante.

Sin embargo, es fácil ver que los g_{ik} de la [33] no satisfacen a las ecuaciones del campo (§ 116, fórmula 35):

[34] $$(R_{ik} - \tfrac{1}{2}g_{ik}R) + KT_{ik} = 0 \quad ,$$

y por tal motivo Einstein agregó a las mismas el llamado *término cosmológico*. Las ecuaciones así completadas son:

[35] $$(R_{ik} - \tfrac{1}{2}g_{ik}R) + KT_{ik} = \lambda g_{ik} \quad ,$$

donde λ es la llamada *constante cosmológica*. Si se supone que, respecto del sistema de coordenadas elegido, la materia está en

reposo y su densidad es en todas partes igual a la constante ϱ (flúido incoherente, párrafo 117, fórmula 46), se encuentra sin dificultad, haciendo los cálculos correspondientes, que las [35] se satisfacen con los g_{ik} de [33] si se cumple:

[36] $$\lambda = \frac{1}{A^2}$$

siendo

[37] $$A^2 = \frac{2}{K\lambda} = \frac{c^2}{4\pi G\varrho} \quad ,$$

habiendo tenido en cuenta la relación que vincula a la constante K de Einstein con la G de la ley newtoniana (§ 117, [61], y también § 149, [39]). Si se toma para ϱ el valor [24], el radio A del universo de Einstein sería:

[38] $$A = 3{,}28 \times 10^{27} \text{ cm} = 3{,}46 \times 10^{9} \text{ años-luz.}$$

Si multiplicamos ambos miembros de [37] por $2\pi^2 A$, obtenemos

[39] $$2\pi^2 A^3 = \frac{\pi}{2} \frac{c^2}{G\varrho} A \quad ,$$

donde el primer miembro, de acuerdo con la [45] del § 82, sería el volumen total de nuestro espacio hiperesférico. En consecuencia, la masa total del universo de Einstein sería:

[40] $$M = \frac{\pi}{2} \frac{c^2}{G} A \quad ,$$

que vincula la naturaleza geométrica del espacio, puesto que A es el radio de la hiperesfera espacial, con la masa M total del universo considerado como un todo. Teniendo en cuenta el valor de A dado en [38], se obtiene para M:

[41] $$M = 7 \times 10^{55} \text{ gramos.}$$

Observemos que el valor de la constante cosmológica λ, de acuerdo con [36] y [38], es sumamente pequeño, por lo cual las ecuaciones [35] se reducen en sus aplicaciones a nuestro sistema planetario a las [34] y de este modo no se alteran los resultados obtenidos por la teoría general de la relatividad antes de introducir en la misma el término cosmológico.

172. **El universo esférico de De Sitter.** — En el mismo año 1917, el astrónomo holandés W. DE SITTER demostró que las ecuaciones [35] de Einstein se satisfacen con la métrica:

[42] $$ds^2 = c^2 \cos^2 \Theta dt^2 - A^2(d\Theta^2 + \operatorname{sen}^2 \Theta d\theta^2 + \operatorname{sen}^2 \Theta \operatorname{sen}^2 \theta d\varphi^2),$$

siempre que el radio A de la hiperesfera espacial tenga el valor

[43] $$A^2 = \frac{3}{\lambda} \,,$$

que resulta, así, completamente independiente de la densidad ϱ de la materia, puesto que las [35] quedan satisfechas haciendo en ellas $T_{ik} = 0$. En el universo de Einstein la geometría del espacio queda determinada por la materia y ni siquiera podría decirse, de acuerdo con el mismo, que esa materia está "contenida en el espacio", pues no habiendo materia no habría ni espacio geométrico ni nada. En el universo de De Sitter no ocurre lo mismo. El espacio geométrico, considerado globalmente, tendría una estructura que sería *independiente* de la materia *contenida* en él. El radio de la hiperesfera de la parte espacial del universo de De Sitter estaría determinado por el valor que pudiera tener la constante cosmológica λ. Las medidas astronómicas podrían permitir, en principio, determinar el radio A de la parte espacial del universo y de allí se podría obtener el valor de λ.

Una consecuencia notable de la solución de De Sitter es la relativización del tiempo que trae consigo la misma, en contraposición del retorno al tiempo absoluto que implica la solución [33] de Einstein, donde aparece un "tiempo cósmico" t independiente del lugar. En otros términos: en la solución de Einstein la velocidad de la luz, *determinada desde cualquier lugar*, es constante, mientras que en la solución de De Sitter dicha velocidad es, como se ve de inmediato por la [42]:

[44] $$V = c \cos \Theta \,.$$

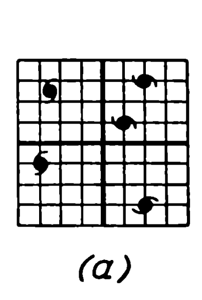
Entiéndase bien que la velocidad *natural* de la luz, determinada en cada punto, es la constante c, pero la [44] nos da el valor de dicha velocidad en el punto Q, si se la determina desde otra región P, separada de Q por el ángulo Θ. Para $\Theta = \pi/2$, que serían los puntos del ecuador de la hiperesfera, respecto del polo, que es el origen de coordenadas donde *nosotros* nos encontramos, la velocidad de la luz sería igual a cero. Eso significa que, con respecto a nosotros, los relojes situados a la "distancia" Θ estarían en reposo. Haciendo un cambio de coordenadas conveniente, de modo tal que a $\Theta = \pi/2$, corresponda una distancia infinita, es posible, de ese modo, dar cuenta del corrimiento hacia el rojo que se observa en las galaxias lejanas. Esta interpretación del efecto Hubble, en el universo estático de De Sitter, es sumamente sugestiva y ha dado origen a interesantes trabajos de investigación.

173. La solución dinámica de Friedmann. — La primera solución no estática de las ecuaciones del campo se debe al matemático ruso A. FRIEDMANN (1922), cuyas ideas fueron desarrolladas y precisadas más tarde por G. LEMAITRE, A. S. EDDINGTON, R. C. TOLMAN, el mismo Einstein y otros. Friedmann demostró que las ecuaciones del campo de Einstein, *sin el agregado del término cosmológico*, o sea las ecuaciones [34], (o las [35] haciendo en ellas $\lambda = 0$), admiten una solución general, para una densidad media de la materia constante en todas partes, pero la tal solución no puede ser de ningún modo estática. El agregado del término cosmológico a las ecuaciones primitivas del campo equivale a suponer la existencia de una presión negativa o repulsión que contrarrestaría los efectos gravitatorios corrientes. Sin ese agregado, el "polvo cósmico" no podría mantenerse en equilibrio y las masas dispersas en el espacio, tenderían, inevitablemente, a juntarse. Al respecto, el propio Einstein dice *: "La introducción de este segundo término constituye una complicación de la teoría que reduce seriamente su simplicidad lógica. Su introducción sólo puede justificarse por la dificultad debida a la casi inevitable suposición de una densidad media finita de materia. Debemos observar, dicho sea de paso, que en la teoría de Newton se presenta la misma dificultad". Y más adelante (pág. 156), agrega: "Si se hubiese conocido la expansión de Hubble en la época de la creación de la teoría general de la relatividad, jamás se hubiese introducido el término cosmológico. En la actualidad parece mucho menos justificada la introducción de ese término en las ecuaciones del campo, pues dicha introducción ha perdido la única justificación original, que era la de conducir a una solución natural del problema cosmológico". A pesar de lo que precede, son muchos los autores que prefieren seguir "arrastrando" el término cosmológico aun al tratar de las soluciones no estáticas del campo, con lo cual la teoría pierde mucho de su "simplicidad lógica" y los cálculos se complican innecesariamente.

La solución no estática de Friedmann, cuya importancia estriba en dar cuenta del efecto descubierto por Hubble en 1929, consiste, fundamentalmente, en suponer que la parte espacial, tridimensional, de nuestro universo, experimenta una especie de crecimiento o expansión continua. De este modo, la distancia entre dos puntos materiales que se encuentran en reposo con respecto a determinado sistema de coordenadas, puede ser, no obstante, variable. Para comprender esto, imaginemos (fig. 155) que dibujamos sobre una superficie elástica de goma una red de coordenadas, de manera que a los puntos materiales

* El significado de la Relatividad, Espasa-Calpe, Buenos Aires, 1948, pág. 138.

que podríamos considerar incrustados en la superficie, le corresponderán valores fijos de x y de y, aun cuando estiremos la goma y pasemos del estado (a) al (b). Si la superficie que estiramos es un plano, la distancia entre dos puntos ya no será



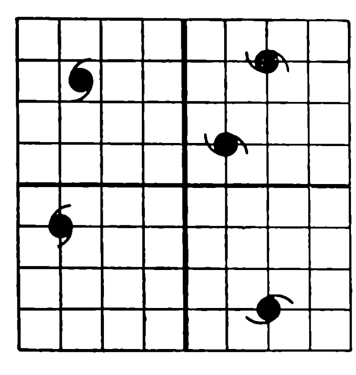


Fig. 155. — Puntos con coordenadas fijas y distancia variable.

$$D_0 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

sino

[45] $$D = A\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = AD_0 \quad ,$$

donde A podría considerarse como cierta función del tiempo. Si derivamos la [45] respecto del tiempo, tenemos, indicando con V la velocidad de alejamiento de dos puntos:

[46] $$D' = V = A'D_0.$$

Dividiendo [46] por [45], se obtiene:

[47] $$\frac{V}{D} = \frac{A'}{A} \quad ; \quad V = \frac{A'}{A} D.$$

En un momento dado, cualquiera sea la ley con que la goma se va estirando, el cociente A′/A tendrá determinado valor H:

[48] $$\frac{A'}{A} = H \quad ;$$

con lo cual la [47] podrá escribirse:

[49] $$V = HD \quad ,$$

y los puntos materiales se alejan, en un momento dado, con una velocidad que es proporcional a la distancia que los separa. Claro está que la goma de nuestro ejemplo podría ser la superficie de una esfera o de una pseudoesfera. En uno y otro caso, al aumentar el radio de las mismas, los puntos con coordenadas fijas en esas superficies se irán separando. Probemos, entonces, como posible solución de las ecuaciones del campo la siguiente expresión:

[50] $$ds^2 = c^2dt^2 - A^2d\sigma^2 \quad ,$$

donde A *es sólo función del tiempo* y $d\sigma$ es el elemento espacial de una variedad de tres dimensiones. Friedmann encontró

que los g_{ik} de la [50] pueden ser soluciones de las ecuaciones [34] siempre que la curvatura de la variedad definida por $d\sigma$ sea constante. En consecuencia, se tienen tres soluciones posibles:

$$\text{Curvatura de } d\sigma \begin{cases} \text{nula;} \\ \text{constante positiva;} \\ \text{constante negativa;} \end{cases}$$

pero no existe ninguna solución estática en que A sea constante.

El caso euclídeo de curvatura nula es el más simple y el elemento lineal [50] tiene, entonces, la forma

[51] $$ds^2 = c^2dt^2 - A^2(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Se encuentra sin dificultad que, para que las ecuaciones [34] se satisfagan con los g_{ik} dados en [51], siendo ϱ constante en todas partes y considerando a la materia del universo como un flúido incoherente (§ 117), la función A del tiempo t debe satisfacer las ecuaciones siguientes:

[52] $$2\frac{A''}{A} + \left(\frac{A'}{A}\right)^2 = 0 \quad ;$$

[53] $$\left(\frac{A'}{A}\right)^2 = \frac{1}{3}Kc^2\varrho.$$

Introduciendo la constante H de Hubble dada en [48] y teniendo en cuenta que, según la misma [48], debe ser:

$$A'' = H'A + HA' \quad ,$$

o sea

$$\frac{A''}{A} = H' + H\frac{A'}{A} = H' + H^2 \quad ,$$

las ecuaciones del campo [52] y [53] se reducen a las siguientes:

[54] $$2H' + 3H^2 = 0 \quad ;$$

[55] $$H^2 = \frac{1}{3}Kc^2\varrho.$$

La segunda de estas ecuaciones vincula la densidad media de la materia del universo con la constante de Hubble y de ella, reemplazando la constante K de Einstein por su expresión en función de la constante newtoniana G, se obtiene:

[56] $$\varrho_E = \frac{3H^2}{8\pi G}.$$

Hemos indicado por ϱ_E a este valor de la densidad media, para que se tenga presente que dicho valor corresponde a un espa-

cio *tridimensional euclídeo*. Reemplazando en [56] los valores numéricos de H [28] y de G (§ 112, [2]), se obtiene:

[57] $$\varrho_E = 1{,}27 \times 10^{-28} \frac{\text{gramos}}{\text{cm}^3}.$$

Se ve que el orden de magnitud de la densidad media *actual* coincide con el que se obtiene de la observación directa y esta coincidencia puede considerarse como una prueba muy favorable a la teoría.

De la ecuación [54] se obtiene H en función del tiempo t:

[58] $$dt = -\frac{2}{3}\frac{dH}{H^2} \quad ; \quad t - t_0 = \frac{2}{3}\frac{1}{H} \quad ;$$

de la cual se obtiene para la edad actual del universo el valor ya consignado en [32].

174. Espacio con curvatura diferente de cero. — Para el caso general el elemento espacial $d\sigma$ de [50] puede escribirse

[59] $$d\sigma^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\left[1 + \frac{a}{4}(x^2 + y^2 + z^2)\right]^2},$$

siendo a una constante. La isotropía espacial queda bien de manifiesto en [59], dado que en ella las tres coordenadas $x\, y\, z$ figuran del mismo modo. Si se calcula la curvatura C de [59] se encuentra que $C = a$, y la curvatura de una sección espacial, para $t =$ constante, de la [50], resulta ser a/A^2. Para $a = 0$ se tiene el caso euclídeo ya considerado y si $a = +1$, el valor de A es la medida, en un momento dado, del radio de la hiperesfera espacial. Si $a = -1$, A sería el radio de una hiperseudoesfera de tres dimensiones en un instante determinado.

Con los valores de los g_{ik} de [50], considerando en ella a $d\sigma$ dado por [59], se encuentra que para satisfacer a las ecuaciones del campo [34] debe cumplirse:

[60] $$\frac{a}{A^2} + \frac{1}{c^2}\left(\frac{A'}{A}\right)^2 + \frac{2}{c^2}\frac{A''}{A} = 0 \quad ;$$

[61] $$\frac{a}{A^2} + \frac{1}{c^2}\left(\frac{A'}{A}\right)^2 - \frac{1}{3}K\varrho = 0.$$

En estas expresiones a/A^2 es la curvatura de la sección espacial para $t =$ constante. Si $a = 0$, se obtienen las [52] y [53] correspondientes al caso euclídeo ya considerado. Si se resta de la [60] la [61], se obtiene:

[62] $$\frac{A''}{A} + \frac{1}{6}Kc^2\varrho = 0.$$

Como ϱ y A son esencialmente positivas, se ve que las ecuaciones del campo [60] y [61] no pueden satisfacerse si A es constante, pues A″ debe ser, por [62], necesariamente negativa.

De la [61], introduciendo la constante H de Hubble, de acuerdo con [48], se tiene:

[63] $$\frac{1}{3} Kc^2\varrho - H^2 = \frac{ac^2}{A^2}$$

y según sea:

[64] $$\varrho \gtreqless \frac{3H^2}{Kc^2} = \frac{3H^2}{8\pi G} = \varrho_E \quad ,$$

la sección espacial del universo en un momento dado tendrá una curvatura constante positiva, o constante negativa, o nula.

En consecuencia, podremos saber si nuestro espacio físico es abierto o cerrado, determinando con cierta precisión los valores de ϱ y H que figuran en [63], ya que el segundo miembro de la misma es igual a la curvatura del espacio, y si se hace $a = 1$ podríamos conocer así el radio A de la parte espacial de nuestro universo en el momento actual. Desgraciadamente, como ya se ha dicho, la determinación de ϱ ofrece grandes dificultades y de la observación, lo único que se puede sacar en limpio es que el orden de grandor de ϱ es igual al de ϱ_E. Pero admitamos que pudiera determinarse la densidad media actual ϱ con aproximación aceptable, pudiéndose conocer así el valor del cociente

[65] $$\frac{\varrho}{\varrho_E} = \Delta .$$

Si Δ resultara exactamente igual a uno, nuestro espacio sería euclídeo y si fuera mayor que uno, tendría una curvatura, constante en un momento dado, y positiva. Introduciendo el valor de Δ en [63], haciendo en ella $a = 1$, obtenemos:

[66] $$H^2(\Delta - 1) = \frac{c^2}{A^2} .$$

Nos interesa conocer ahora el radio A de nuestro espacio en función del tiempo. Para ello debemos integrar la [60], la cual haciendo $a = +1$ puede escribirse

[67] $$c^2 + 2AA'' + A'^2 = 0 .$$

En esta expresión se considera a A como función del tiempo y los acentos indican derivadas respecto de t. Considerando al tiempo como función del radio A, podremos escribir:

$$A' = \frac{dA}{dt} \quad ; \quad \frac{1}{A'} = \frac{dt}{dA} = t' \quad ; \quad A' = \frac{1}{t'} \quad ;$$

si indicamos también con acento la derivada respecto de A. Se tiene también:

$$A'' = \frac{d}{dt}\left(\frac{dA}{dt}\right) = \frac{d}{dA}\left(\frac{1}{t'}\right)\frac{dA}{dt} = \left(\frac{1}{t'}\right)' \cdot \frac{1}{t'}$$

con lo cual, haciendo

[68] $$\frac{1}{t'} = u$$

la [67] se escribe

[69] $$c^2 + 2Auu' + u^2 = 0.$$

Como el acento indica derivada respecto de A, esta expresión se transforma en

[70] $$c^2 + (Au^2)' = 0$$

que se integra de inmediato dando:

[71] $$c^2A + Au^2 = c^2A_0 \quad ,$$

habiendo llamado c^2A_0 a la constante de integración. Como, de acuerdo con [68], es:

[72] $$u = \frac{1}{\frac{dt}{dA}} = \frac{dA}{dt} \quad ,$$

la [71] da:

[73] $$\left(\frac{dA}{dt}\right)^2 = c^2\frac{A_0 - A}{A}.$$

Como el primer miembro de [73] es necesariamente positivo, el radio A deberá ser siempre menor o igual que A_0. Cuando A alcance el valor máximo A_0, la expansión de Hubble será, en ese momento, nula. Ya la [73] permite conocer la marcha de A en función del tiempo (fig. 156). Desde el "instante de la creación" $t = 0$, hasta $t = T_0$, el espacio se expande para luego contraerse entre T_0 y $2T_0$. La edad de nuestro universo estaría dada por la abscisa del punto P, si suponemos que la ordenada de P mida el radio actual A de nuestro espacio hiperesfé-

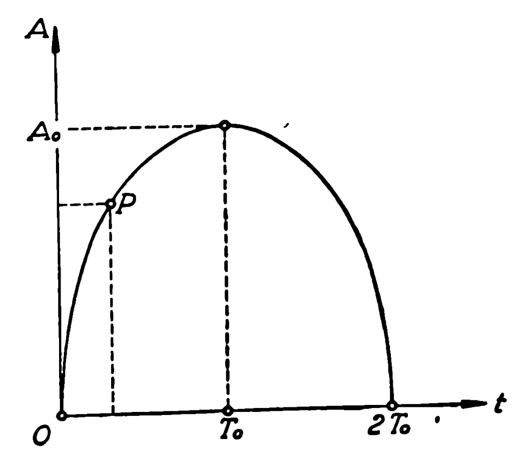


Fig. 156. — Variación del radio del espacio en función del tiempo.

rico. La determinación precisa de esta edad sería posible si se conociera, además del valor actual de la constante de Hubble, el valor de Δ [65]. De la [73] se obtiene para esa edad incógnita t:

$$[74] \qquad t = \frac{1}{c}\int_0^A \sqrt{\frac{A}{A_0 - A}}\, dA.$$

Debemos calcular esta integral y poner luego el resultado en función de magnitudes determinables experimentalmente, que en nuestro caso son H y Δ. Para el cálculo de la integral indefinida, hagamos el cambio de variables

$$[75] \qquad \frac{A}{A_0 - A} = x^2$$

con lo cual se obtiene

$$\int \sqrt{\frac{A}{A_0 - A}}\, dA = 2A_0 \int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2}$$

y por ser

$$\frac{x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\right),$$

como el último término es la derivada de $x/(1+x^2)$, se obtiene para la [74]:

$$[76] \qquad t = \frac{A_0}{c} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{A}{A_0 - A}} - \frac{\sqrt{A}\sqrt{A_0 - A}}{c}.$$

Pongamos ahora el radio actual A y el radio máximo A_0 en función de los valores actuales de A y Δ. De la [66] se obtiene:

$$[77] \qquad A = \frac{c}{H\sqrt{\Delta - 1}}.$$

Para el radio máximo A_0 se tendrá, dado que en ese punto es $H = 0$, de acuerdo con la [63]:

$$\frac{1}{3} Kc^2\varrho_0 = \frac{c^2}{A_0^2},$$

siendo ϱ_0 la densidad de la materia al alcanzar el universo su radio máximo. Entre la densidad actual ϱ y la densidad mínima ϱ_0 debe existir la relación

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{A_0^3}{A^3}$$

y de este modo se obtiene sin dificultad

[78] $c^2 A_0 = H^2 \Delta A^3 \quad ; \quad A_0 = \frac{c}{H} \frac{\Delta}{\sqrt{(\Delta - 1)^3}} .$

Llevando los valores de A y A_0 a la [76], se obtiene:

[79] $$t = N \frac{1}{H}$$

siendo el factor numérico N la siguiente función de Δ:

[80] $$N = \frac{1}{\Delta - 1} \left[\frac{\Delta}{\sqrt{\Delta - 1}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\Delta - 1} - 1 \right] .$$

A continuación, damos una pequeña tabla con diferentes valores de Δ y los correspondientes de N, habiendo agregado la relación que existiría entre el radio máximo y el actual, según los diferentes valores supuestos de Δ:

Δ	N	$\frac{A_0}{A} = \frac{\Delta}{\Delta - 1}$
1,1	0,8	11
2	$0{,}57 = \pi/2 - 1$	2
10	0,35	1,1

Si en la [76] hacemos $A = A_0$ tendremos el tiempo T_0 que debe transcurrir entre el instante inicial y el momento en que el radio del espacio alcanza su valor máximo:

[81] $$T_0 = \frac{\pi}{2} \frac{A_0}{c}$$

y con el valor de A_0 dado en [78], se obtiene:

[82] $$T_0 = \frac{\pi}{2} \frac{1}{H} \frac{\Delta}{\sqrt{(\Delta - 1)^3}} .$$

Si suponemos que el valor de Δ es 2, se tendrá

[83] $$T_0 = \pi \frac{1}{H} . \qquad (\Delta = 2).$$

De acuerdo con la [81], *el período del reloj cósmico* constituído por el universo mismo sería igual a $\pi A_0/c$, o sea igual a π veces el tiempo que un rayo de luz tardaría en recorrer una distancia igual al radio máximo de la hiperesfera espacial.

Hasta ahora hemos considerado el caso de una curvatura espacial positiva. Si en las [60] y [61] se hace $a = -1$ la sección de universo, para $t =$ constante, sería una hipersuperficie de tres dimensiones de curvatura constante negativa. En tal caso, en lugar de la [75] se tendrá:

[84] $$\left(\frac{dA}{dt}\right)^2 = c^2 \frac{A_0 + A}{A}$$

y el radio A crecería indefinidamente con el tiempo. Un universo así se expandería constantemente sin contraerse jamás. Ya sabemos que tal cosa podría ocurrir si se cumpliera que ϱ es menor que ϱ_E. Si en la [61] consideramos $\varrho = 0$ y $a = -1$, se tiene:

[85] $$A' = c \quad ,$$

y eligiendo el origen del tiempo convenientemente, tendremos para el valor actual del radio A de este universo vacío de materia y de curvatura negativa:

[86] $$A = ct$$

con lo cual, la constante de Hubble valdría:

[87] $$H = \frac{A'}{A} = \frac{1}{t} \quad ,$$

y en consecuencia, la edad actual sería:

[88] $$t = \frac{1}{H}$$

Obsérvese que este tiempo es el que correspondería a un espacio de curvatura negativa y densidad media de la materia contenida en él igual a cero. Para una densidad no despreciable, el tiempo t sería algo menor, pero conservándose siempre el mismo orden de magnitud. La integración de la [84] da:

[89] $$t = \frac{A_0}{2c}\left[\frac{2z}{1 - z^2} + \ln\frac{1 - z}{1 + z}\right] \quad ,$$

siendo

[89′] $$z^2 = \frac{A}{A_0 + A} \ .$$

175. **La edad del universo y la edad de la Tierra.** — Hemos visto que el tiempo transcurrido entre el instante inicial en que la materia se hallaba condensada al máximo y el momento actual, es del orden del valor inverso de la constante H de Hubble. Tanto considerando que el espacio sea euclíedo o de curvatura positiva o negativa, se obtiene siempre para la edad del universo, considerado como un todo, la [79], donde N es un factor cuyo orden de magnitud es uno. En consecuencia, considerando el valor [30], resulta para dicha edad

[90] $$t \cong 2 \times 10^9 \text{ años}.$$

(Edad del universo)

Por otra parte, se conoce con bastante precisión el tiempo de semidesintegración del uranio,

[91] $$T = 4{,}5 \times 10^9 \text{ años}$$
(Período del uranio)

que se transforma hasta convertirse en radio G, que es un isótopo estable del plomo. Analizando las rocas uraníferas existentes en la corteza terrestre y determinando la relación entre las masas de uranio y plomo contenidas en las mismas, se puede conocer el tiempo transcurrido hasta hoy desde el momento en que aquéllas comenzaron a solidificarse. Se ha encontrado, de este modo, que ciertas rocas de Winnipeg (Canadá) se encuentran en estado sólido desde hace un tiempo τ, que es:

[92] $$\tau = 1{,}7 \times 10^9 \text{ años}.$$
(Tiempo de solidificación de la corteza terrestre)

Encontramos, así, que nuestra Tierra es casi tan vieja como el universo y que del uranio producido por la explosión inicial no se ha consumido hasta hoy ni siquiera la mitad. Esto último habla en favor de la teoría, pues es un hecho que el uranio existe, siendo casi seguro que en las condiciones actuales el mismo no puede formarse naturalmente en ninguna parte. En las teorías que se ocupan de la evolución de las estrellas, parece ser necesario hacer uso de períodos de tiempo muy superiores al consignado en [90]. Se hablaba en ellas de tiempos del orden de 10^{11} y 10^{12} años. Pero si se admite esta "escala larga" del tiempo, ya dejaría de ser comprensible la abundancia actual del uranio. Además, los argumentos favorables a la "escala corta" del tiempo [90], que se obtiene a partir de las ecuaciones del campo gravitatorio de Einstein y del valor actual observado de la constante de Hubble, son mucho más sólidos que los que resultan de considerar la evolución estelar. Debe admitirse, en consecuencia, que nuestra Tierra se formó *poco tiempo después* de aparecer el universo entero. Este poco *tiempo después* podría ser un lapso de algunos cientos de millones de años.

176. Cosmogonía: Nacimiento y muerte del universo. — Si la densidad media ϱ de la materia diseminada en todo el espacio fuera menor o igual que ϱ_E, o, de acuerdo con [57], si

[93] $$\varrho \leqslant \varrho_E = 1{,}27 \times 10^{-28} \frac{\text{gramos}}{\text{cm}^3},$$

le esperaría a nuestro universo una muerte muy poco gloriosa. El espacio tendría que ser abierto, de estructura euclídea o de curvatura negativa, y el conjunto evolucionaría de modo irreversible hasta que la densidad se hiciera igual a cero. Alcan-

zaría así, poco a poco, un estado de equilibrio termodinámico en que ningún cambio energético fuera posible. Ésta es la muerte natural que se juzgó inevitable después de haberse establecido el segundo principio de la termodinámica. Pero como Einstein lo hace notar, nunca podría probarse de un modo concluyente la relación [93], pues la existencia probable de masas obscuras no sujetas a observación, haría sospechar siempre un posible aumento de ϱ. En cambio, se presenta como posible que se pueda probar experimentalmente que ϱ es mayor que ϱ_E:

[94] $$\varrho > \varrho_E.$$

En este caso, el espacio físico sería cerrado y el panorama de la posible evolución del universo cambia totalmente. Pero no se trata de un espacio estático de tamaño invariable, sino que, para satisfacer las ecuaciones del campo de Einstein, *es necesario* que el radio del mismo *varíe periódicamente*. En la actualidad nuestro espacio se expansiona y por eso se alejan entre sí las "partículas" libres que lo constituyen, pero llegará un momento en que el radio alcanzará el valor máximo posible y a partir de entonces comenzará a contraerse. Las galaxias lejanas se irán aproximando paulatinamente unas a las otras y si en esa época —probablemente dentro de algunos miles de millones de años— nuestro Sol siguiera funcionando como hasta ahora, nuestros lejanos descendientes terrícolas verían los espectros de las nebulosas extragalácticas desplazados, no hacia el rojo, sino hacia el violeta. Las velocidades de *acercamiento* seguirían siendo proporcionales a las distancias y en ese universo en contracción, que se achica de manera acelerada, no podría dejarse de pensar en el inevitable choque final en que de nuevo se refundiría la materia y la energía que se había esparcido, al parecer libremente, por todas partes. Unos pocos miles de años antes de la catástrofe final las galaxias, ahora tan lejanas, estarían ya apretujándose contra la nuestra y finalmente todo, absolutamente todo, materia, energía, radiación cósmica, formaría una masa compacta de densidad increíblemente grande y que ocuparía un volumen que sería, desde el punto de vista astronómico, ridículamente pequeño. Ni siquiera los átomos podrían conservar su individualidad, pues se aplastarían unos contra otros y el todo se parecería al núcleo de un inmenso átomo que de ningún modo podría ser estable. Y este átomo único, inmediatamente después de formado, estallaría de manera análoga a como lo hace una bomba atómica que explota cuando se juntan los pedazos que la constituyen. En el caso del universo, las partes de la bomba serían miles de millones de galaxias constituídas cada una de ellas por millones y millones de soles. Todo iría a parar a la inmensa hoguera, pues en un universo cerrado, nada se puede perder. Allí se encontrarán las substancias de los átomos que alguna

vez pertenecieron al cerebro de Newton con lo que fué la luz que atravesaba el prisma de sus experimentos. Pero de la pasta de nuestro universo que moriría aplastado, surgiría de inmediato otro. No sería el mismo, pues hasta los átomos tendrían que formarse de nuevo al igual que otras galaxias, otros soles y otros planetas. Si nos remontamos hacia el pasado, tendremos que admitir que *siempre* habrá ocurrido lo mismo. El universo considerado como un todo, evolucionaría en forma *reversible*. Para comprender lo que esto significa, imaginemos que en un espacio vacío y de estructura euclídea hacemos estallar una pequeña granada. Los pedazos de la misma se alejarían unos de otros indefinidamente y el movimiento de cada uno de ellos sería rectilíneo y uniforme. Pero si la granada tuviera una masa considerable, los efectos gravitatorios entre las partes dispersas, harían que las mismas se fueran alejando con movimiento retardado y hasta podría ocurrir que, después de un tiempo, se precipitaran todas hacia el punto de origen. Para que no se perdiera nada sería necesario que la masa fuera tan grande que, hasta la luz desprendida en el estallido, se viera obligada a retornar. Cuando tal cosa ocurriese, el espacio de nuestro experimento se habría cerrado y sería ese mismo espacio el que funcionaría como un resorte perfecto. En la fig. 157 se ha representado el radio del universo en función del tiempo y los valores numéricos consignados en la misma se han calculado suponiendo que en la actualidad es $\Delta = 2$. En O, al condensarse la materia del universo anterior, se produjo la explosión que dió lugar a que naciera el nuestro, y como vestigios de la misma, el espacio aparece circundado hasta hoy por esas misteriosas partículas que constituyen los rayos cósmicos. En O se produjeron también todos los átomos que conocemos y muchos otros de vida corta que ya han desaparecido, como desaparecerá también nuestro universo al llegar a M, para dar lugar a que nazca otro nuevo. Y así, en el pasado y en el futuro, indefinidamente.

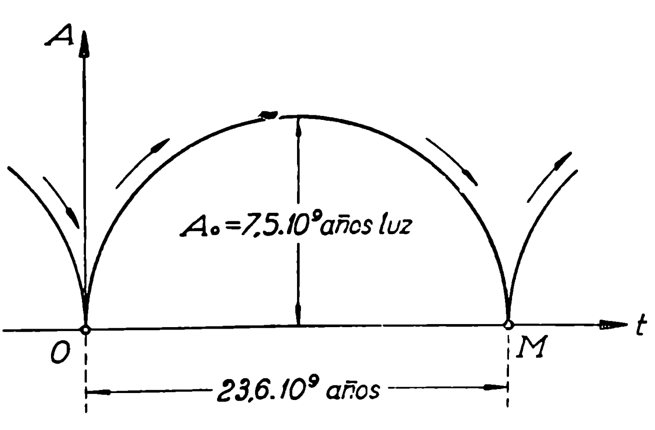


Fig. 157. — Nacimiento (O), expansión y muerte (M) de un universo.

En la tabla siguiente se consignan algunos valores del tiem-

po t correspondientes al radio A. Para el cálculo se utilizó la [76]. Para hallar los valores efectivos de t, y no sólo la marcha de la función, es necesario conocer A_0 y, con el objeto de fijar un valor al mismo, se supuso que en la [78] es $\Delta = 2$, habiendo tomado para H el valor [30]. Con estos supuestos, resultaría que en la actualidad el radio de la parte espacial de nuestro universo sería igual a la mitad del radio máximo A_0.

En la tercera columna se agregó la densidad media correspondiente, calculándose el volumen de la hiperesfera por la [45] del § 82. Claro está que la singularidad correspondiente a un radio igual a cero, con la consiguiente densidad infinita, traduce una imposibilidad física. Si admitimos que en el instante inicial la densidad de la materia fuera igual a la densidad del "flúido nuclear", cuyo valor aproximado es

$$\mu = 2{,}4 \times 10^{14} \frac{\text{gramos}}{\text{cm}^3},$$

se obtiene para el radio de este núcleo atómico gigantesco el valor

[95] $$R_0 = 3{,}6 \times 10^{13} \text{ cm.}$$

EXPANSIÓN DEL UNIVERSO

A/A_0	t	ϱ gm/cm³
0	0	∞
10^{-10}	4 minutos	32
10^{-8}	2,7 días	$3{,}2 \times 10^{-5}$
10^{-6}	7,5 años	$3{,}2 \times 10^{-11}$
10^{-4}	7500 años	$3{,}2 \times 10^{-17}$
10^{-2}	$7{,}5 \times 10^{6}$ años	$3{,}2 \times 10^{-23}$
0,25	$6{,}34 \times 10^{8}$ „	$2{,}0 \times 10^{-27}$
0,5	$2{,}14 \times 10^{9}$ „	$2{,}54 \times 10^{-28}$
0,75	$4{,}6 \times 10^{9}$ „	$7{,}5 \times 10^{-29}$
1	$11{,}8 \times 10^{9}$ „	$3{,}2 \times 10^{-29}$

$A_0 = 7{,}5 \times 10^9$ años-luz
Masa total $= 2{,}24 \times 10^{56}$ gramos

Si se calculara el volumen con la fórmula euclídea $\frac{4}{3}\pi R^3$ se obtendría, en lugar de la [95]:

[96] $$R_E = 6 \times 10^{13} \text{ cm.}$$

Como el radio de la órbita terrestre es igual a $1,5 \times 10^{13}$ cm, resulta que toda la materia del universo así condensada cabría en una esfera cuyo radio sería menor que el de la órbita de Júpiter.

Pero, instantáneamente, esta hiperesfera comienza a dilatarse y a los cuatro minutos de haber alcanzado la condensación máxima, el radio de la misma tiene ya una longitud de 3/4 de años-luz. La densidad en ese momento es sólo tres veces mayor que la del plomo y, antes de los tres días, con un radio de 75 años-luz, la densidad media disminuye hasta hacerse cuarenta veces menor que la del aire. Se ve que el radio crece con una velocidad mucho mayor que la de la luz, pero ésta no es una velocidad de traslación, puesto que la misma mide la expansión del propio espacio. Se trata de una velocidad geométrica; no de la velocidad de algo material. En un espacio cerrado, como el que estamos considerando, la geometría del mismo depende y está condicionada por la materia existente. En los espacios abiertos, euclídeos o de curvatura negativa, no ocurre lo mismo. En estos últimos, el espacio tendría una estructura que sería casi totalmente independiente de la materia que pudiera contener y esta independencia se acentuaría más y más, a causa de la expansión, a medida que transcurre el tiempo. En espacios así no se cumple el programa de Mach (§ 75), según el cual *toda* la inercia de los cuerpos debería depender del conjunto de *todas* las masas del universo. Por tal razón, se dice que los espacios euclídeos o de curvatura negativa, y también del universo de De Sitter, que su índice de inercia es igual a *uno*.

Con esto se quiere significar que los cuerpos tendrían inercia aun cuando se admitiera que la densidad media es nula en todas partes. La métrica de un espacio euclídeo o de curvatura negativa en expansión constante, tiende hacia la métrica de Minkowski, donde los g_{ik} son iguales a la unidad y de ahí lo del índice inercial igual a uno. Pero no ocurre lo mismo con un universo cerrado cuyo índice de inercia sería igual a cero, pues tal espacio no sería posible si no se cuenta con materia suficiente. Si a todo esto se agrega la reversibilidad con que es capaz de evolucionar un universo cerrado, se comprende la preferencia de que goza un modelo de esa clase, dentro del cual deja de tener sentido la vieja cuestión del "principio del mundo".

En compensación por la finitud del espacio tenemos un tiempo infinito y un número también infinito de universos que han sido. La imaginación puede recrearse ampliamente saltando, no ya de galaxia en galaxia, sino entre los universos pasados y futuros, todos iguales globalmente, todos hechos con la misma substancia, y todos diferentes entre sí. Pero sólo con la imaginación podremos atravesar la barrera infranqueable

que separa un universo del otro. Jamás los seres de un universo n podrán recoger un documento histórico, o de cualquier otra clase, procedente del $n-1$.

177. Expresión exacta de la ley de Hubble y posibilidad de determinar experimentalmente la curvatura del espacio. — Lo que hemos dicho al finalizar el párrafo anterior, acerca de diferentes universos que se irían formando sucesivamente en el tiempo, y sin posibilidad alguna de que dejaran la más mínima huella de su existencia, parece tener un carácter esencialmente metafísico. No obstante, lo dicho no es más que la traducción al lenguaje corriente de la expresión: *El radio* A *del universo puede ser una función periódica del tiempo.* Para decidir científicamente si dicho radio es una función periódica o monótona creciente del tiempo, habría que determinar la densidad media ϱ con mayor précisión, para saber cuál de las tres relaciones indicadas en [64] es la aplicable al mundo real. Pero siendo tan difícil una determinación más o menos exacta de ϱ, sería de desear que se encontrara otro camino para llegar a saber si la parte espacial de nuestro universo tiene curvatura positiva, negativa o nula. Pensamos que la determinación cuidadosa de las velocidades de alejamiento de las galaxias podrá darnos la información apetecida. Por lo pronto, se comprende que la ley de Hubble no puede ser rigurosamente exacta, puesto que la constante H, que figura en dicha ley, varía con el tiempo y al observar una nebulosa que está, digamos, a 500 millones de años-luz, la vemos como era hace 500 millones de años y no como es ahora. Pero hace 500 millones de años el radio del espacio era algo más pequeño que el radio actual y la luz que llega a nosotros de nebulosas situadas a diferentes distancias puede informarnos acerca del valor que ha ido adquiriendo, al crecer, el radio del universo. Consideremos un tren de ondas que parte del punto de emisión E cuando nosotros estamos en O, siendo entonces el radio del espacio igual a A_1 (fig. 158). Si este radio permaneciera invariable durante todo el recorrido de la luz, el tren de ondas al llegar a O tendría la misma longitud que en E, pues la cabeza y la cola

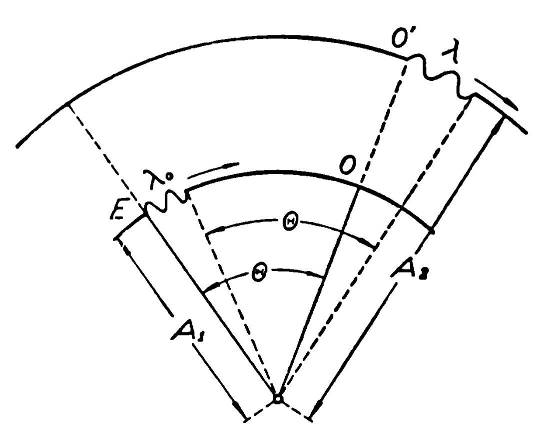


Fig. 158. — Al propagarse la luz en un universo en expansión aumenta su longitud de onda.

del tren se propagan con igual velocidad. Pero si en el tiempo t que la luz tarda en llegar a nosotros, el radio adquiere el valor A_2, el tren de ondas considerado, cuando llegue a O′, estará algo estirado, pues tanto la cabeza como la cola del tren de ondas habrán recorrido el mismo ángulo Θ desde el momento que esos dos extremos se propagan con idéntica velocidad. Entre la longitud de onda de la luz que llega a nosotros λ y la longitud de onda de partida λ_0 debe existir, entonces, la siguiente relación:

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{A_2}{A_1} .$$

Por otra parte, λ_0 es c/ν_0, siendo ν_0 la frecuencia propia de los átomos al emitir esa radiación, frecuencia que no varía ni con el lugar ni con el tiempo, pues el coeficiente del término temporal de la [50] es constante. Esta λ_0 es, entonces, la longitud de onda que se observa en la Tierra cuando la fuente está en reposo respecto del observador y se origina por la misma clase de átomos y el mismo salto cuántico de la fuente E. Para mayor claridad, llamemos R al radio actual A_2 del espacio en el momento de la recepción de la luz proveniente de E y r al radio del mismo espacio en el instante de la emisión. Con esto se tendrá

[97] $$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{R}{r} ,$$

que debe considerarse como la expresión exacta de la ley de Hubble. De acuerdo con la misma, la longitud de onda de la luz aumenta cuando la misma se propaga en un universo en expansión y disminuye si el universo se contrae. De la [97] sacamos

[98] $$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{R - r}{r} .$$

Supongamos ahora que el radio del espacio aumente con la velocidad constante k durante todo el tiempo t que la luz tarda en pasar de la fuente al observador. En tal caso será:

[99] $$R - r = kt ,$$

y si suponemos, además, que la variación del radio es relativamente pequeña, hasta el punto de poder considerar que $r = R$, se tendría:

[100] $$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{kt}{R} .$$

Si se considera todavía que el tiempo t es proporcional a la distancia D que separa la fuente del observador, se tendrá

$$[101] \qquad \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{V}{c} = hD \quad ; \quad V = chD = HD \quad ;$$

siendo H la constante de Hubble. Pero los supuestos hechos para deducir la [101] de la [97] sabemos que no son rigurosamente válidos, pues el radio A del espacio no crece linealmente con el tiempo ni es $r = R$. En la fig. 159 se indica la marcha teórica del crecimiento de A en función de t para el caso de curvatura negativa (N) [89] o positiva (P) [76] y nula, espacio euclídeo, (E) *. Para este último caso, la curva teórica se obtiene integrando la [52], y así resulta:

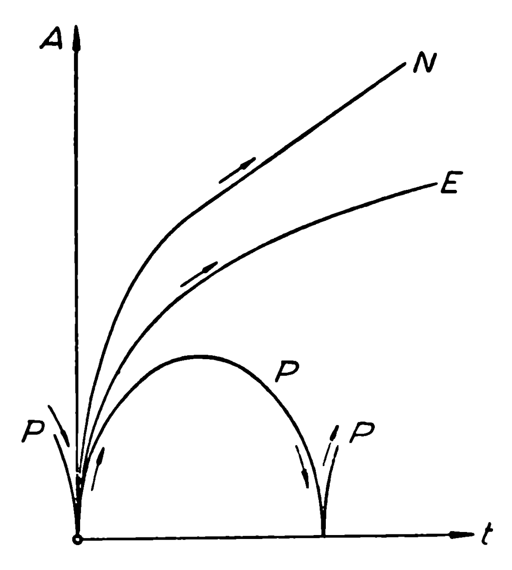


Fig. 159. — Variación de A con el tiempo, cuando la curvatura es negativa (N), nula (E) o positiva (P).

$$[102] \quad t = \frac{2}{3c\sqrt{A_0}} \sqrt{A^3} \quad ,$$

si se eligen convenientemente las constantes de integración. Por otra parte, la [97] permite determinar el radio r que *tenía* el espacio en el instante en que partió la luz de diferentes galaxias, con lo cual se podría tener experimentalmente, si se conocieran las distancias a que aquéllas se encuentran, un trozo de la curva $A = f(t)$ y decidir así entre las tres curvas N, E ó P. Naturalmente que esto permitiría hallar la densidad media de la materia diseminada por todo el espacio. Si de este modo resultara que el espacio tiene efectivamente una curvatura negativa o nula, habría que admitir que el mundo tuvo realmente un comienzo en el misterioso "instante cero".

178. **El problema de la unificación de los campos.** — El éxito logrado por Einstein al geometrizar el campo gravitatorio, sugirió de inmediato intentar análoga operación para el campo electromagnético.

Si se piensa que la ley de Newton tiene forma idéntica a la de Coulomb, el asunto se presenta como factible, pero entre ambas leyes existe una diferencia esencial. En electricidad

* El número de casos posibles sería mayor si la constante cosmológica λ fuera diferente de cero. En tal caso, uno de los modelos posibles sería el de un universo oscilante entre dos valores extremos del radio aún diferentes de cero.

existen cargas positivas y negativas y dos cargas de la misma clase se repelen, en tanto que las masas gravitatorias siempre se atraen. En un campo gravitatorio, partículas diferentes describen siempre la misma trayectoria, debido a la identidad entre las masas pesantes e inertes, y esa trayectoria se identifica con una geodésica de una variedad curva de cuatro dimensiones. En un campo eléctrico no ocurre lo mismo: la trayectoria de una partícula depende del valor y signo de su carga eléctrica y también de su masa inerte. Por otra parte, la misma estructura geométrica debe dar cuenta de todo: campo gravitatorio y campo electromagnético. Como sólo se dispone de cuatro dimensiones —tres espaciales y una temporal—, se ve que con una geometría riemanniana no puede lograrse lo que se busca. Los g_{ik} de una variedad de cuatro dimensiones son diez, y los diez se necesitan para determinar el campo gravitatorio. Si se aumenta el número de dimensiones se hace difícil encontrar una interpretación física concreta para semejante variedad, por lo cual, parece que no queda otro recurso que adoptar otra geometría que no sea del tipo de la de Riemann. En el párrafo 107 mencionamos el intento hecho por WEYL y EDDINGTON en tal sentido y la objeción, debida a Einstein, y al parecer ilevantable, que se ha hecho de esa teoría.

Por otra parte, lo deseable sería disponer de una teoría única que diera cuenta, no sólo de los efectos de los campos gravitatorios y electromagnéticos, sino también de la cuantificación de la carga eléctrica, de la atomicidad de la materia y de los fenómenos en que aparece la constante de Planck. Los trabajos de Einstein de estos últimos años apuntan hacia ese ambicioso objetivo. Entre los años 1945 y 1946 intentó generalizar su teoría general de la relatividad considerando a las componentes g_{ik} del tensor fundamental como complejos, cuya parte real sería simétrica, en tanto que la parte imaginaria gozaría del carácter antisimétrico pero, al parecer, esta teoría sólo sería aplicable a campos que tuvieran un centro de simetría. En el año 1950, consideró Einstein que el tensor fundamental g_{ik}, de componentes reales, fuera no simétrico, o sea g_{ik}, diferente de g_{ki}.

De este modo, se consigue establecer un número de ecuaciones diferenciales a derivadas parciales, en número suficiente para resolver, en principio, cualquier problema, pero la estructura de las mismas es tan complicada, que hasta hoy no se ha podido obtener de la teoría una sola consecuencia que pudiera ser confrontada por la experiencia. Por esta razón, como dice MAX VON LAUE *, todo el edificio de la teoría se encuentra en el aire. Finalmente, en 1954, al cumplir Einstein 75 años de edad, anunció una nueva teoría de los campos unificados, cu-

* *Die Relativitätstheorie*, tomo II, 1953, pág. 186.

yas ecuaciones son tan complejas que convierten el problema de su solución en una tarea casi sobrehumana, haciéndose de ese modo imposible extraer consecuencias verificables de la misma.

Siguiendo otro camino, A. Eddington procuró establecer relaciones que enlazaran las magnitudes básicas de la física apoyándose en ciertas ideas que, desgraciadamente, no han sido presentadas con la claridad deseable. Por esta razón, J. JEANS dice en su *Historia de la Física* *: "Pocos de los colegas de Eddington, si es que hubo alguno, aceptaron enteramente sus puntos de vista y también muy pocos, si es que hubo alguno, declararon entenderlos". Pero de todos modos, las relaciones halladas por Eddington dan un indicio acerca de lo que quisieran los físicos teóricos del presente: Una concepción única que vincule lógicamente todos los hechos del mundo físico.

Así, por ejemplo, Eddington afirma que la relación entre la masa del protón y del electrón debe ser necesariamente igual al cociente de las dos raíces de la ecuación

$$10x^2 - 136x + 1 = 0 \quad ,$$

que es igual a 1847,6, y que la masa total de la materia contenida en todo el universo, comprendiendo también a la energía radiante, debe ser:

$$\mathrm{M} = \left(\frac{\pi e}{4\mathrm{G}m}\right)^2 \cdot \frac{e^2}{\mathrm{M}}$$

donde e es la carga eléctrica elemental, m la masa del electrón, M la del protón y G la constante newtoniana de gravitación. Con la fórmula precedente se obtiene, para esa masa total:

$$\mathrm{M} = 5{,}4 \times 10^{54} \text{ gramos}.$$

Pero las relaciones precedentes, como ya dijimos, no pueden considerarse justificadas y en el momento actual, 1955, debemos reconocer que aun no se ha logrado la ansiada síntesis que permitirá describir, de manera lógica y coherente, el comportamiento total de nuestro mundo físico.

* Editorial Fondo de Cultura Económica, México - Buenos Aires, 1953, pág. 411.

ÍNDICE ALFABÉTICO DE MATERIAS

ÍNDICE DE LÁMINAS

La EDITORIAL KAPELUSZ, S. A.,
dió término a esta obra el 30 de
diciembre de 1955, en los talleres grá-
ficos E. L. Frigerio e Hijo, Perú 1257.
Buenos Aires.

. 5535

